PROBLEMAS RESUELTOS DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

PROPEDÉUTICA PARA LAS CIENCIAS

Lumbreras
Editores

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

PROBLEMAS RESUELTOS DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

PROPEDÉUTICA PARA LAS CIENCIAS

Lumbreras
Editores

BIBLIOTECA NACIONAL DEL PERÚ
Centro Bibliográfico Nacional

511.3076 Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Lima)
A7S Problemas resueltos de razonamiento matemático : propedéutica para las
2017 ciencias / Asociación Fondo de Investigadores y Editores.-- 1a ed.,
5a reimpr.-- Lima : Lumbreras Editores, 2017.
623 p. : il., diagrs. ; 22 cm.

Previamente publicado como: Solucionario razonamiento matemático, propedéutica para las ciencias.

D.L. 2017-06786
ISBN 978-612-4056-90-1

1. Razonamiento matemático - Problemas, ejercicios, etc. I. Título

BNP: 2017-1646

Problemas resueltos de razonamiento matemático: propedéutica para las ciencias

Autor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Editor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Diseño y diagramación: Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Av. Alfonso Ugarte N.° 1426 - Breña. Lima-Perú. Telefax: 01-332 3786
Para su sello editorial **Lumbreras Editores**
Página web: www.elumbreras.com.pe
Primera edición: septiembre de 2009
Primera reimpresión: mayo de 2010
Segunda reimpresión: agosto de 2012
Tercera reimpresión: diciembre de 2014
Cuarta reimpresión: marzo de 2016
Quinta reimpresión: junio de 2017
Tiraje: 1000 ejemplares
ISBN: 978-612-4056-90-1
Registro del proyecto editorial N.° 31501051700289
"Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú" N.° 2017-06786

Distribución y ventas al por mayor y menor
Teléfonos: Lima: 01-332 3786 / Provincia: 01-433 0713
✉ ventas@elumbreras.com.pe

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la Asociación Fondo de Investigadores y Editores en el mes de junio de 2017.
Calle Las Herramientas N.° 1873 / Av. Alfonso Ugarte N.° 1426 - Lima-Perú.
Teléfono: 01-336 5889

Presentación

Asociación Fondo de Investigadores y Editores (AFINED), promotora de Lumbreras Editores, tiene el agrado de presentar el **Solucionario Razonamiento Matemático, Propedéutica para las Ciencias**, libro que forma parte de una nueva serie de publicaciones que aportan al desarrollo dinámico de los contenidos educativos que brindamos a la sociedad, sobre todo en un contexto en el que la enseñanza de las ciencias y las humanidades ha ido perdiendo su valor analítico-crítico.

Esta serie de solucionarios es el complemento ideal para los libros de la colección de Ciencias y Humanidades, trabajo desarrollado por Lumbreras Editores en conjunto con las planas de profesores del **Instituto de Ciencias y Humanidades** –promotor de las academias ADUNI y César Vallejo–, quienes se han dedicado durante generaciones a formar estudiantes con criterio realista y capacidad analítica, además de impartir conocimientos objetivos y de rigor científico a través de las publicaciones de Lumbreras Editores con una sólida presencia en los diversos lugares del Perú, cumpliendo así una tarea vital en el acercamiento de material bibliográfico de calidad a miles de estudiantes y profesores en todo el país. De esta manera reafirmamos nuestro compromiso firme de aportar en el desarrollo de los sectores más amplios de nuestra sociedad.

El **Solucionario Razonamiento Matemático, Propedéutica para las Ciencias** presenta el desarrollo didáctico de cada uno de los problemas propuestos del libro **Razonamiento Matemático, Propedéutica para las Ciencias**, y ofrece un acercamiento dinámico a todos los contenidos necesarios para obtener dominio del curso. Este libro es también un recorrido a través de lineamientos metodológicos que anhelan construir puentes sólidos entre el estudiante y el aprendizaje de esta materia.

La búsqueda por aportar publicaciones más didácticas y novedosas ha hecho posible este libro y la serie de solucionarios que le seguirán en el campo de las ciencias; también revela nuestro compromiso profesional de seguir impulsando un trabajo editorial y académico que no esté alejado de las grandes mayorías. Lumbreras Editores quiere reconocer el esfuerzo conjunto que ha significado esta publicación, en la cual ha participado un gran grupo de profesionales de primer nivel, cuyo esfuerzo es un apoyo fundamental a nuestro anhelo de conseguir una educación científica y humanística integral. Finalmente, deseamos reconocer el apoyo de la plana de Razonamiento Matemático de las academias ADUNI y César Vallejo, por su labor en la elaboración de este material, gracias a su valiosa trayectoria en la enseñanza preuniversitaria de calidad. De manera especial, AFINED desea agradecer a los profesores Christian Arroyo Castillo y Miguel Ángel Vargas Castañeda por su trabajo profesional en la sistematización del presente libro.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES

Prólogo

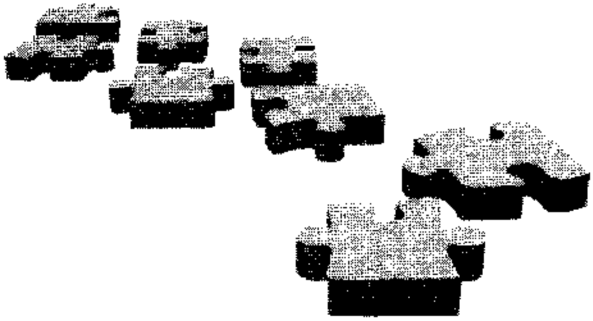
El presente trabajo fue concebido con la finalidad de profundizar en el razonamiento matemático y complementar la preparación inicial en la materia. Asimismo, buscamos reforzar los conocimientos adquiridos con la teoría, a través del desarrollo de un material propedéutico basado en la resolución de problemas. Por ello, empleamos las más modernas técnicas didácticas, fruto de la experiencia y del dominio del curso de Razonamiento matemático alcanzados en el ejercicio de la enseñanza de esta materia.

Los problemas resueltos pertenecen al texto **Razonamiento Matemático, Propedéutica para las Ciencias** y han sido cuidadosamente seleccionados para no excluir ningún tema de importancia. De esta manera, buscamos conseguir la correcta comprensión de las situaciones matemáticas planteadas. Con esta metodología se busca profundizar en los contenidos directamente a través de la práctica.

Este libro está dirigido a los interesados en lograr destreza en el razonamiento matemático –con el que lidiamos en el desenvolvimiento de nuestra vida cotidiana–, y sus problemas propuestos toman como referencia los hechos de la realidad. Además, se presenta un enfoque novedoso y acertado para la resolución de problemas, con herramientas didácticas que ayudan a la mejor comprensión. El solucionario presenta más de 880 preguntas desarrolladas, correspondientes a preguntas *tipo* de los exámenes de admisión de las diferentes universidades e instituciones educativas del país.

El objetivo de este trabajo es convertirse en una herramienta valiosa para conseguir el dominio de todos los temas del curso de Razonamiento matemático. Para ello, la selección, división y orden de este solucionario permiten una consulta específica del curso, pero, al mismo tiempo, ofrecen un avance progresivo de cada tema. Estamos seguros de que los contenidos aquí vertidos serán de un gran apoyo académico, tanto para los estudiantes así como para los docentes.

Los autores



índice

Índice

Capítulo

1

Ejercicios de introducción

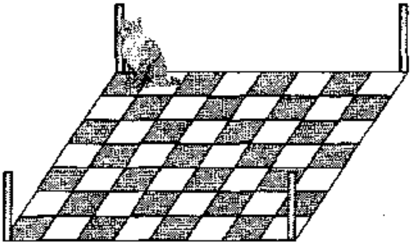
Para resolver los problemas expuestos en este capítulo no se necesitan conocimientos matemáticos avanzados, basta emplear un poco de ingenio y nociones básicas de matemática. Además, no se llega a la solución por medio de los procedimientos tradicionales ni rigurosos, ni por el uso de fórmulas, por el contrario, la habilidad y capacidad de imaginación son ingredientes importantes para cumplir con una resolución. Esto permitirá que conforme se vaya avanzando en el curso mismo, se busque siempre una solución de problemas ingeniosa, no tradicional y sobre todo creativa.

Capítulo **1**

Ejercicios de introducción

PROBLEMA N.° 1

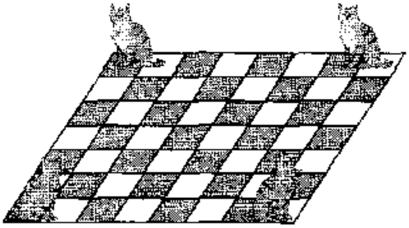
El piso de la cocina tiene cuatro ángulos, en cada ángulo está un gato; además, frente a cada gato hay tres gatos. En cada rabo está sentado un gato. ¿Cuántos gatos hay, como mínimo, en la cocina?



A) 16
B) 12
C) 4
D) 32
E) 8

Resolución

El ejercicio planteado inicialmente nos podría hacer incurrir en el error, creyendo (si no lo analizamos debidamente) que son necesarios 12 gatos, o tal vez 16 gatos, inclusive 32 gatos (para el más distraído lector); sin embargo, la respuesta correcta es 4 gatos. "¿Cómo es posible esto?" se preguntará usted, amigo lector. Veámoslo en un gráfico.

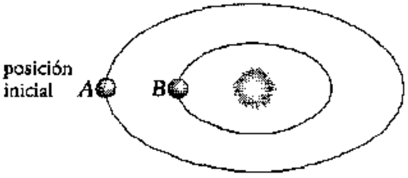


Se observa en el gráfico que cada gato está sentado sobre su rabo y frente a cada uno hay 3 gatos.
Por lo tanto, hay 4 gatos como mínimo.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

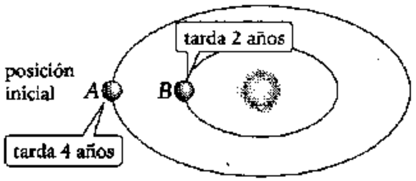
Si el planeta *A* tarda 4 años (terrestres) en dar una vuelta completa al Sol y el planeta *B* tarda dos años, ¿cuántos años deberán transcurrir, como mínimo, para que los dos tomen la posición inicial?



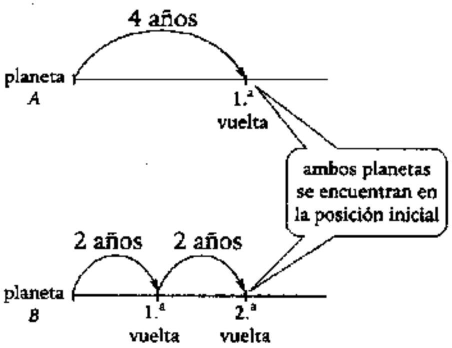
A) 6
B) 4
C) 8
D) 10
E) 2

Resolución

Se pide la cantidad mínima de años que deberán transcurrir para que los planetas se encuentren en su posición inicial.
De los datos, para dar una vuelta completa al Sol tardan cada uno



Empleamos un esquema lineal para indicar la cantidad de años transcurridos para que cada planeta complete una vuelta al Sol.

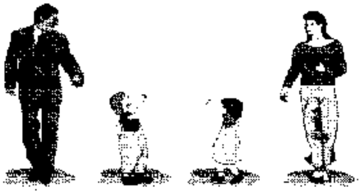


Por lo tanto, deberán transcurrir 4 años como mínimo.

Clave [illegible]

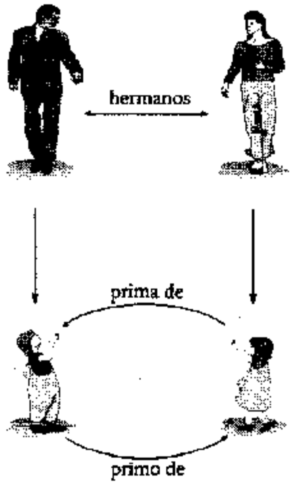
PROBLEMA N.° 3

En una reunión familiar se encuentran las siguientes relaciones de parentesco entre los presentes: padre, madre, hijo, hija, tío, tía, hermano, hermana, primo, prima, sobrino, sobrina; sin embargo, sólo habían 4 personas. ¿Cómo puede ser posible?

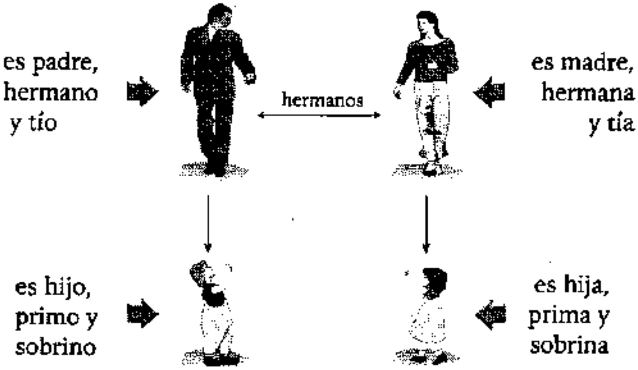


Resolución

Como se sabe que están presenten 4 personas, nos apoyaremos en los parentescos primo y prima, ya que estos son hijos de hermanos, con lo cual tendremos



Verificamos la presencia del resto de parentescos.



Se observa que solo son necesarias 4 personas.

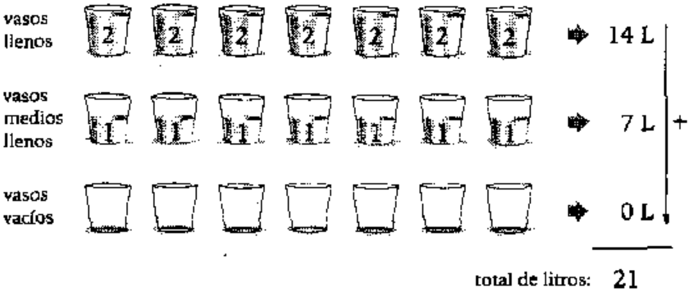
PROBLEMA N.° 4

Tres personas *A*, *B* y *C* deben repartirse 21 vasos iguales, de los cuales 7 están llenos, 7 medios llenos y 7 vacíos. Si a cada uno debe corresponderle la misma cantidad de líquido y el mismo número de vasos, ¿cuál es el número de vasos vacíos que le corresponde a la persona que tiene 3 vasos llenos?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución

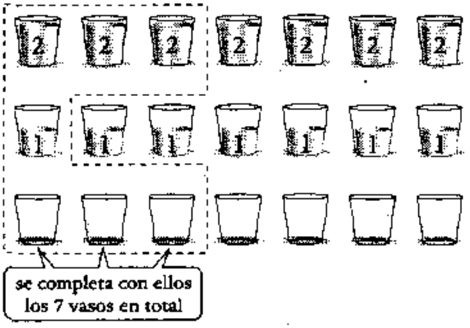
Se pide la cantidad de vasos vacíos de la persona que recibe 3 vasos llenos.
Asignamos una cantidad de litros a los vasos llenos y otra a los medios llenos (la mitad de los llenos).



Del dato: *A cada uno le corresponde la misma cantidad de líquido y el mismo número de vasos,* tenemos lo siguiente:

	N.° de litros de c/u	N.° de vasos
A	7 L	7
B	7 L	7
C	7 L	7
Total	21 L	21

Como una de las personas tiene 3 vasos llenos: 6 L(según los valores asignados), solo le falta un litro para los 7 L que debe obtener al final. De donde



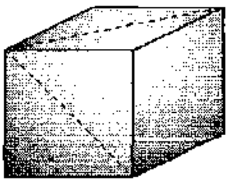
Por lo tanto, le corresponde 3 vasos vacíos.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 5

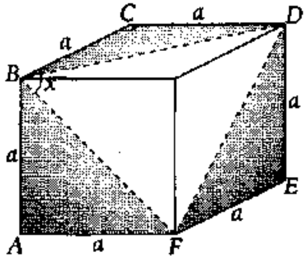
Calcule la medida del ángulo formado por las líneas punteadas.

A) 45°
B) 30°
C) 60°
D) 90°
E) 75°



Resolución

Se pide calcular la medida del ángulo formado por las líneas punteadas.
En el cubo mostrado



$\triangle BAF \cong \triangle BCD \cong \triangle DEF \rightarrow BF=BD=DF=a\sqrt{2}$

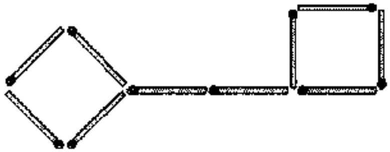
$\rightarrow$ $\triangle BDF$ es equilátero.

$\therefore$ $x=60°$

Clave **C**

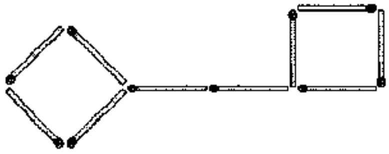
PROBLEMA N.° 6

Una llave está construida con 10 cerillos; en ella, se cambia de lugar 4 cerillos, de manera que resulten 3 cuadrados iguales.

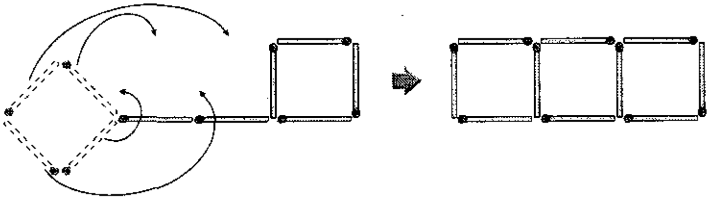


Resolución

Según el problema, se debe cambiar de lugar 4 cerillos para que resulten 3 cuadrados iguales.

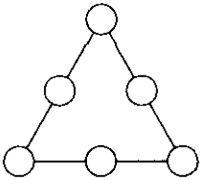


Se observa ya 2 cuadrados, pero con los 2 cerillos sobrantes no alcanzaría para formar 2 cuadrados más. Luego, procederíamos a mover los 4 cerillos que forman uno de los cuadrados, así



PROBLEMA N.° 7

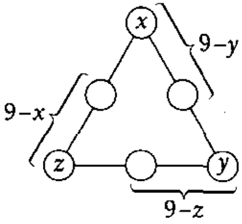
Distribuya los dígitos del 1 al 6 en las casillas circulares del siguiente gráfico (un dígito en cada casilla circular), de tal manera que la suma de los dígitos en cada uno de los lados del triángulo sea 9.



Resolución

En el problema, se debe distribuir los números del 1 al 6 en cada casilla circular, de tal manera que la suma de los números ubicados en cada lado del triángulo sea 9.

Ubicamos los números en las casillas de los vértices.

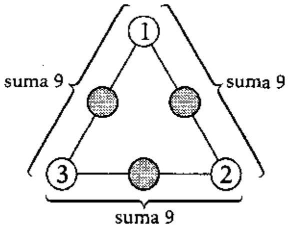


Hallamos la suma total de los números ubicados

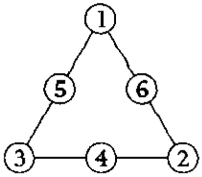
$$(9-x)+(9-z)+(9-y)=1+2+3+4+5+6$$
$$27-x-y-z=21$$

Entonces $\begin{array}{ccccc} x & + & y & + & z=6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 2 & & 3 \end{array}$

Luego reemplazamos



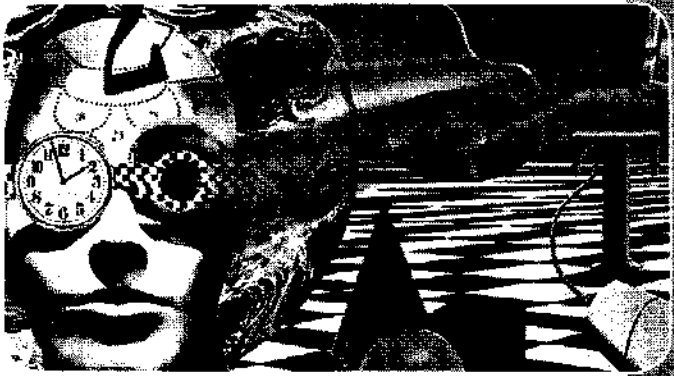
Completamos las casillas circulares sombreadas.



Capítulo

2

Lógica recreativa



En los diversos niveles de nuestra educación, siempre se presenta una pregunta que por su recurrencia podría ser considerada una pregunta clásica: ¿Cuál es la importancia del uso y del estudio de la matemática en la vida diaria? Para poder hacer frente a esa pregunta, tendríamos que basarnos en la necesidad del uso de la lógica recreativa (base de la matemática) en el desarrollo de la humanidad. Se sabe que la evolución de la capacidad de aprehensión del ser humano se desarrolla a través del contacto directo con su medio, del juego, de la competencia, etc. La matemática se encarga de sistematizar ese conjunto de actividades bajo las cuales nos encontramos expuestos. La lógica recreativa combina la belleza de una estructura matemática con el entretenimiento que se adquiere con la resolución de un problema determinado. Los problemas que se presentan en las situaciones lógicas recreativas aportan, en ese sentido, diversión y desarrollo del pensamiento creativo, objetivo base del presente capítulo.

Capítulo **2**

Lógica recreativa

SITUACIONES DIVERSAS

PROBLEMA N.° 1

¿Cuántas palabras no varían en su lectura original observándolas reflejadas en un espejo?

- OTOTO
- AHUHA
- MAMA
- AMA
- IMONOMI
- HAMITIMAH
- OSO
- EMME
- LOLOL

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución

Piden determinar cuántas palabras no varían su lectura original observándolas reflejadas en un espejo.
Analizamos cada palabra:

Palabra original	Palabra reflejada
OTOTO	OTOTO
OSO	OƧO
IMONOMI	IMOИOMI
MAMA	AMAM
LOLOL	⅃O⅃O⅃
AMA	AMA
AHUHA	AHUHA
EMME	ƎMMƎ
HAMITIMAH	HAMITIMAH

Por lo tanto, cuatro palabras no varían su lectura al reflejarlas en el espejo.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

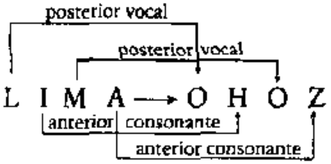
En cierto sistema de comunicaciones para descifrar claves, se sabe que: por cada consonante se pondrá la vocal inmediata posterior y por cada vocal se pondrá la consonante inmediata anterior. Así, por ejemplo: LIMA se escribirá como OHOZ. ¿Qué palabra daría origen a HUATAZ?

A) ITZUZA B) TZUIZA C) ZUZAIT
D) ETZIZA E) TZUZAA

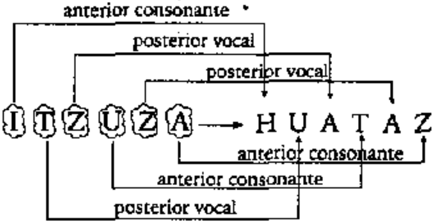
Resolución

Piden: ¿qué palabra da origen a HUATAZ?
Dato:
Por cada consonante → vocal inmediata posterior
Por cada vocal → consonante inmediata anterior

Ejemplo



Con respecto a lo pedido

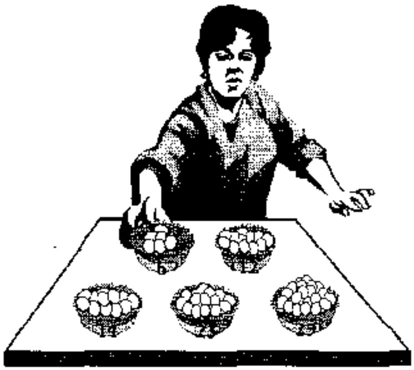


Por lo tanto, la palabra buscada es ITZUZA.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Las cestas que se ven en el gráfico contienen huevos. En una de estas hay huevos de gallinas; en las otras, de pato. Su número está indicado en cada cesta. *Si vendo esta cesta* –meditaba la vendedora– *me quedará el doble de huevos de gallina, que de pato.* ¿A qué cesta se refiere la vendedora? (Dé como respuesta el número que se indica en ella).



A) 12 B) 6 C) 29
D) 14 E) 23

Resolución

Piden: ¿cuál es la cesta que piensa vender la vendedora?

Dato:

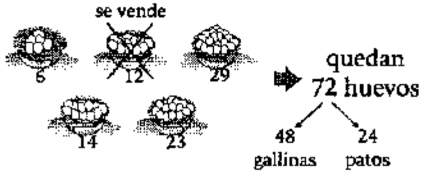
Si se vende una cesta, quedará el doble de huevos de gallina que de patos.

Analizamos el contenido de cada cesta de huevos:

El total de huevos es 84. Al retirar una cesta, la cantidad resultante debe ser $\overset{o}{3}$ para que pueda ser distribuido en la relación de 2 a 1.

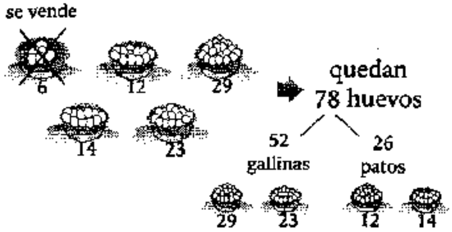
Se presentan los siguientes casos:

Primer caso:



Descartado, ya que las cestas sobrantes no pueden ser repartidas en dichas cantidades.

Segundo caso:



Por lo tanto, la cesta que se piensa vender es aquella cuyo contenido es 6 huevos.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

En cierto pueblo se celebra un juicio en el que hay tres acusados de asesinato. Uno es culpable y siempre miente y los otros dicen la verdad; además, uno de ellos es extranjero y no habla el idioma del pueblo, por lo que el juez decide tomar como intérpretes a los otros dos acusados.
El juez le pregunta al extranjero:
"¿Es Ud. culpable?", el extranjero responde en su idioma.
Luego, pregunta a los intérpretes qué fue lo que dijo.
El segundo acusado responde que ha dicho que no.
El tercer acusado responde que ha dicho que sí. ¿Quién es el culpable?

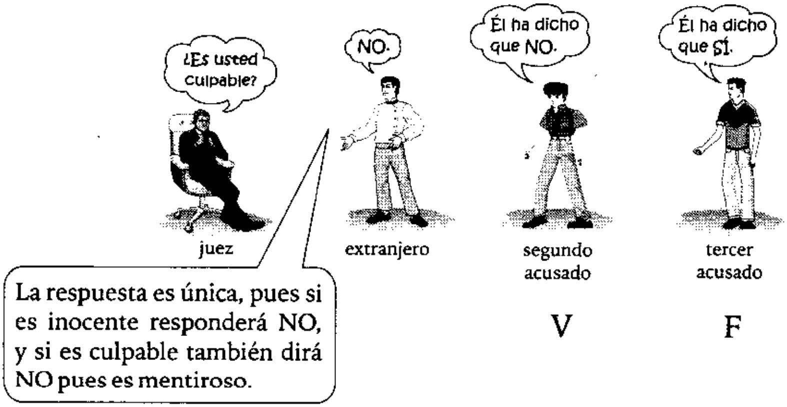
A) el primero
B) el tercero
C) el juez
D) el segundo
E) el juez es injusto

Resolución

Piden determinar quién es el culpable.

Datos:
Se sabe que uno es culpable y siempre miente y los otros dicen la verdad; además, uno de ellos es extranjero.

Analizamos el interrogatorio, obteniendo:



La respuesta es única, pues si es inocente responderá NO, y si es culpable también dirá NO pues es mentiroso.

De lo que se concluye que el segundo acusado dijo la verdad y el tercero mintió. Por lo tanto, el tercer acusado es el culpable.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

Se encuentran 5 señoritas. Dos tienen ojos negros y dicen siempre la verdad; tres tienen ojos azules y siempre mienten. Estas son: Yolanda, Esther, María, Ruth y Rosa. A tres de ellas se les hizo una pregunta a cada una.

- A Yolanda se le pregunta: *¿De qué color son tus ojos?*, y esta contestó en ruso, idioma que sólo conocían dichas señoritas.
- A Esther se le preguntó: *¿Cuál es la respuesta que dio Yolanda?*, y esta contestó, *ella dijo que sus ojos son de color azul*.
- A María se le preguntó: *¿De qué color son los ojos de Yolanda y Esther?*, y esta contestó *la primera tiene ojos negros y la segunda, ojos azules.*

¿Quiénes tienen ojos negros?

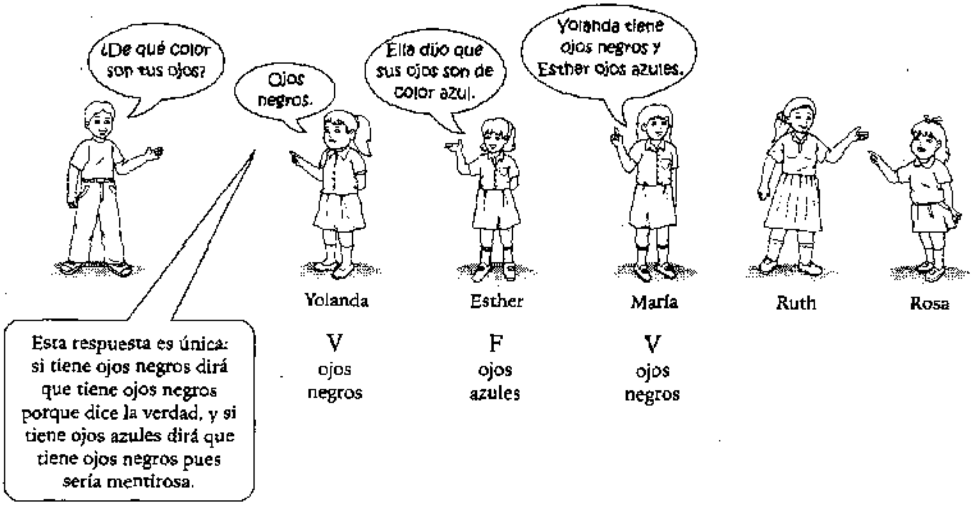
A) Yolanda - Rosa
B) María - Rosa
C) Esther - María
D) Yolanda - María
E) Ruth - Rosa

Resolución

Piden determinar quiénes tienen ojos negros.

Se sabe que 2 tienen ojos negros y siempre dicen la verdad y 3 tienen ojos azules y siempre mienten.

Analizamos la conversación en el orden realizado.



Esta respuesta es única: si tiene ojos negros dirá que tiene ojos negros porque dice la verdad, y si tiene ojos azules dirá que tiene ojos negros pues sería mentirosa.

De la respuesta única dada por Yolanda se deduce que Esther miente; además, María dice la verdad, de lo cual se concluye que Yolanda dice la verdad.

Por lo tanto, las de ojos negros son Yolanda y María.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Cuatro sospechosas de haber atropellado con su auto a un peatón hicieron las siguientes afirmaciones cuando fueron interrogadas por la policía:

- María: *Fue Lucía.*
- Lucía: *Fue Leticia.*
- Irene: *Yo no fui.*
- Leticia: *Lucía miente.*

Si solo una de ellas miente, ¿quién atropelló al peatón?

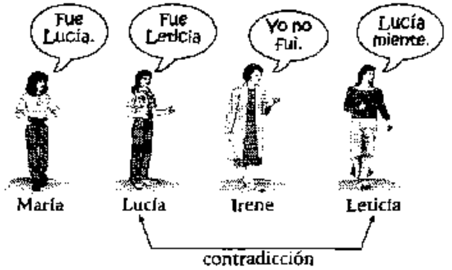
A) Lucía B) Leticia C) Irene
D) Yamilet E) María

Resolución

Piden determinar: ¿quién atropelló al peatón?

Se sabe que solo una de ellas miente.

Analizamos los enunciados señalados:



Los enunciados planteados por Lucía y Leticia son contradictorios, por lo tanto uno de ellos es verdadero y el otro es falso.

Como solo una de ellas miente (por dato), se concluye que la única persona que miente es Lucía o es Leticia, entonces las otras 2 personas (María e Irene) dicen la verdad.

Analizamos lo mencionado por María.

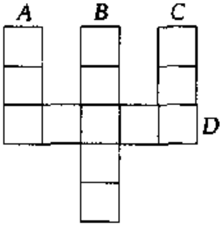
María: *Fue Lucía* **Verdadero**

Por lo tanto, quien atropelló al peatón fue Lucía.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

Distribuya en las casillas del gráfico los números del 1 al 13, de tal manera que la suma de los números ubicados en cada una de las tres columnas (A, B y C) y la fila D sea la misma. Dé como respuesta la mínima suma.



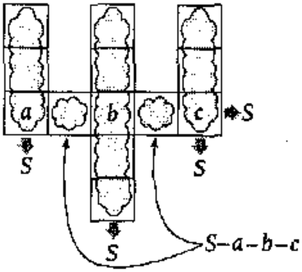
A) 30 B) 25 C) 26
D) 24 E) 27

Resolución

Piden determinar la menor suma constante.

Dato: la suma de los números ubicados en cada columna y fila es la misma.

Se considera la suma constante S, generando la suma total.



Recuerda

La suma de los números a ubicarse en los 13 casilleros es

$1+2+3+...+13=91$.

La suma de los números ubicados en los 13 casilleros es

$$S+S+S+(S-a-b-c)=91$$

$$4S=91+a+b+c$$

Se desea $S_{\text{mín}}$ entonces $a+b+c$ mínimo, así

$$4S=91+\underbrace{a+b+c}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 4S=91+ & 6 & (\times) \\ 4S=91+ & 7 & (\times) \\ 4S=91+ & 8 & (\times) \end{array}\right\} S\notin\mathbb{Z}^+$$

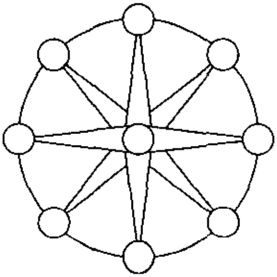
$$\begin{array}{lll} 4S=91+ & 9 & (\checkmark) \end{array}$$

$\therefore\ S_{\text{mín}}=25$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 8

Distribuya los números del 1 al 9; uno en cada casillero, de tal manera que la suma de los números ubicados en casilleros diametralmente opuestos tenga el mismo resultado (3 soluciones). Dé como respuesta la suma de los números que pueden ser ubicados al centro.



A) 10 B) 14 C) 15

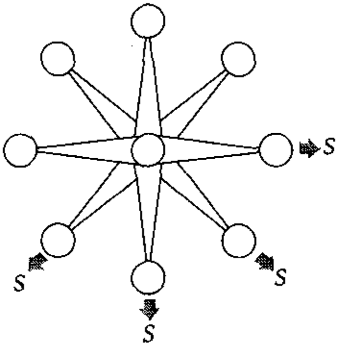
D) 16 E) 11

Resolución

Piden la suma de los números que pueden ubicarse en el centro.

Dato: la suma de los números ubicados en una misma línea es constante.

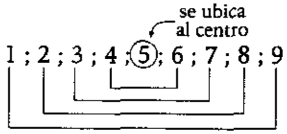
Analizamos la gráfica.



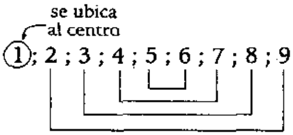
Ya que la suma es constante, y el número ubicado en el centro es común, entonces los números ubicados a los extremos deben sumar (en parejas) un mismo resultado.

En el conjunto numérico dado (1; 2; 3; ...; 9), hallaremos parejas de números con suma constante, así:

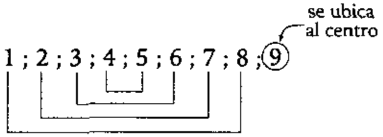
Primera opción



Segunda opción



Tercera opción



Por lo tanto, la suma de los números que pueden ocupar la casilla central es

1+5+9=15.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

Pedro y Sara realizan una encuesta entre sus amigos Abel, Julio y Darío, obteniendo las siguientes respuestas:

	Abel	**Julio**	**Darío**
¿Eres profesional?	Sí	Sí	No
¿Tienes carro?	No	No	Sí
¿Te gusta ir al cine?	Sí	No	No

Pero, luego, recordaron que uno de ellos siempre miente, otro miente solo una vez y el último siempre dice la verdad. Además, si todos hubiesen dicho la verdad, tendrían la misma respuesta. ¿Quién miente siempre?

A) Abel B) Darío C) Julio
D) Sara E) Pedro

Resolución

Piden determinar cuál de los amigos miente siempre.

Se sabe que de los 3 amigos (Abel, Julio y Darío), uno miente siempre, otro siempre dice la verdad y el último miente solo una vez.

De ellos se tiene las siguientes respuestas:

	Abel	**Julio**	**Darío**
¿Eres profesional?	Sí	Sí	No
¿Tienes carro?	No	No	Sí
¿Te gusta ir al cine?	Sí	No	No

Respuestas totalmente contrarias (uno de ellos dice V y el otro F)

Como la otra persona (Julio) miente solo una vez, solo una de las respuestas se debe diferenciar a las respuestas dadas por la persona que responde correctamente todas las preguntas.

Analizando, se concluye que Julio solo diferencia una respuesta con Abel.

Entonces Abel respondió correctamente las 3 veces y Darío falló (mintió) 3 veces.

Por lo tanto, Darío miente siempre.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 10

El Juez escuchó con curiosidad a cuatro conocidos timadores:

- *Están ustedes mintiendo,* dijo: *Pretenden hacerse pasar por mejor de lo que son.*
- El policía se echó a reír y dijo: *Da la casualidad de que sé que uno de ellos dice la verdad.*
- El juez preguntó bruscamente: *Muy bien. ¿Qué tienen que decir en su defensa?*
- *Uno de nosotros miente,* dijo Alberto.
- *No, se lo aseguro. Dos de nosotros mentimos,* afirmó Benito.
- *Hágame caso a mí,* –intervino Claudio–, *tres de nosotros mentimos.*
- *No, no es cierto* –le desmintió Darío–. *Los cuatro decimos la verdad.*

¿Cuál de ellos decía la verdad, si se sabe que el policía tenía razón?

A) Alberto B) Benito C) Claudio
D) Darío E) Juez

Resolución

Piden determinar cuál de los acusados decía la verdad. Se sabe que solo uno de ellos dice la verdad.

Ellos dicen:

Alberto: *Uno de nosotros miente.*

Benito : *Dos de nosotros mentimos.*

Claudio: *Tres de nosotros mentimos.*

Darío : *Los cuatro decimos la verdad.*

Por los datos del problema (lo dicho por el policía), se conoce que solo uno de ellos dice la verdad, entonces tres mienten.

Por lo tanto, la persona que dice la verdad es Claudio.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 11

El novio de Ana mentía indefectiblemente los días martes, jueves y sábado. Los demás días decía la verdad; cierto día conversaban:

- *–Ana, salgamos a pasear hoy–*, le ofreció el novio.
- *–No–*, fue la respuesta de ella.
- *–¿Por qué no, si hoy es sábado?*
- *–No... tal vez mañana.*
- *–Mañana no podremos, porque será miércoles, y tengo que estudiar.*

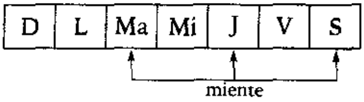
Determine, ¿en qué día se dio la conversación?

A) lunes B) jueves C) sábado
D) martes E) viernes

Resolución

Piden: ¿qué día se realiza la conversación?

Se sabe del novio de Ana, lo siguiente:



Además, el novio de Ana plantea estas proposiciones:

- Hoy es sábado.
- Mañana será miércoles.

Es evidente que el novio de Ana está mintiendo, ya que no pueden ser verdaderas las 2 proposiciones al mismo tiempo.

- Hoy es sábado (F), entonces, hoy no es sábado.
- Mañana será miércoles (F), entonces, hoy no es martes.

De lo que concluimos que el novio de Ana miente, pero no es ni sábado ni martes.

Por lo tanto, la conversación se realiza el jueves.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 12

Un profesor está armando un equipo de investigación que deberá contar con 4 miembros a escogerse entre los varones: F, G y H; y las mujeres X, Y, Z, W.

Con las siguientes condiciones:

I. Deberá haber por lo menos dos varones en el grupo.
II. F no quiere trabajar con Y, y viceversa.
III. G no quiere trabajar con W.
IV. Y no quiere trabajar con Z.

Si Y es elegida, ¿quiénes más conformarán el equipo?

A) F, G, X B) G, H, W C) G, H, Z
D) F, H, W E) G, H, X

Resolución

Piden: ¿quiénes conformarán el grupo liderado por Y?

Se sabe que:
Varones: F, G y H
Mujeres: X, Y, W y Z

Además:

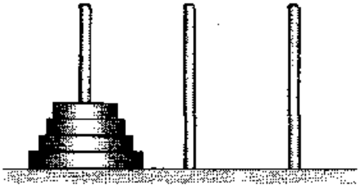
- F no quiere trabajar con Y (descartado F).
- Deberá haber por lo menos dos hombres en el grupo (necesariamente estos son G y H).
- G no quiere trabajar con W (descartado W).
- Y no quiere trabajar con Z (descartado Z).

Solo quedan disponibles: G, H y X.

Clave E

PROBLEMA N.° 13

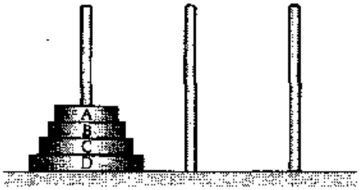
Un juego consiste en trasladar los discos de madera del primer eje al tercero.
¿Cuántos movimientos, como mínimo, se deberán realizar para lograrlo, sabiendo que un disco grande no puede situarse sobre uno pequeño?



A) 18　B) 14　C) 15
D) 16　E) 17

Resolución

Piden: ¿cuántos movimientos, como mínimo, se deberán realizar?
Se deben trasladar los discos del primer eje al tercero.



Consideramos la observación: un disco grande no puede ubicarse sobre un disco pequeño.

Tenemos los siguientes traslados:

	1.er eje	2.° eje	3.er eje
	A B C D		
1.°	B C D	A	
2.°	C D	A	B
3.°	C D		A B
4.°	D	C	A B
5.°	A D	C	B
6.°	A D	B C	
7.°	D	A B C	
8.°		A B C	D
9.°		B C	A D

10.°	B	C	A D
11.°	A B	C	D
12.°	A B		C D
13.°	B	A	C D
14.°		A	B C D
15.°			A B C D

Por lo tanto, se deben realizar 15 traslados, como mínimo.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

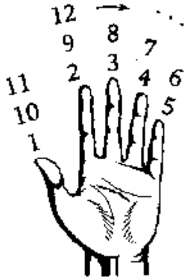
Si contamos los dedos de la mano de la siguiente manera:

¿A qué dedo corresponderá el mayor cuadrado perfecto de 4 cifras que termina en 4 ?

A) pulgar B) índice C) anular
D) meñique E) medio

Resolución

Piden: ¿a qué dedo corresponderá el mayor cuadrado perfecto de 4 cifras que termina en 4?



Analizamos la ubicación de los números:

Dedos

pulgar	índice	medio	anular	meñique
1	2	3	④	5
10	9	8	7	6
11	12	13	⑭	15
20	19	18	17	16
21	22	23	㉔	25
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

todos los números que terminan en 4 corresponden al dedo anular.

Por lo tanto, el mayor cuadrado perfecto de 4 cifras que **termina en 4**, corresponde al dedo anular.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 15

Un juego consiste en sacar bolas, de una en una y al azar, de una caja que contiene bolas rojas y blancas. Para ganar se deben sacar 2 bolas rojas consecutivas o sacar 2 bolas blancas, sin importar el orden.
¿De cuántas maneras diferentes se puede ganar dicho juego?

A) 6 B) 8 C) 4
D) 7 E) 5

Resolución

Piden: ¿de cuántas maneras diferentes se puede ganar el juego?

Dato: para ganar el juego se deben sacar 2 bolas rojas consecutivas o 2 bolas blancas sin importar el orden.
Iniciamos con las situaciones más favorables:

1.° extraer Ⓡ ; Ⓡ

2.° extraer Ⓑ ; Ⓑ

Luego, analizamos extracciones con presencia de los dos tipos de bolas, así:

3.° extraer Ⓡ ; $\underline{\text{Ⓑ}}$; $\underline{\text{Ⓑ}}$

4.° extraer Ⓡ ; Ⓑ ; $\underline{\text{Ⓡ}}$; $\underline{\text{Ⓡ}}$

5.° extraer Ⓡ ; $\underline{\text{Ⓑ}}$; Ⓡ ; $\underline{\text{Ⓑ}}$

6.° extraer Ⓑ ; $\underline{\text{Ⓡ}}$; $\underline{\text{Ⓡ}}$

7.° extraer $\underline{\text{Ⓑ}}$; Ⓡ ; $\underline{\text{Ⓑ}}$

Por lo tanto, existen 7 formas de ganar el juego.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

Rosa, su hermano, su hija y su hijo, todos ellos jugadores de tenis, están a punto de empezar un partido de dobles (juego entre parejas).

- El hermano de Rosa se enfrenta directamente, al otro lado de la red, con la hija de esta.
- Su hijo está situado diagonalmente al otro lado de la red, con respecto al peor jugador.
- El mejor jugador y el peor jugador ocupan el mismo lado de la red.

¿Quién es el mejor jugador?

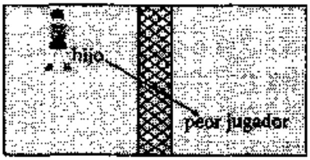
A) Rosa
B) El hermano de Rosa
C) La hija de Rosa
D) El hijo de Rosa
E) Todos juegan igual

Resolución

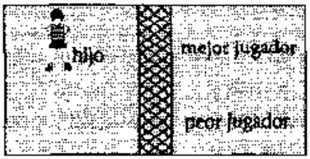
Piden: ¿quién es el mejor jugador?

Analizamos cada dato:

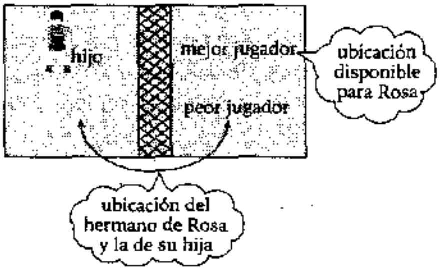
- Su hijo está situado diagonalmente al otro lado de la red, con respecto al peor jugador.



- El mejor jugador y el peor jugador ocupan el mismo lado de la red



- El hermano de Rosa se enfrenta directamente, al otro lado de la red, con la hija de esta.



Por lo tanto, el mejor jugador es Rosa.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

Durante un juego de naipes, en una de las rondas, se distribuye tres grupos de igual número de cartas. Si el primero totaliza 37 puntos; el segundo, 35; el tercero, 24; y en total hay cuatro cartas de 11 puntos, cuatro de 12 puntos y cuatro "ases" (A); entonces el último grupo tiene:
Obs.: considere al valor de la carta "A" = 1 punto.

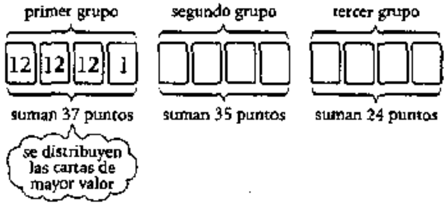
A) tres cartas del mismo valor.
B) solamente ases.
C) dos ases.
D) una carta de 12 puntos.
E) solamente una carta de 11 puntos.

Resolución

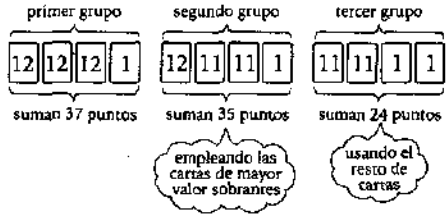
Piden: ¿qué cartas tendrá el último grupo?
Datos:

- Se cuenta con 4 cartas de 11 puntos; 4 cartas de 12 puntos y 4 cartas "ases" (1 punto).
- Se distribuye en 3 grupos de igual número de cartas.
- El primer grupo totaliza 37 puntos; el segundo, 35 y el tercero, 24.

Distribuyendo las cartas, tendríamos



Luego



Por lo tanto, el último grupo tiene 2 "ases".

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

En un campeonato de fútbol participan 8 equipos. En cada partido se disputan 2 puntos y todos juegan contra todos; además, cuando hay empate se distribuyen los dos puntos en disputa. ¿Cuál fue el máximo número de partidos empatados, si el campeón absoluto resultó con 8 puntos?

A) 21 B) 29 C) 20
D) 27 E) 30

Resolución

Piden: ¿cuál fue el máximo número de partidos empatados si el campeón absoluto resultó con 8 puntos?

Datos:

- Cada partido ganado otorga 2 puntos.
- Cada partido empatado otorga 1 punto.
- El campeonato se desarrolla con 8 equipos, todos contra todos.

Analizando los 8 equipos y sus 7 partidos cada uno, el número total de partidos es $\frac{8\times7}{2}=28$

Luego, el campeón en sus 7 partidos obtuvo 8 puntos, ya que se quiere maximizar la cantidad de empates, estos 8 puntos los pudo obtener con 6 partidos empatados (6 puntos) y un partido ganado (2 puntos).

Para mantener la máxima cantidad de empates consideremos que todos los demás partidos quedaron empatados.

Por lo tanto, la mayor cantidad de partidos empatados son 27.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

Una arañita sube durante el día 5 metros de una torre y resbala durante las noches 3 metros. ¿Cuántos días demora en llegar a la cúspide, si la torre tiene 145 metros de altura, y cuántos metros ascendió en total?

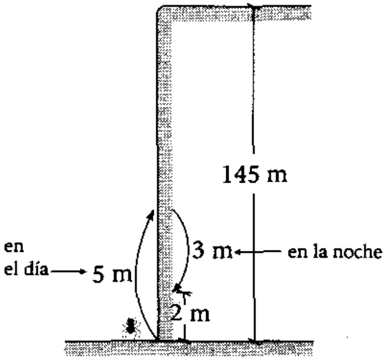
A) 73 - 355
B) 72 - 355
C) 71 - 355
D) 70 - 356
E) 75 - 356

Resolución

Piden: ¿cuántos días demorará la araña en llegar a la cúspide de una torre de 145 metros de altura y cuántos metros ascendió en total?

Dato: una araña sube 5 metros durante el día y resbala 3 metros durante la noche.

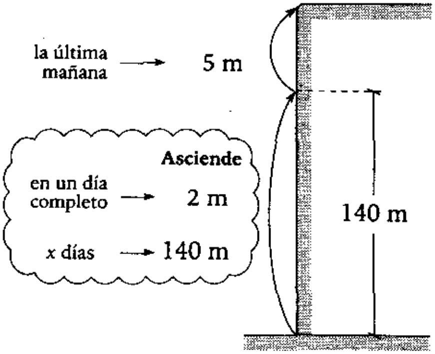
Graficamos



Por cada día completo (día y noche), la hormiga asciende en total 2 m.

Pero se debe considerar que la hormiga llegará a la cúspide una mañana, previo a resbalarse.

Ya que los últimos 5 metros son realizados en la última mañana, solo consideremos el recorrido de los 140 metros iniciales.



Desarrollando $x=70$

En total, la hormiga recorre 70 días más una mañana para llegar a la cúspide, es decir, 71 días.

Por cada día asciende 5 metros (sin contar los metros que resbala), entonces en los 71 días ascendió en total: $71\times5=355$ m

Por lo tanto, la hormiga demorará 71 días en llegar a la cúspide y ascendió 355 metros en total.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

Si de cada 10 mujeres, 5 son solteras, ¿cuántas casadas habrán de 100 que no sean casadas?

A) 200
B) 50
C) 150
D) 100
E) 75

Resolución

Piden: ¿cuántas mujeres casadas habrán de 100 que no sean casadas?

Dato: de cada 10 mujeres, 5 son solteras.

total de mujeres

	casadas	solteras
10	5	5
	x	100

100 que no son casadas

Se observa que, según el problema, la cantidad de mujeres casadas siempre es igual a la cantidad de mujeres solteras ($x=100$).

Por lo tanto, la cantidad de mujeres casadas será 100.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

Yéssica decía a menudo: *El hombre con quien me he de casar ha de ser alto, simpático, más o menos corpulento, extranjero, que use lentes y que sea un poco cojo.*
Tuvo varios amigos:
Andrés es alto, oscuro, extranjero, usa lentes, pero no es cojo.
Pedro no es muy bajo de estatura, usa lentes, cojea un poco, no es oscuro, es extranjero, pero no es flaco.
David cojea un poco, tiene piel clara, es poco robusto, usa lentes y es ruso.
¿Con cuál de los tres se casaría Yéssica, si fuese su única oportunidad?

A) Andrés
B) Pedro
C) David
D) Ninguno
E) Pablo

Resolución

Piden: ¿con cuál de sus 3 amigos se casaría Yéssica si fuese su única oportunidad?

Dato: el hombre con quien se ha de casar ha de ser alto, simpático, más o menos corpulento, extranjero, que use lentes y que sea un poco cojo.

Ubicando la información de cada uno de sus amigos en una tabla, se tiene:

	Andrés	Pedro	David
Altura	alto	no muy bajo	
Belleza			
Físico		no es flaco	un poco robusto
Nacionalidad	extranjero	extranjero	extranjero
Lentes	usa lentes	usa lentes	usa lentes
Cojo	no es cojo	cojea un poco	cojea un poco

Analizando los requerimientos de Yéssica, Pedro es el que presenta mayores coincidencias.

Por lo tanto, si Yéssica tuviera que casarse con uno de sus amigos, este tendría que ser Pedro.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

Una persona produce, mientras duerme, 680 calorías. ¿Cuántas calorías producirá si duerme desde las 9:30 p.m. hasta las 9:30 a.m.?

A) 700 B) 710 C) 680
D) 720 E) 690

Resolución

Piden: ¿cuántas calorías producirá una persona si duerme desde las 9:30 p.m. hasta las 9:30 a.m.?

Dato: una persona produce mientras duerme 680 calorías.
Si analizamos el dato, notaremos que las 680 calorías se producen al dormir sin importar el tiempo en que esta actividad se realice.
Por lo tanto, la calorías producidas por una persona al dormir desde las 9:30 p.m. hasta las 9:30 a.m. son 680.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 23

Cierta clase de microbio tiene la propiedad de duplicarse en cada minuto. Si hay un recipiente y lo llena por la mitad a los 28 minutos, ¿en cuánto tiempo se llenará el recipiente?

A) 56 B) 50 C) 29
D) 30 E) 52

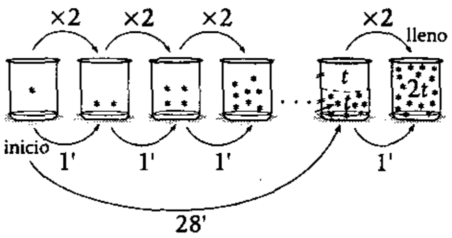
Resolución

Piden: ¿en cuánto tiempo se llenará el recipiente?

Datos:

- Cierta clase de microbio se duplica cada minuto.
- Llena la mitad de un recipiente en 28 minutos.

Graficamos y analizamos los datos:



Observamos que para completar el recipiente, solo es necesario un minuto adicional.

Por lo tanto, el tiempo total para que se llene el recipiente de bacterias es 29 minutos.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

En un colegio enseñan abogados y profesores; varios abogados son profesores y varios profesores son abogados. Si cinco profesores no son abogados y cinco abogados no son profesores, pero trabajan con cuatro profesores, ¿cuántos abogados-profesores hay?

A) 5
B) 4
C) 15
D) 10
E) 14

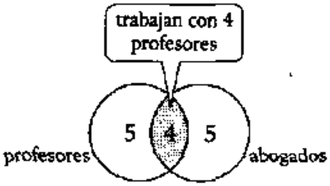
Resolución

Piden determinar el número de abogados-profesores.

Se sabe que 5 profesores no son abogados

y 5 abogados no son profesores

pero, trabajan con 4 profesores.

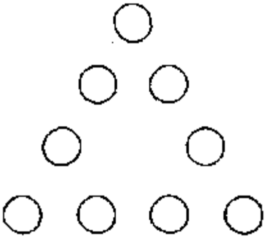


Por lo tanto, el número de abogados-profesores es 4.

Clave B

PROBLEMA N.° 25

Distribuya los números del 1 al 9 en los círculos del triángulo de tal manera que los números ubicados en cada lado sume 20.
Dé como respuesta el menor producto de los números que ocupan los vértices.



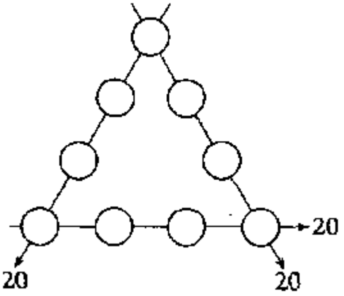
A) 80 B) 45 C) 38
D) 76 E) 120

Resolución

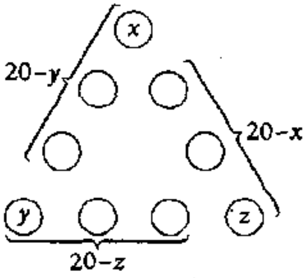
Piden dar como respuesta el menor producto de los números que se ubican en los vértices.

Datos:

- Se ubican los números del 1 al 9.
- Los números ubicados en cada lado del triángulo suman 20.



Distribuyendo las variables x, y y z, tenemos



Si consideramos los nueve números ya distribuidos (1; 2; 3; 4; ... ; 9), se plantea:

$$1+2+3+...+9=(20-x)+(20-y)+(20-z)$$

$$45=60-x-y-z$$

$$\rightarrow\ x+y+z=15$$

Como se nos pide que los números ubicados en los vértices generen un producto mínimo, asignemos a uno de los factores la unidad, entonces

$$\underset{1}{x}+\underbrace{y+z}_{14}=15$$

Para el producto mínimo

$y=9$ y

$z=5$

Por lo tanto, el producto mínimo es

$$1\times9\times5=45$$

Clave B

EJERCICIOS CON CERILLAS

PROBLEMA N.° 26

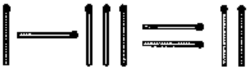
En el siguiente gráfico, ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben cambiar de lugar para obtener una igualdad correcta?

A) 1　　B) 2　　C) 3

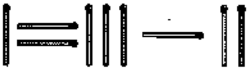
D) 4　　E) 5

Resolución

Piden: ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben cambiar de lugar?



Asociamos la distribución de los cerillos a la sustracción

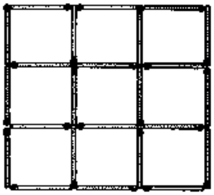


Por lo tanto, solo debe cambiarse de lugar un cerillo.

Clave A

PROBLEMA N.° 27

¿Cuántos palitos deben retirarse, como mínimo, para obtener una figura formada por 5 cuadraditos iguales?

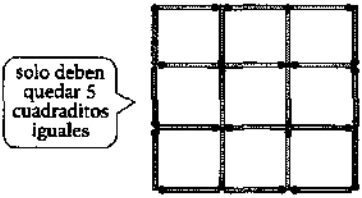


A) 8　　B) 7　　C) 6

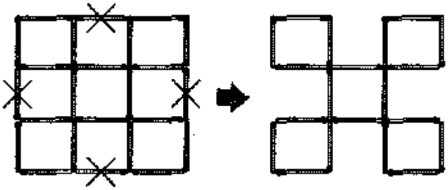
D) 5　　E) 4

Resolución

Piden: ¿cuántos palitos deben retirarse como mínimo?



Formamos una distribución simétrica



Por lo tanto, solo es necesario retirar cuatro palitos.

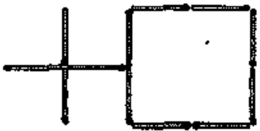
Clave E

PROBLEMA N.° 28

Cambie la posición de x cerillas, de tal modo que resulten tres cuadrados, sin dejar cabos sueltos.

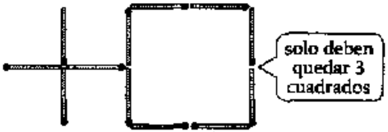
Obs.: x es la menor cantidad de cerillas.

A) 9
B) 7
C) 5
D) 3
E) 1

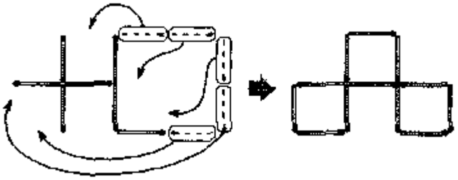


Resolución

Piden: ¿cuál es la menor cantidad de cerillos que se deben cambiar de posición?



Se observa que con los 4 cerillos sobrantes no se podría formar 2 cuadrados más, entonces formaremos 3 cuadrados de un cerillo por lado.

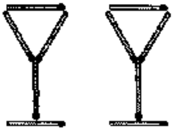


Por lo tanto, solo es necesario mover cinco cerillos.

Clave C

PROBLEMA N.° 29

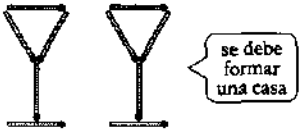
Se tienen "2 copas". Se pide cambiar de posición x cerillas para que resulte "una casa". Calcule x.
Obs.: x es la menor cantidad de cerillas.



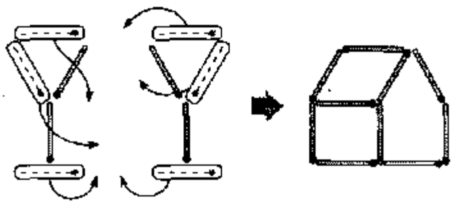
A) 4　B) 5　C) 3
D) 6　E) 7

Resolución

Piden: ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben cambiar de posición?



Realizamos los siguientes traslados:

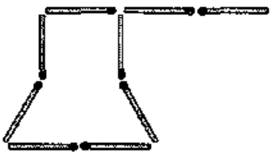


Por lo tanto, solo es necesario cambiar de posición seis cerillos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

Mueva x cerillas y transforme "el hacha" en tres triángulos iguales. Calcule x.
Obs.: x es la menor cantidad de cerillas.

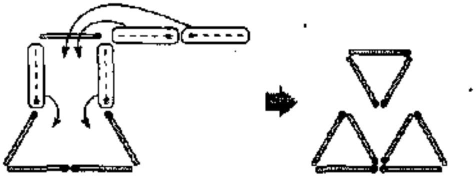


A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Piden: ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben mover?

Manteniendo los cerillos de la base, solo son necesarios los siguientes traslados:



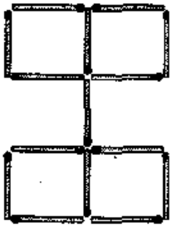
Por lo tanto, solo es necesario trasladar cuatro cerillos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

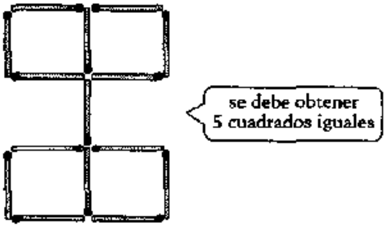
Mueva x cerillas para obtener 5 cuadrados iguales. Calcule x.
Obs.: x es la menor cantidad de cerillas.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

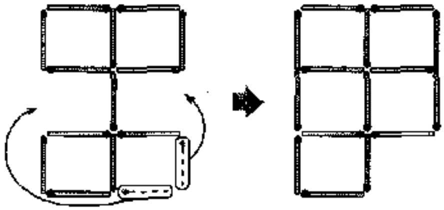


Resolución

Piden: ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben mover?



Tener en cuenta que solo nos piden garantizar la existencia de **5** cuadrados iguales, sin importar si es que resultan otros tipos de figuras. Se observa que por la cantidad de cerillos es imposible que estos **5** cuadrados iguales tengan más de un cerillo por lado, por lo tanto, considerando cuadrados simples tenemos:



Por lo tanto, solo es necesario mover 2 cerillos.

Clave [illegible]

PROBLEMAS SOBRE PARENTESCO

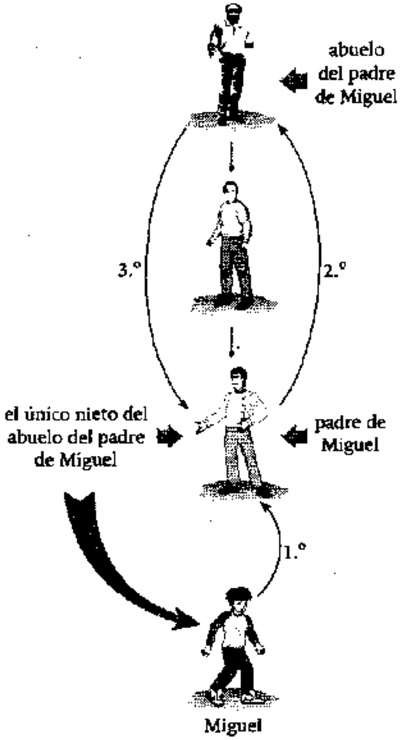
PROBLEMA N.° 32

¿Qué representa para Miguel el único nieto del abuelo del padre de Miguel?

A) Él mismo
B) El nieto
C) Su hijo
D) Su papá
E) Su abuelo

Resolución

Piden: ¿qué representa para Miguel el único nieto del abuelo del padre de Miguel?
Analizamos a partir de la parte final del texto.



Por lo tanto, el único nieto del abuelo del padre de Miguel es su papá.

Clave D

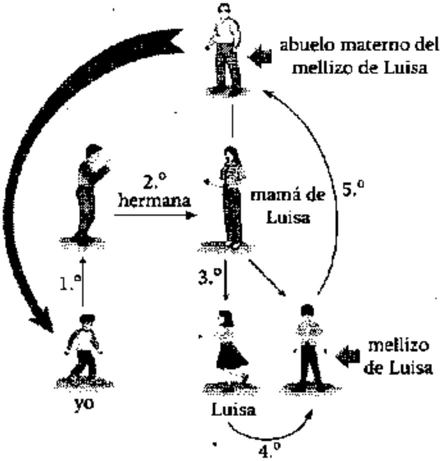
PROBLEMA N.° 33

La mamá de Luisa es la hermana de mi padre. ¿Qué representa para mí el abuelo materno del mellizo de Luisa?

A) mi hermano
B) mi sobrino
C) mi tío
D) mi abuelo
E) mi hijo

Resolución

Piden: ¿qué representa para mí el abuelo materno del mellizo de Luisa?
Dato: la mamá de Luisa es la hermana de mi padre.
Del enunciado, tenemos:



Por lo tanto, el abuelo materno del mellizo de Luisa es mi abuelo.

Clave D

PROBLEMA N.° 34

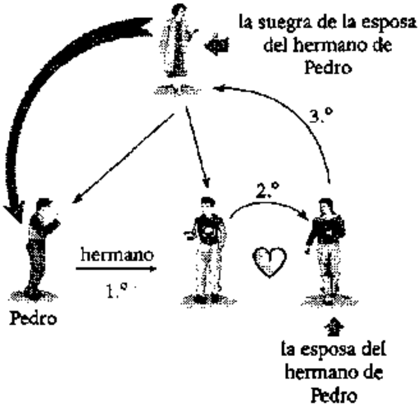
Pedro se jactaba de tratar muy bien a la suegra de la esposa de su hermano. ¿Por qué?

A) es su hermana
B) es su hija
C) es su tía
D) es su mamá
E) es su abuela

Resolución

Piden: ¿quién es la suegra de la esposa del hermano de Pedro?

Del enunciado



Por lo tanto, la suegra de la esposa del hermano de Pedro es su mamá.

Clave D

PROBLEMA N.° 35

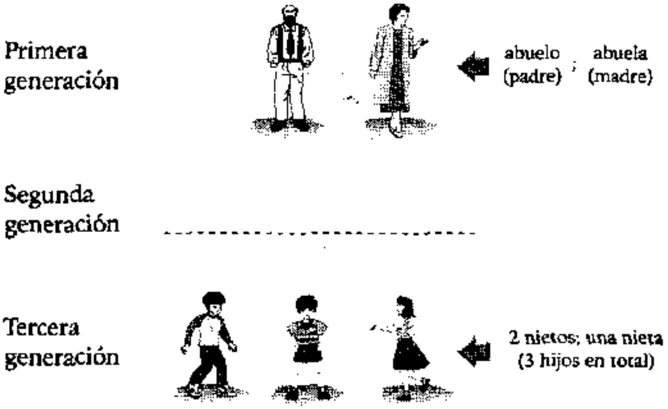
Una familia consta de dos padres, dos madres, cuatro hijos en total, dos hermanos, una hermana, un abuelo, una abuela, dos nietos, una nieta, dos parejas de esposos y una nuera.
¿Cuántas personas, como mínimo, conforman dicha familia?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

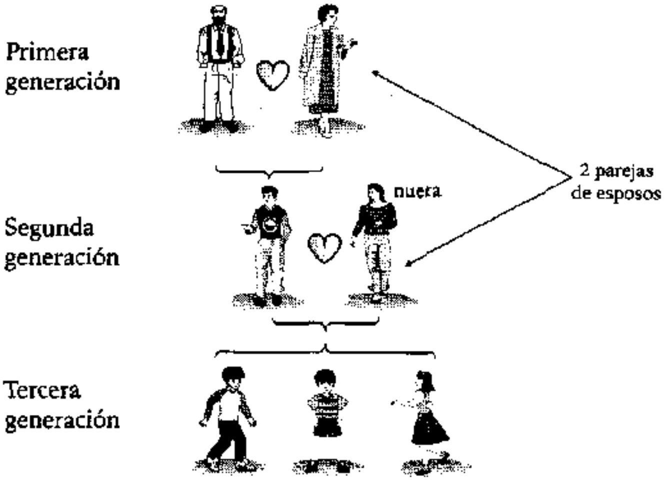
Resolución

Piden: ¿cuántas personas, como mínimo, conforman dicha familia?
Dato: la familia está conformada por 2 padres, 2 madres, 4 hijos en total, 2 hermanos, una hermana, un abuelo, una abuela, 2 nietos, una nieta, 2 parejas de esposos y una nuera.

Analizamos la información brindada. Se observa la necesidad de que en dicha familia se presenten 3 generaciones (abuelos → nietos), entonces:



Además, falta un padre y una madre más, al igual que las parejas de esposos, entonces



Por lo tanto, la cantidad mínima de personas que conforman dicha familia es 7.

Clave

PROBLEMA N.° 36

Los parentescos son curiosos –observó Andrés– *Jaime tiene el mismo parentesco contigo que el que yo tengo con tu hijo. Así es* –respondió Carlos–, *y tú tienes el mismo parentesco conmigo que Jaime contigo.*

¿Cuál es el parentesco entre Carlos y Jaime?

A) padre - hijo
B) tío - sobrino
C) son hermanos
D) nieto - abuelo
E) son primos

Resolución

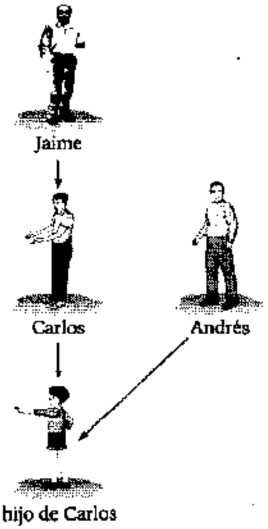
Piden: ¿cuál es el parentesco entre Carlos y Jaime?

Datos:

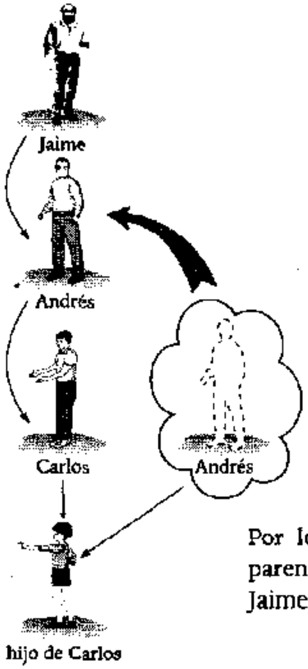
- La relación de parentesco entre Jaime y Carlos es igual a la relación de parentesco entre Andrés y el hijo de Carlos.
- La relación de parentesco entre Andrés y Carlos es igual a la relación de parentesco entre Jaime y Andrés.

Analizamos el primer dato y observamos que una de las relaciones se establece con respecto al hijo de Carlos; por ende, la relación de parentesco es vertical (de abuelos y padres a hijos y nietos), así:

Del primer dato



Del segundo dato



Por lo tanto, la relación de parentesco entre Carlos y Jaime es de nieto a abuelo.

Clave D

PROBLEMA N.° 37

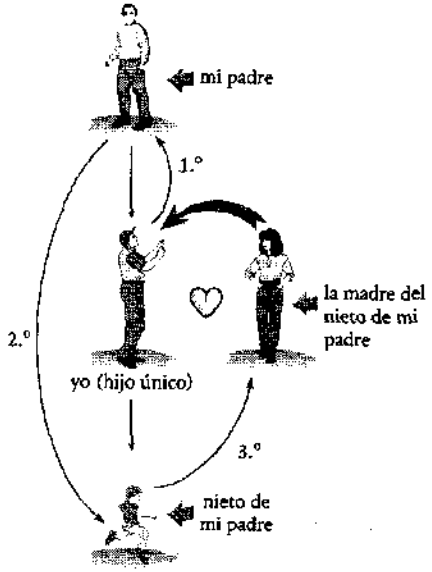
¿Qué parentesco tengo con la madre del nieto de mi padre, si soy hijo único?

A) soy su hijo
B) soy su hermano
C) soy su esposo
D) soy su sobrino
E) soy su nieto

Resolución

Piden: ¿qué parentesco tengo con la madre del nieto de mi padre, si soy hijo único?

Entonces



Por lo tanto, la madre del nieto de mi padre es mi esposa; es decir, soy su esposo.

Clave C

PROBLEMA N.° 38

Los esposos Ramírez tienen 4 hijos varones. Cada hijo tiene una hermana y cada hermano tiene 3 sobrinos. ¿Cuál es el número mínimo de personas que conforman esta familia?

A) 9	B) 8	C) 10
D) 11		E) 12

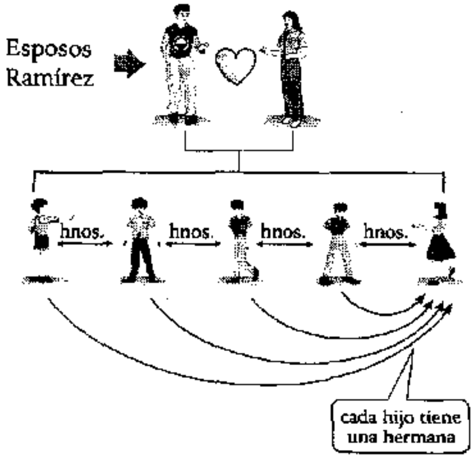
Resolución

Piden el número mínimo de personas que conforman la familia Ramírez.

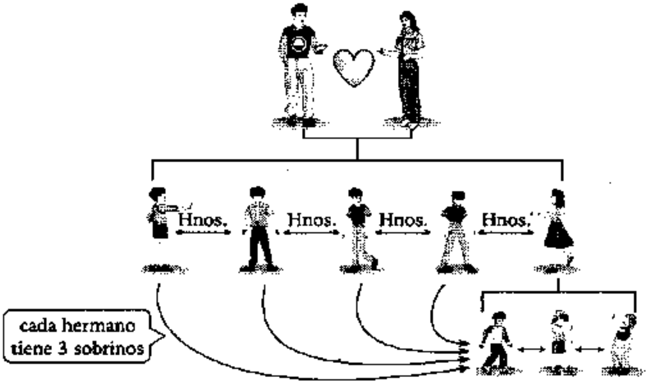
Datos:

- Los esposos Ramírez tienen 4 hijos varones.
- Cada hijo tiene una hermana.
- Cada hermano tiene 3 sobrinos.

De los 2 primeros datos, es suficiente que la familia esté conformada por 4 hijos varones y una hija, así:



Del último dato; cada hermano (no se menciona hermana) debe tener 3 sobrinos, convenientemente estos deben ser sobrinos en común con respecto a la hermana.



Por lo tanto, el número mínimo de personas que conforman dicha familia es 10.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Una familia está compuesta por 4 hermanos en total, 4 tíos en total, 2 padres, 2 madres, 2 sobrinos, 2 sobrinas, 2 primos y 2 primas. ¿Cuál es el mínimo número de personas que la conforman?

A) 8 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

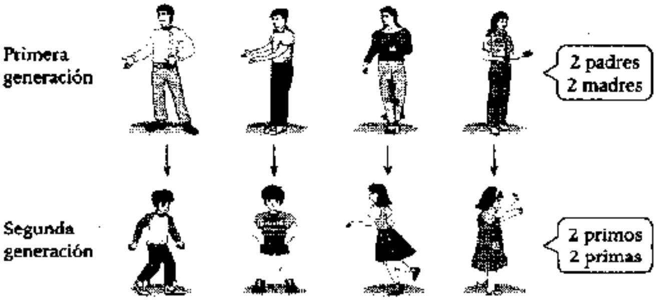
Resolución

Piden: ¿cuál es el mínimo número de personas que conforman la familia?

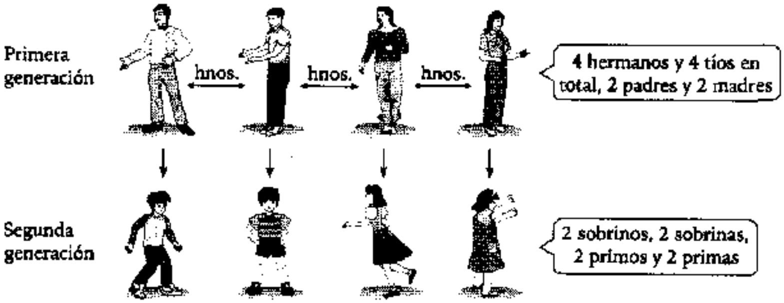
Dato: La familia está conformada por 4 hermanos y 4 tíos en total, 2 padres, 2 madres, 2 sobrinos, 2 sobrinas, 2 primos y 2 primas.

Consideremos que en esta familia no hay abuelos ni nietos; es suficiente asignarle dos generaciones.

De esta manera:



Además, debe haber 4 tíos en total, que podrían ser los mismos padres para minimizar la cantidad de integrantes de la familia, así



Por lo tanto, el mínimo número de personas que conforman esta familia es 8.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 40

El hermano de Carla tiene un hermano más que hermanas. ¿Cuántos hermanos más que hermanas tiene Carla?

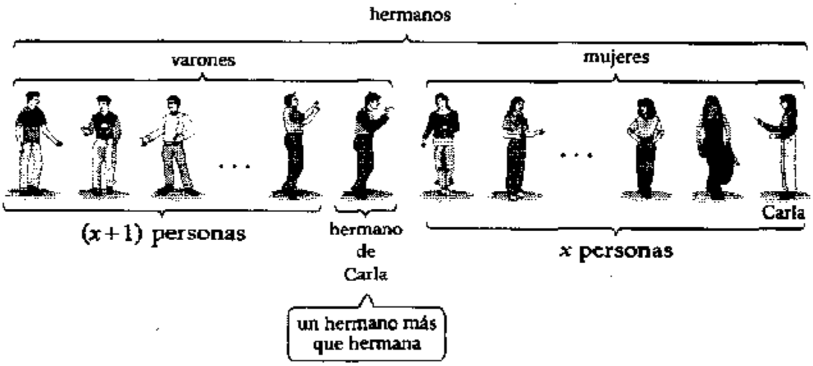
A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 7

Resolución

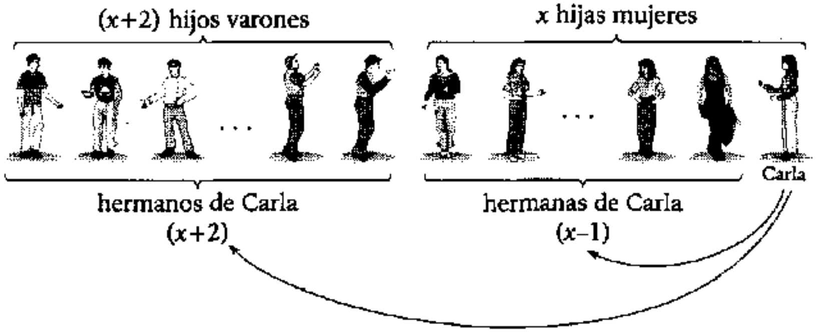
Piden: ¿cuántos hermanos más que hermanas tiene Carla?

Dato: El hermano de Carla tiene un hermano más que hermanas.

Analizamos el gráfico.



Analizando los hermanos con respecto a Carla:



Por lo tanto, Carla tiene 3 hermanos más que hermanas.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 41

¿Cuántas personas como mínimo forman una familia que consta de un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, dos sobrinos, un tío, una tía, una nieta, dos nietos, una nuera, una suegra y un suegro?

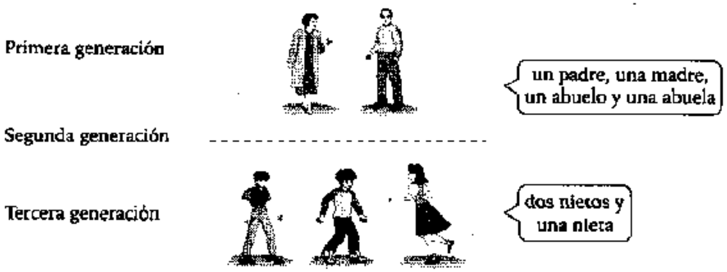
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Resolución

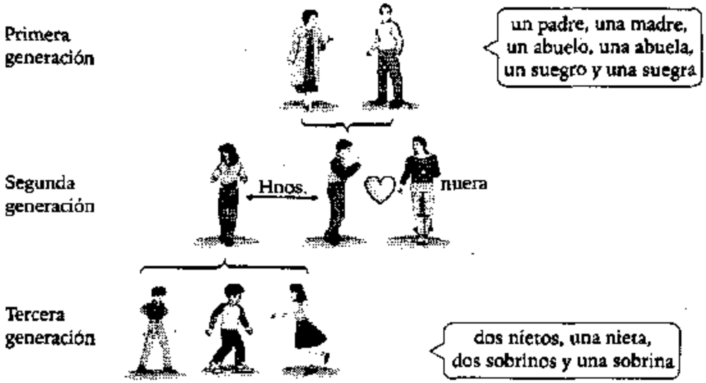
Piden: ¿cuántas personas, como mínimo, forman una familia?

Dato: La familia está conformada por un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, dos sobrinos, un tío, una tía, una nieta, dos nietos, una nuera, una suegra y un suegro.

Analizando el dato, es necesario considerar 3 generaciones para garantizar los parentescos abuelo, abuela, nieto y nieta, así:



Además, falta ubicar un padre, una madre, un tío y una tía, lo cuál se podría garantizar en la segunda generación, así



Por lo tanto, la cantidad mínima de personas que conforman dicha familia es 8.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 42

En una reunión se encuentran dos padres, dos hijos y un nieto. ¿Cuántas personas, como mínimo, se encuentran en dicha reunión?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución

Piden ¿cuántas personas, como mínimo, se encuentran en una reunión?
Dato: A la reunión asistieron dos padres, dos hijos y un nieto.
Por la información de la relación de parentesco abuelo - nieto, se planteará 3 generaciones, así

Por lo tanto, en dicha reunión se encuentran presentes, como mínimo, 3 personas.

Clave **C**

PROBLEMA N.º 43

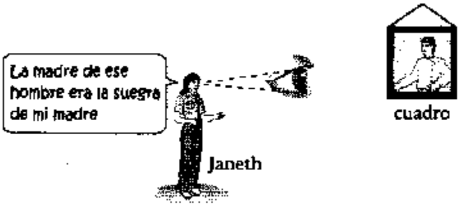
La señorita Janeth, al mirar el retrato de un hombre, le dijo a su padre (es hijo único): *La madre de ese hombre era la suegra de mi madre*. ¿Qué parentesco hay entre la señorita Janeth y el hombre del cuadro?

A) sobrina - tío
B) hija - padre
C) prima - primo
D) nieta - abuelo
E) suegra - yerno

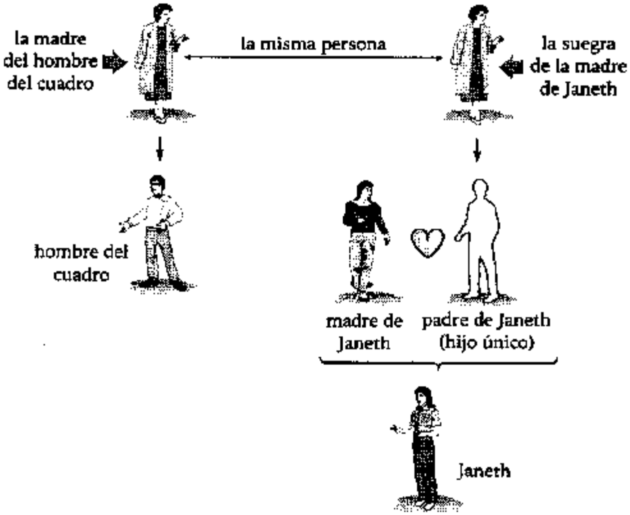
Resolución

Piden: ¿qué parentesco hay entre la señorita Janeth y el hombre del cuadro?

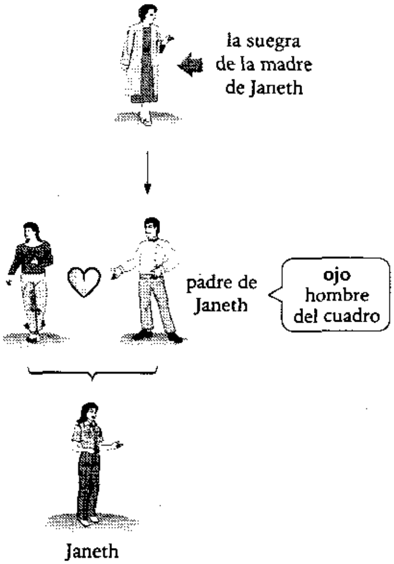
Se sabe que



Establecemos el árbol genealógico:



Unimos ambas gráficas, con respecto a la persona en común.



Por lo tanto, el hombre del cuadro es el padre de Janeth. (hija - padre).

Clave **B**

PROBLEMA N.° 44

El parentesco que existe entre el tío del hijo del tío de Alejandro y el hijo del tío de Alejandro, es
Obs.: Alejandro tiene un solo tío

A) tío - sobrino
B) son primos
C) nieto - abuelo
D) padre - hijo
E) son hermanos

Resolución

Piden: ¿qué parentesco existe entre el tío del hijo del tío de Alejandro y el hijo del tío de Alejandro?

Dato: Alejandro tiene un solo tío.
Analizamos el enunciado planteado y la relación de parentesco entre los dos miembros de la familia:

- Primera persona
  El tío del *hijo del tío de Alejandro.*
- Segunda persona
  El hijo del tío de Alejandro.

Se observa que la relación de parentesco entre las dos personas es de tío a sobrino.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 45

Si John es nieto del papá de Jaime y no es hijo de Jaime, ¿qué parentesco existe entre Jaime y John?

A) tío - sobrino
B) abuelo - nieto
C) padre - hijo
D) suegro - yerno
E) primo - primo

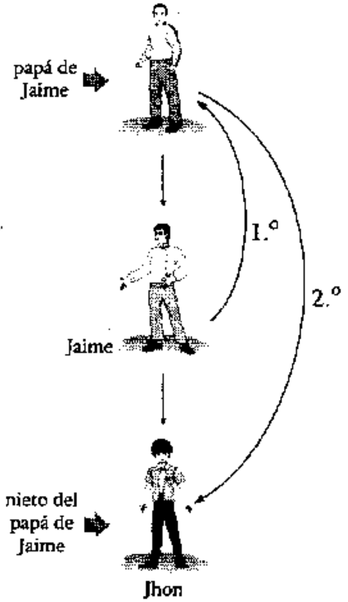
Resolución

Piden: ¿qué parentesco existe entre Jaime y John?

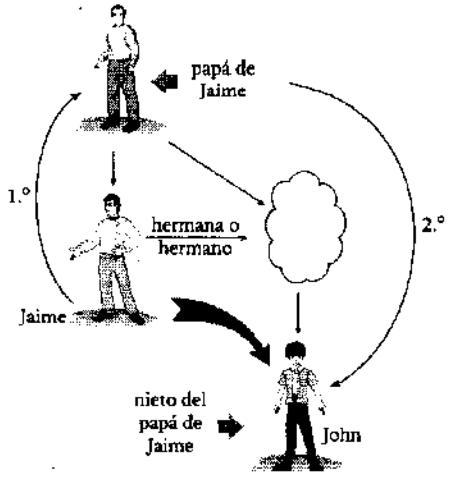
Dato: John es nieto del papá de Jaime y no es hijo de Jaime.

Con la información inicial: *John es nieto del papá de Jaime* se presentan 2 posibilidades.

Primera posibilidad



Segunda posibilidad



Por el dato adicional: *John no es hijo de Jaime,* se descarta la primera posibilidad.

Por lo tanto, el parentesco que existe entre Jaime y John es tío-sobrino.

Clave A

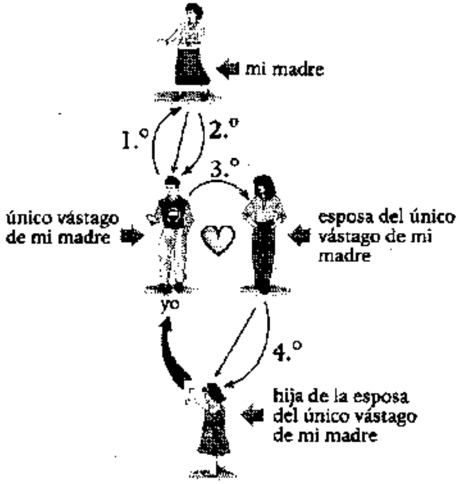
PROBLEMA N.° 46

¿Qué parentesco tiene conmigo una mujer que es la hija de la esposa del único vástago de mi madre?

A) madre B) hija C) suegra
D) sobrina E) nieta

Resolución

Piden: ¿qué parentesco tiene conmigo una mujer que es la hija de la esposa del único vástago de mi madre?
Del enunciado, tenemos



Por lo tanto, la hija de la esposa del único vástago de mi madre es mi hija.

Clave B

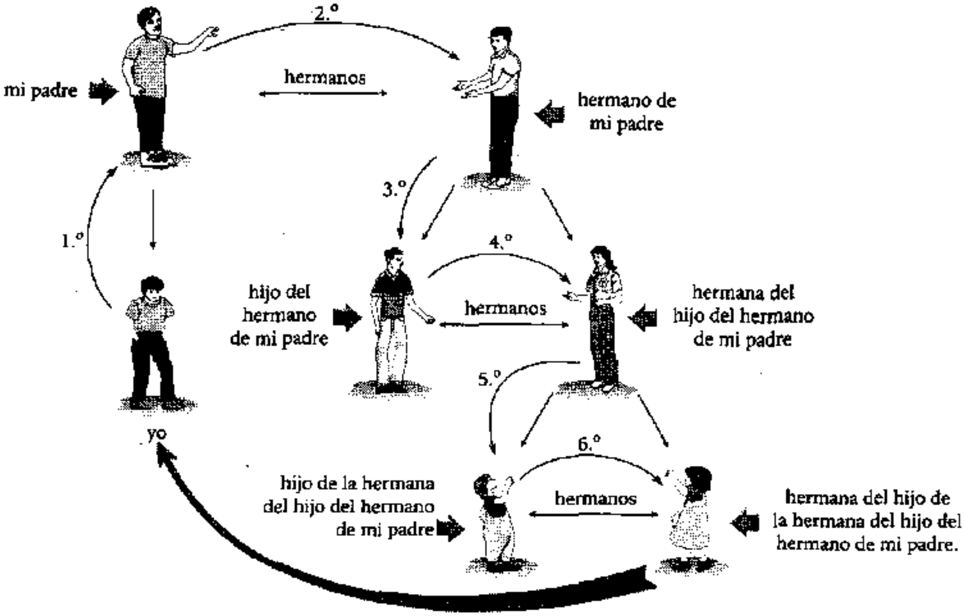
PROBLEMA N.° 47

La hermana del hijo de la hermana del hijo del hermano de mi padre es mi

A) hija B) madre C) nieta D) sobrina E) prima

Resolución

Piden: ¿quién es la hermana del hijo de la hermana del hijo del hermano de mi padre?



Por lo tanto, la hermana del hijo de la hermana del hijo del hermano de mi padre es mi sobrina.

Clave **D**

PROBLEMAS SOBRE RELACIÓN DE TIEMPO

PROBLEMA N.° 48

Si hoy es domingo, ¿qué día será el ayer del pasado mañana de hace dos días?

A) jueves B) viernes C) sábado D) domingo E) martes

Resolución

Piden: ¿qué día será el ayer del pasado mañana de hace 2 días?

Dato:
Hoy es domingo.

Consideremos las equivalencias numéricas:

$$\text{El } \underbrace{\text{ayer}}_{-1} \text{ del } \underbrace{\text{pasado mañana}}_{+\cancel{2}} \text{ de } \underbrace{\text{hace 2 días}}_{-\cancel{2}}.$$

De lo que se concluye que:

$-1 <> \text{ayer} <> \text{sábado}$

Por lo tanto, el día pedido en el problema es el sábado.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 49

Si el anteayer de mañana es lunes, ¿qué día de la semana será el mañana de anteayer?

A) lunes
B) martes
C) domingo
D) sábado
E) martes

Resolución

Piden: ¿qué día será el mañana de anteayer?

Dato:

$$\underbrace{\text{anteayer de mañana}}_{\text{ayer}} \quad \begin{matrix}\text{es} & \text{lunes}\\ \text{fue} & \text{lunes}\end{matrix}$$

Se observa que también el mañana del anteayer es equivalente a ayer.

Por lo tanto, el mañana de anteayer fue lunes.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 50

Si el día de mañana fuese como pasado mañana, entonces faltarían 2 días a partir de hoy para ser domingo, ¿qué día de la semana será el mañana del ayer de hoy?

A) sábado
B) viernes
C) domingo
D) jueves
E) miércoles

Resolución

Piden: ¿qué día será el mañana del ayer?
Dato: si el día de mañana fuese como pasado mañana, faltarían 2 días para ser domingo.
Representamos el dato gráficamente:

Tiempo real	Tiempo supuesto
mañana	pasado mañana
hoy ?	hoy viernes

De la comparación se concluye que hoy realmente es jueves.
Además, lo pedido es el mañana del ayer que equivale a hoy.

Por lo tanto, el mañana del ayer es jueves.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 51

Se sabe que mi cumpleaños es el 27 de este mes y el mes pasado tuvo más días viernes, sábados y domingos; además, la fecha del penúltimo viernes del mes pasado sumado a la fecha del último viernes del mes que viene es 46. Determine qué día de la semana caerá mi cumpleaños dentro de tres años. (Año actual 1991)

A) viernes B) sábado C) miércoles D) jueves E) lunes

Resolución

Piden: ¿qué día caerá mi cumpleaños dentro de 3 años (1994)?
Dato: mi cumpleaños es el 27 de este mes y el mes anterior tuvo más días viernes, sábados y domingos.
Analizamos la construcción del mes anterior:

mes anterior

D	L	M	M	J	V	S

todos los meses tienen al menos 4 semanas <> 28 días

Como debe tener más días viernes, sábados y domingos, se le aumentará un día en cada caso para completar los 31 días del mes, así:

mes anterior

D	L	M	M	J	V	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

el mes presenta:
- 4 lunes, martes, miércoles y jueves
- 5 viernes, sábados y domingos

Analizamos ahora el mes actual.

mes anterior

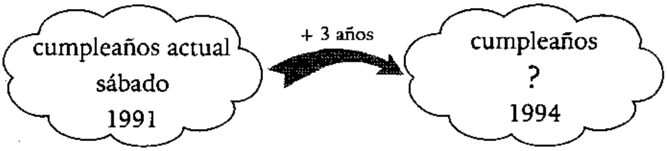
D	L	M	M	J	V	S
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

mes actual

D	L	M	M	J	V	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	...				

mi cumpleaños

Al transcurrir 3 años se tiene



Transcurren tres años, uno de ellos bisiesto (1992), entonces el número de días a considerar como transcurridos es: $3+\underbrace{1}_{\text{bisiesto}}=4$

Por lo tanto, mi cumpleaños en el año 1994 será sábado+4 días <> miércoles.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 52

Hace 2 días se cumplía que el anteayer del ayer de mañana era martes. ¿Qué día de la semana será, cuando a partir de hoy transcurran tantos días como los días que pasan desde el ayer de anteayer hasta el día de hoy?

A) sábado B) lunes C) martes D) jueves E) domingo

Resolución

Piden: ¿qué día será cuando a partir de hoy transcurran tantos días como los días que pasan desde el ayer de anteayer hasta el día de hoy?

Dato: hace 2 días se cumplía que el anteayer del ayer de mañana era martes.

Del dato, analizamos numéricamente:

$$\underbrace{\text{Hace 2 días}}_{-2}\text{ se cumplía que el }\underbrace{\text{anteayer}}_{-2}\text{ del }\underbrace{\text{ayer}}_{\cancel{-1}}\text{ de }\underbrace{\text{mañana}}_{\cancel{+1}}\text{ era martes.}$$

$-2-2 <>$ martes $\rightarrow$ hoy es sábado

Ahora, con respecto a lo pedido; desde el ayer del anteayer ($-1-2 <> -3$) transcurren 3 días hasta el día del hoy.

Por lo tanto, el día pedido se dará al transcurrir, a partir de hoy (sábado), 3 días; es decir, martes.

Clave **C**

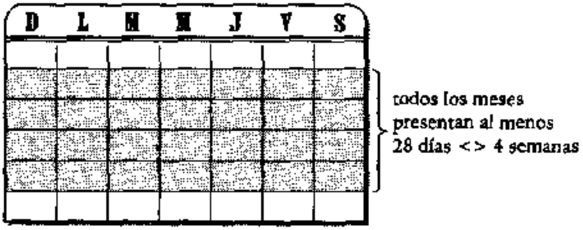
PROBLEMA N.° 53

En un determinado mes existen 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles, se pide hallar qué día de la semana cae 25 y cuántos días trae dicho mes.

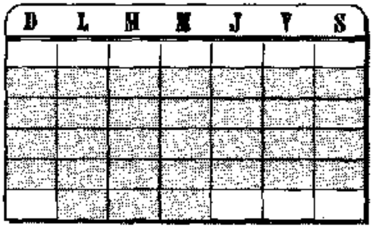
A) martes, 30 B) sábado, 31 C) miércoles, 31 D) jueves, 30 E) jueves, 31

Resolución

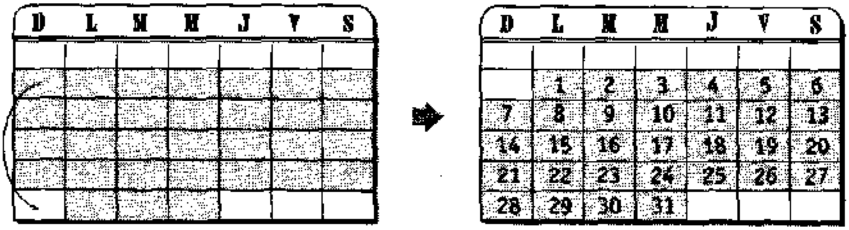
Piden: ¿qué día de la semana cae 25 y cuántos días trae dicho mes?
Dato: el mes tiene 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles.
Analizando la composición del mes, se tiene:



En este caso, faltaría aumentar un día lunes, un martes y un miércoles, así



Ahora, como los días de un mes deben ser consecutivos, trasladaremos el día domingo de la primera semana a la última, así



D	L	M	M	J	V	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Por lo tanto, el 25 de este mes es jueves y el mes tiene 31 días.

Clave E

PROBLEMA N.° 54

En un año bisiesto, ¿cuántos días lunes y martes habrá como máximo y en qué día debe terminar dicho año?

A) 51, lunes
B) 52, martes
C) 53, martes
D) 60, domingo
E) 61, lunes

Resolución

Piden: en un año bisiesto, ¿cuántos lunes y martes habrá como máximo y en qué día terminará dicho año?

> **Recuerda**
>
> Un año bisiesto presenta 366 días, que equivale a 52 semanas más 2 días.
> En estas 52 semanas contamos con 52 domingos, 52 lunes, 52 martes, ..., 52 sábados.
> Adicionalmente, a ello se le debe aumentar 2 días de la semana, pero consecutivos.

Convenientemente, ya que se desea que el año presente la mayor cantidad de lunes y martes, se aumentará un día lunes y un martes. (53 lunes y 53 martes).
Concluyendo el año en el último día aumentado: martes.

Por lo tanto, en un año como máximo habrá 53 lunes y martes, y dicho año terminará martes.

Clave C

PROBLEMA N.° 55

Si ayer del anteayer de mañana es lunes, ¿qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

A) lunes
B) sábado
C) miércoles
D) jueves
E) domingo

Resolución

Piden: ¿qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

Dato: si el ayer del anteayer de mañana es lunes.

Del dato

$$\text{El } \underbrace{\text{ayer}}_{\cancel{-1}} \text{ del } \underbrace{\text{anteayer}}_{-2} \text{ de } \underbrace{\text{mañana}}_{\cancel{+1}} \text{ es lunes}$$

$-2=\text{lunes} \rightarrow \text{hoy}=\text{lunes}+2$

hoy es miércoles.

De lo que piden

$$\text{El } \underbrace{\text{pasado mañana}}_{\cancel{+2}} \text{ del } \underbrace{\text{mañana}}_{+1} \text{ de } \underbrace{\text{anteayer}}_{\cancel{-2}}$$

Piden $+1 <> \text{mañana} <> \text{jueves}$

Por lo tanto, el pasado mañana del mañana de anteayer será jueves.

Clave D

PROBLEMA N.° 56

Si anteayer Jaimito cumplió otro año y el próximo año cumplirá 4 años, entonces, ¿en qué fecha nació Jaimito?

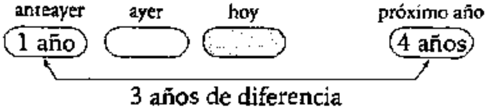
A) 2 de enero
B) 1 de enero
C) 29 de diciembre
D) 30 de diciembre
E) 31 de diciembre

Resolución

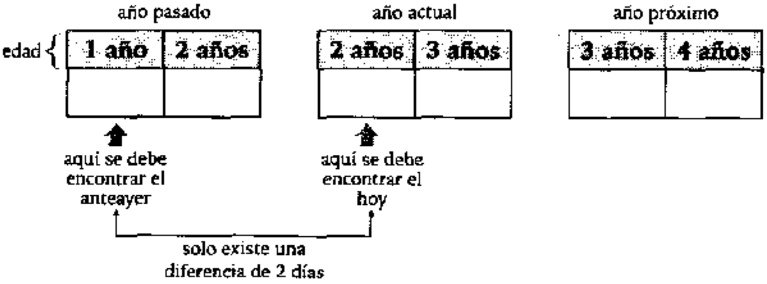
Piden: ¿en qué fecha nació Jaimito?

Dato: anteayer Jaimito tuvo un año y el próximo año cumplirá 4 años.

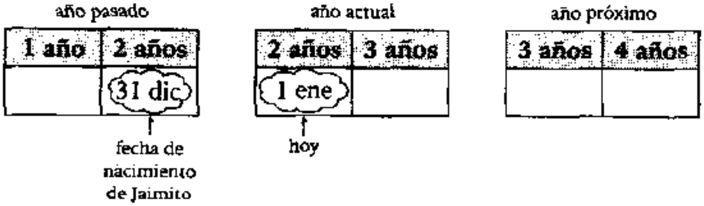
Analizamos el dato gráficamente



Entonces, se debe analizar el tiempo transcurrido en 3 años, y la variación respectiva de la edad. Para ello recordemos que en un año una persona (Jaimito) tiene 2 edades, una de ellas al iniciar el año y la otra luego del cumpleaños (con excepción de las personas nacidas el 1 de enero), entonces, haremos uso de la siguiente representación:



Dadas las condiciones, el único caso posible es



Por lo tanto, la fecha de nacimiento de Jaimito fue 31 de diciembre.

Clave B

PROBLEMA N.° 57

Si el anteayer del pasado mañana de anteayer es viernes, ¿qué día será el ayer del pasado mañana de ayer?

A) domingo B) lunes C) martes
D) jueves E) sábado

Resolución

Piden: ¿qué día será el ayer del pasado mañana de ayer?

Dato: el anteayer del pasado mañana de anteayer es viernes.

Hacemos uso de los equivalentes numéricos, teniendo como dato:

$$-\cancel{2}+\cancel{2}-2=\text{viernes}$$

$$-2=\text{viernes}$$

$$\text{hoy}=\text{viernes}+2$$

→ Hoy es domingo.

Con respecto a lo pedido

$$\text{El } \underbrace{\text{ayer}}_{-1} \text{ del } \underbrace{\text{pasado mañana}}_{+2} \text{ de } \underbrace{\text{ayer}}_{-1}$$

Realizamos las operaciones

$$-1+2-1 <> 0=\text{hoy}$$

Por lo tanto, el ayer del pasado mañana de ayer es domingo.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 58

Si el anteayer de mañana de pasado mañana es viernes, ¿qué día fue ayer?

A) miércoles B) lunes C) sábado
D) jueves E) martes

Resolución

Piden: ¿qué día fue ayer?

Dato: el anteayer de mañana de pasado mañana es viernes.

Aplicamos las equivalencias numéricas, teniendo como dato:

$$-\cancel{2}+1+\cancel{2}=\text{viernes}$$

$$+1=\text{viernes}$$

$$\text{hoy}=\text{viernes}-1$$

→ hoy es jueves

Por lo tanto, ayer fue miércoles.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 59

Ayer tenía 20 años, el próximo año tendré 21 años. Si el día de mañana cumplo años, ¿qué fecha será?

A) 01 de enero
B) 31 de diciembre
C) 02 de enero
D) 30 de diciembre
E) 29 de diciembre

Resolución

Piden: ¿qué fecha será mi cumpleaños?

Datos:

- Ayer tenía 20 años, el próximo año tendré 21 años.
- Mañana es mi cumpleaños.

Representamos los datos gráficamente:

Ayer	Hoy	Mañana	
20 años	20 años	21 años	

cumplo
años

Próximo año tendré 21 años

Se observa que el mañana debe ubicarse en el próximo año; por lo tanto, hoy es 31 de diciembre.

Por lo tanto, el cumpleaños es el 1 de enero.

Clave **A**

PROBLEMAS SOBRE ORDEN DE INFORMACIÓN LINEAL

PROBLEMA N.° 60

X es el niño más alto del aula; en la misma aula, *Y* es más alto que *Z* y más bajo que *W*. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

I. *Y*, *Z* y *W* son más bajos que *X*.
II. *X* es más alto que *W* y más bajo que *Z*.
III. *Z* es más bajo que todos.

A) solo I B) solo II C) I y II
D) I y III E) II y III

Resolución

Piden determinar qué afirmaciones son correctas.

De los datos:

- *Y* es más alto que *Z* y más bajo que *W* ($W > Y > Z$)
- *X* es el niño más alto ($X > W > Y > Z$)

Analizamos las afirmaciones:

I. **Verdadero**
Y, *Z* y *W* son más bajos que *X*.

II. **Falso**
X es más alto que *W* y más bajo que *Z*.

III. **Verdadero**
Z es el más bajo de todos.

Por lo tanto, son correctas I y III.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 61

Se tiene un edificio con cuatro pisos y en cada piso vive una familia. La familia Martínez vive un piso más arriba que la familia González. La familia Dávila vive más arriba que la familia Pravia, y la familia Martínez más abajo que la familia Pravia. ¿En qué piso vive la familia Martínez?

A) 1.^{er} piso B) 2.^{o} piso C) 3.^{er} piso
D) 4.^{o} piso E) 5.^{o} piso

Resolución

Piden: ¿en qué piso vive la familia Martínez?

De los datos:

- La familia Dávila vive más arriba que la familia Pravia y la familia Martínez más abajo que ia familia Pravia.

Fam. Dávila
↑
Fam. Pravia
↓
Fam. Martínez

- La familia Martínez vive un piso más arriba que la familia González.

4.° piso	Fam. Dávila
3.er piso	Fam. Pravia
2.° piso	Fam. Martínez
1.er piso	Fam. González

Por lo tanto, la familia Martínez vive en el 2.° piso.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 62

Cinco amigos están sentados en una banca en el cine, ubicados uno a continuación de otro. Zenaida y Pedro se ubican en forma adyacente. Pedro no está al lado de Silvia ni de Juan. Zenaida está en un extremo. Si Silvia y Manuel están peleados, ¿quién se sienta al lado de Silvia?

A) Zenaida
B) Pedro
C) Juan
D) Manuel
E) José

Resolución

Piden: ¿quién se sienta al lado de Silvia?

De los datos:

- Zenaida está en un extremo

Zenaida				

Obs.: se puede considerar cualquiera de los 2 extremos.

- Zenaida y Pedro se ubican en forma adyacente.

Zenaida	Pedro			

- Pedro no está al lado de Silvia ni de Juan.

Zenaida	Pedro	Manuel		

No Silvia

No Juan

- Silvia y Manuel están peleados.

Zenaida	Pedro	Manuel	Juan	Silvia

alejados

Por lo tanto, al lado de Silvia se sienta Juan.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 63

Seis amigas están escalando una montaña, Carla está más abajo que Juana, quien se encuentra un lugar más abajo que María. Daniela está más arriba que Carla pero un lugar más abajo que Tania, quien está más abajo que Rosa, que se encuentra entre Juana y Tania. ¿Quién está en el cuarto lugar del ascenso?

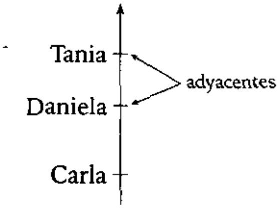
A) María
B) Juana
C) Carla
D) Tania
E) Daniela

Resolución

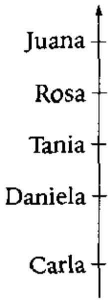
Piden: ¿quién está en el cuarto lugar de ascenso?

De los datos:

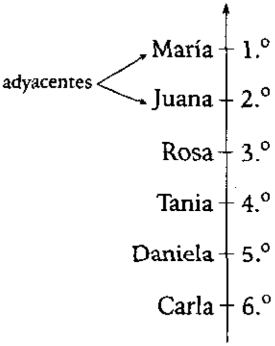
- Daniela está más arriba que Carla pero un lugar más abajo que Tania.



- Tania está más abajo que Rosa, que se encuentra entre Juana y Tania.



- Juana se encuentra un lugar más abajo que María.



Por lo tanto, en el cuarto lugar de ascenso está Tania.

Observación

Consideremos el lugar de ascenso de arriba hacia abajo.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 64

Jesús, Elvis y Mario son 3 profesionales: uno de ellos es médico; otro es ingeniero; y otro, abogado. Los tres tienen sus oficinas en el mismo edificio, cada uno en un piso diferente; sus secretarias se llaman: Martha, Julia y Ofelia.

- El abogado tiene su oficina en la planta baja.
- Para dar la contra a la costumbre que indica que las secretarias se cautivan con sus jefes, Julia está comprometida con Mario, con quien almuerza todos los días.
- Todas las mañanas, Martha sube a desayunar con la secretaria de Elvis.
- Jesús, por una emergencia, hizo descender a su secretaria hasta la oficina del médico.

¿Quién es el médico y quién es el abogado?

A) Elvis y Mario B) Jesús y Mario
C) Mario y Jesús
D) Elvis y Jesús E) Jesús y Elvis

Resolución

Piden: ¿quién es el médico y quién es el abogado?

De los datos:

- El abogado tiene su oficina en la planta baja.

Nombre			
Profesión	Abogado		
Piso	Primer		
Secretaria			

- Jesús hizo descender a su secretaria hasta la oficina del médico.

Nombre			Jesús
Profesión	Abogado	Médico	Ingeniero
Piso	Primer	Segundo	Tercer
Secretaria			

- Todas las mañanas, Martha sube a desayunar con la secretaria de Elvis.

Nombre	Mario	Elvis	Jesús
Profesión	Abogado	Médico	Ingeniero
Piso	Primer	Segundo	Tercer
Secretaria	Martha		

Por lo tanto, el médico es Elvis y el abogado es Mario.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 65

María es mayor que Sara, Ana es menor que Sara, pero mayor que Nataly, y Nataly es menor que Vanessa. ¿Cuál de las cinco es la menor de todas?

A) Nataly B) Vanessa C) Sara
D) Ana E) María

Resolución

Piden: ¿cuál es la menor de todas?

De los datos:

- María es mayor que Sara → $M > S$
- Ana es menor que Sara, pero mayor que Nataly → $M > S > A > N$
- Nataly es menor que Vanessa
  → $M > S > A > N$ y $V > N$

Por lo tanto, la menor de todas es Nataly.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 66

Sabiendo que:

$x \uparrow y$ significa x es más alta que y.
$x \downarrow y$ significa x es más baja que y.

¿Cuál de las siguientes alternativas representa: *A* es más baja que *B*, y *C* es más baja que *D*, quien a su vez es más alta que *B*?

I. $C \uparrow D \uparrow A \uparrow B$
II. $D \downarrow C \downarrow B \downarrow A$
III. $C \downarrow D \uparrow B \uparrow A$
IV. $C \uparrow D \uparrow B \uparrow A$

A) I y II B) II y IV C) solo I
D) solo II E) solo III

Resolución

Piden determinar la representación de *A* es más baja que *B*, y *C* es más baja que *D*, quien a su vez es más alta que *B*.

Se tienen las siguientes equivalencias:

$x \uparrow y = x$ es más alta que y
$x \downarrow y = x$ es más baja que y

En lo pedido:

- *C* es más baja que *D* → $C \downarrow D$
- *D* es más alta que *B* → $\underline{D \uparrow B}$
  $C \downarrow D \uparrow B$ (I)
- *A* es más baja que *B* → $A \downarrow B$
  o
  B es más alta que *A* → $B \uparrow A$ (II)

De (I) y (II), se tiene

$C\downarrow D\uparrow B\uparrow A$

El enunciado correcto es la alternativa III.

$\therefore\ C\downarrow D\uparrow B\uparrow A.$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 67

Cinco profesores: Miranda, Escalante, Mercado, Vera y Rabines están sentados en fila. Escalante estaba en el extremo de la fila y Mercado en el otro extremo. Vera estaba al lado de Escalante y Miranda al lado de Mercado. ¿Quién estaba en el medio?

A) Escalante
B) Rabines
C) Miranda
D) Mercado
E) Vera

Resolución

Piden: ¿quién estaba en el medio?

De los datos:

- Escalante estaba en el extremo de la fila y Mercado en el otro extremo.

Escalante				Mercado

- Vera estaba al lado de Escalante y Miranda al lado de Mercado.

Escalante	Vera		Miranda	Mercado

Por lo tanto, en el asiento central se ubica Rabines.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 68

Se colocan en un estante seis libros de Razonamiento Matemático, Aritmética, Álgebra, Física, Historia y Geometría. Si:

- El libro de Aritmética está junto y a la izquierda del de Álgebra.
- El libro de Física está a la derecha del de Aritmética y a la izquierda del de Historia.
- El libro de Historia está junto y a la izquierda del de Geometría.
- El libro de Razonamiento Matemático está a la izquierda del de Álgebra.

De derecha a izquierda, el cuarto libro es de

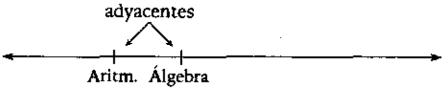
A) Razonamiento Matemático
B) Física
C) Álgebra
D) Aritmética
E) Geometría

Resolución

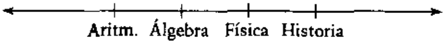
Piden determinar de derecha a izquierda, ¿cuál es el cuarto libro?

De los datos:

- El libro de Aritmética está junto y a la izquierda del de Álgebra.

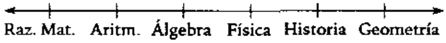


El libro de Física está a la derecha del de Aritmética y a la izquierda del de Historia.



- El libro de Historia está junto y a la izquierda del de Geometría.

- El libro de Razonamiento Matemático está a la izquierda del de Álgebra.



Por lo tanto, de derecha a izquierda el cuarto libro es el de Álgebra.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 69

En cierto examen, Rosa obtuvo menos puntos que María; Laura, menos puntos que Lucía; Noemí, el mismo puntaje que Sara; Rosa, más que Sofía; Laura, el mismo puntaje que María y Noemí más que Lucía. ¿Quién obtuvo menos puntaje?

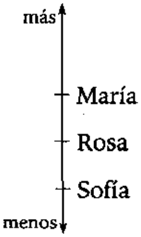
A) Laura
B) María
C) Rosa
D) Sofía
E) Sara

Resolución

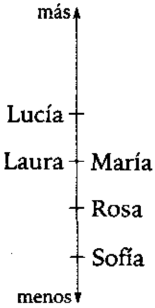
Piden: ¿quién obtuvo menos puntaje?

De los datos:

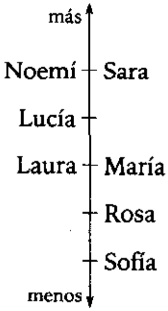
- Rosa obtuvo menos puntos que María pero más puntos que Sofía.



- Laura, menos puntos que Lucía e igual puntaje que María.



- Noemí, más que Lucía y el mismo puntaje que Sara.



Por lo tanto, Sofía obtuvo menos puntaje.

Clave **D**

PROBLEMAS SOBRE ORDEN DE INFORMACIÓN CIRCULAR

PROBLEMA N.° 70

Un abogado invitó a 5 personas a una conferencia. Los nombres de las 6 personas que se reunieron alrededor de una mesa circular eran: Andrés, Luis, Guillermo, Carlos, Eduardo y Marcos. Las profesiones de estos eran: médico, psicólogo, ingeniero, sociólogo, profesor y abogado.

El profesor, que tenía discrepancias con Carlos, se sentó frente a Andrés. El médico se sentó frente a Luis. Luis se sentó entre el sociólogo y el profesor. Marcos se sentó a la derecha del ingeniero y frente al abogado. El ingeniero se sentó frente a Eduardo, junto al médico y a la izquierda del profesor. ¿Quién tenía discrepancias con Carlos?

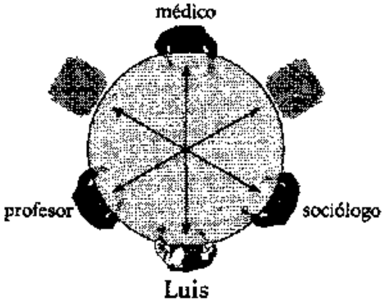
A) Eduardo B) Luis
C) Marcos
D) Guillermo E) Andrés

Resolución

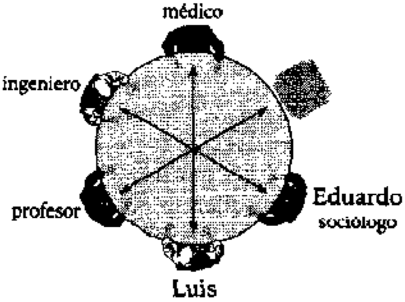
Piden: ¿quién tenía discrepancias con Carlos?

De los datos:

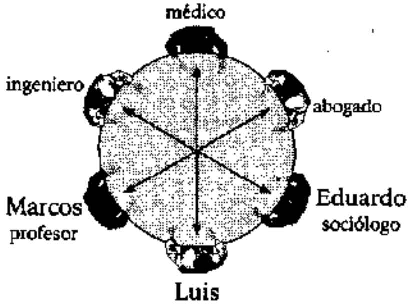
- El médico se sentó frente a Luis; y este, entre el sociólogo y el profesor.



- El ingeniero se sentó frente a Eduardo, junto al médico y a la izquierda del profesor.



- Marco se sentó a la derecha del ingeniero y frente al abogado.



Por lo tanto, el que tiene discrepancias con Carlos es el profesor; es decir, Marcos.

Clave C

PROBLEMA N.° 71

En un comedor, 8 comensales se sientan en una misma mesa circular. Las 8 personas son estudiantes de diversas especialidades: el de Ingeniería está frente al de Educación y entre los de Economía y Farmacia; el de Periodismo está a la izquierda del de Educación y frente al de Economía. Frente al de Farmacia está el de Derecho; este, a su vez, a la siniestra del de Arquitectura. ¿Cuál es la profesión del que está entre el de Biología y Educación?

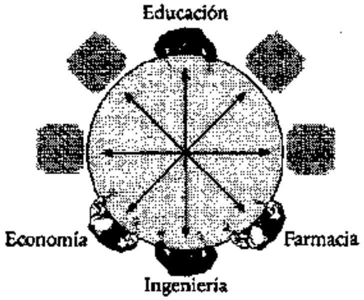
A) Periodismo
B) Economía
C) Derecho
D) Ingeniería
E) Farmacia

Resolución

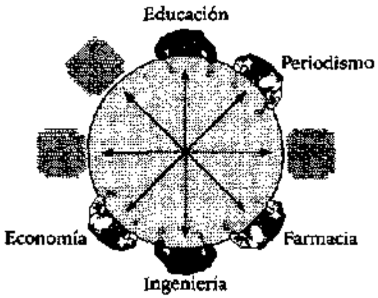
Piden: ¿cuál es la profesión del que está entre el de Biología y Educación?

De los datos:

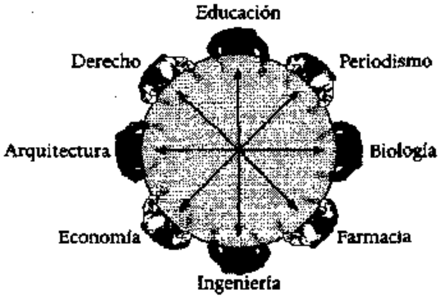
- El de Ingeniería está frente al de Educación y entre los de Economía y Farmacia.



- El de Periodismo está a la izquierda del de Educación, y frente al de Economía.



- Frente al de Farmacia está el de Derecho; éste, a su vez, a la siniestra del de Arquitectura.



Por lo tanto, entre el de Biología y Educación está el periodista.

Clave A

PROBLEMA N.° 72

El señor *X* invita a almorzar a sus amigos *P, D, F, G, J* y *N*. El señor *X* está en buenas relaciones con los seis, pero:

I. *P* y *F* no se hablan desde niños.

II. *G, P* y *D* son hinchas de equipos rivales.

III. *J* le debe dinero a *N*.

IV. *G* le quitó la novia a *F*.

V. *J* y *F* son de diferentes tendencias políticas.

VI. *N* y *G* han reñido por asuntos laborales.

El señor *X* quiere sentarse con sus amigos alrededor de una mesa circular, tal que cada comensal tenga a ambos lados personas con las que esté en buenas relaciones y; además, el señor *X* quiere tener a su lado a *D* y sentar juntos a *J* y a *P*. ¿De qué manera los ubica? (Indique quién está entre *F* y *P*).

A) *X*
B) G
C) *J*
D) *D*
E) *N*

Resolución

Piden indicar quién está entre *F* y *P*.

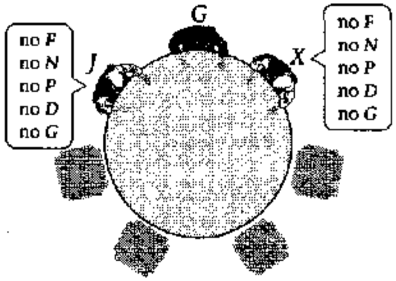
De los datos:

II. *G, P* y *D* son hinchas de equipos rivales.

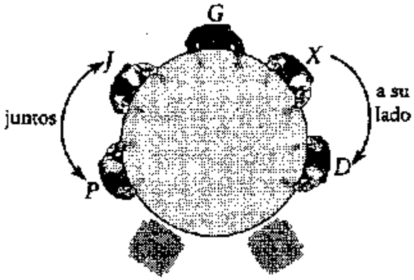
IV. *G* le quitó la novia a *F*.

VI. *N* y *G* han reñido por asuntos laborales.

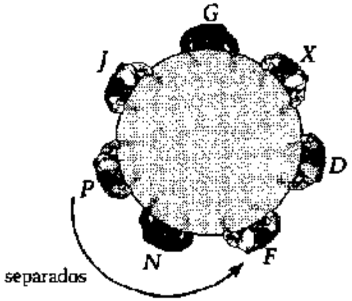
Ubicamos a *G* en el gráfico:



- El señor *X* quiere tener a su lado a *D* y sentar juntos a *J* y a *P*.



- *P* y *F* no se hablan desde niños.



Por lo tanto, entre *F* y *P* se encuentra *N*.

Clave E

PROBLEMA N.° 73

En un comedor, 8 comensales se sientan en una mesa circular, cada uno es de distritos diferentes. El de Chorrillos está al frente del que vive en Miraflores y entre los que viven en Barranco y Surco. El que vive en La Molina está a la izquierda del que vive en Miraflores y frente al que vive en Barranco. Frente al que reside en Surco está el que reside en San Isidro, quien a su vez está a la siniestra del que vive en Vitarte. ¿En dónde reside el que está entre los que viven en Santa Anita y Miraflores?

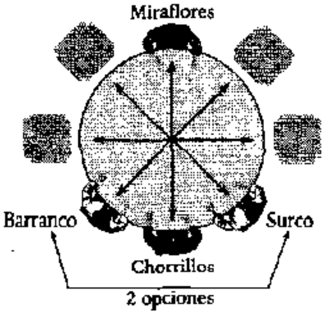
A) Barranco
B) Chorrillos
C) La Molina
D) Surco
E) San Isidro

Resolución

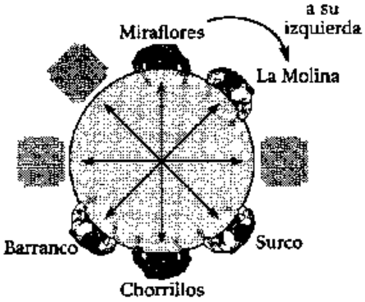
Piden: ¿dónde reside la persona que está entre los que viven en Santa Anita y Miraflores?

De los datos:

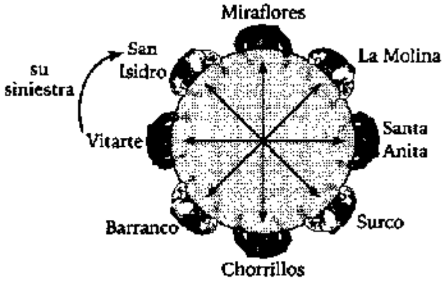
- El de Chorrillos está al frente del que vive en Miraflores y entre los que viven en Barranco y Surco.



- El que vive en La Molina está a la izquierda del que vive en Miraflores y frente al que vive en Barranco.



- Frente al que reside en Surco está el que reside en San Isidro, quien a su vez está a la siniestra del que vive en Vitarte.



Por lo tanto, entre los residentes de Santa Anita y Miraflores se encuentra el que vive en La Molina.

Clave C

PROBLEMAS SOBRE ORDEN DE INFORMACIÓN EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

PROBLEMA N.º 74

Juana tiene un amigo en cada una de las ciudades siguientes: Lima, Cusco e Iquitos; pero cada uno tiene caracteres diferentes: tímido, agresivo y liberal.

- Marcos no está en Lima.
- Luis no está en el Cusco.
- El que está en Lima no es tímido.
- Luis no es liberal ni tímido.

Se quiere saber: en qué ciudad vive Víctor, que es uno de los amigos, y qué carácter tiene; además, se sabe que quien vive en Iquitos es agresivo.

A) Lima; liberal
B) Lima; agresivo
C) Cusco; tímido
D) Cusco; liberal
E) Iquitos; agresivo

Resolución

Piden: ¿en qué ciudad vive Víctor y que carácter tiene?

De los datos:

- Luis no está en el Cusco.
- Luis no es liberal ni tímido
  → Luis es agresivo.
- El que vive en Iquitos es agresivo.

Nombre	Luis		
Ciudad	Iquitos		
Carácter	Agresivo		

Además

- Marcos no está en Lima
  → Marcos está en Cusco.

- El que está en Lima no es tímido

  → el limeño es liberal.

Nombre	Luis	Marcos	Víctor
Ciudad	Iquitos	Cusco	Lima
Carácter	Agresivo	Tímido	Liberal

Por lo tanto, Víctor vive en Lima y su carácter es liberal.

Clave A

PROBLEMA N.° 75

A, *B*, *C* y *D* corresponde a los nombres: Roberto, Gerardo, Manuel y Jesús (no necesariamente en ese orden).

- Roberto, *C* y *D* fueron al teatro juntos.
- Gerardo, *A* y *B* trabajan en la misma fábrica.
- *A*, *C* y Manuel concurren a los juegos mecánicos con regularidad.
- *D*, *B* y Jesús juegan en el mismo equipo.
- *C* es moreno, en cambio, Gerardo es de tez blanca.

Determine quién es moreno y quién es *A*.

A) Jesús; Roberto
B) Jesús; Gerardo
C) Manuel; Roberto
D) Manuel; Gerardo
E) Roberto; Gerardo

Resolución

Piden determinar quién es moreno y quién es *A*.

De los datos:

- Roberto, *C* y *D* fueron al teatro juntos.
- Gerardo, *A* y *B* trabajan en la misma fábrica.

	A	***B***	***C***	***D***
Roberto			✗	✗
Gerardo	✗	✗		
Manuel				
Jesús				

- *A*, *C* y Manuel concurren a los juegos mecánicos.
- *D*, *B* y Jesús juegan en el mismo equipo.
- *C* es moreno y Gerardo es de tez blanca.

	A	***B***	***C***	***D***
Roberto			✗	✗
Gerardo	✗	✗	✗	
Manuel	✗		✗	
Jesús		✗		✗

Se observa que a Gerardo solo le puede corresponder D. Completamos la tabla de información:

	A	***B***	***C***	***D***
Roberto	✓	✗	✗	✗
Gerardo	✗	✗	✗	✓
Manuel	✗	✓	✗	✗
Jesús	✗	✗	✓	✗

Por lo tanto, el moreno (C) es Jesús y *A* es Roberto.

Clave A

PROBLEMA N.° 76

Un estudiante, un médico y un abogado comentan que cada uno de ellos ahorra en un banco diferente:

- *Yo ahorro en Interbank*, dice el médico a Jacinto.
- Tito comenta: *El banco que más intereses paga es el Latino.*
- El abogado dice: *Mi secretaria lleva mi dinero al Banco de Lima.*
- El tercer personaje se llama José.

¿Cómo se llama el estudiante?

A) José
B) Jacinto
C) Tito
D) Pedro
E) Álex

Resolución

Piden: ¿cómo se llama el estudiante?

De los datos:

- Yo ahorro en Interbank, dice el médico a Jacinto.

Nombre		Jacinto	
Profesión	Médico		
Banco	Interbank		

- Tito comenta: *El banco que más intereses paga es el Latino.*

Nombre		Jacinto	Tito
Profesión	Médico		
Banco	Interbank		Latino

- El abogado dice: *Mi secretaria lleva mi dinero al Banco de Lima.*

Nombre		Jacinto	Tito
Profesión	Médico	Abogado	Estudiante
Banco	Interbank	Lima	Latino

Por lo tanto, el estudiante es Tito.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 77

Ana, Betty, Carol y Dina son 4 señoritas cuyas ocupaciones son: enfermera, profesora, secretaria y actriz (aunque no en ese orden necesariamente). Se sabe lo siguiente:

- Ana y Betty son vecinas y se turnan para llevarse el auto al trabajo.
- Betty gana más dinero que Carol.
- Ana le gana siempre a Dina jugando casino.
- La actriz no vive cerca de la casa de la profesora.
- La enfermera camina siempre a su trabajo.
- La única vez que la secretaria vio a la actriz detuvo su auto para pedirle un autógrafo.
- La actriz gana más dinero que la profesora o la secretaria, pero no tiene auto.
  ¿A qué ocupación se dedica Carol?

A) enfermera
B) profesora
C) secretaria
D) actriz
E) contadora

Resolución

Piden: ¿a qué ocupación se dedica Carol?
De los datos:

- La única vez que la secretaria vio a la Actriz detuvo su auto para pedirle un autógrafo.

- La actriz gana más dinero que la profesora y la secretaria pero no tiene auto.

	Ana	Betty	Carol	Dina	
Enfermera					
Profesora					
Secretaria					} auto
Actriz					} no auto

Además

- Ana y Betty son vecinas y se turnan para llevarse el auto.
- La enfermera camina siempre a su trabajo.

	Ana	Betty	Carol	Dina	
Enfermera	×	×			} no auto
Profesora			×	×	} auto
Secretaria			×	×	} auto
Actriz	×	×			} no auto

Luego:

- La actriz gana más dinero que la profesora y la secretaria.
- Betty gana más dinero que Carol, entonces Carol no puede ser la actriz.

Completamos la tabla:

	Ana	Betty	Carol	Dina
Enfermera	×	×	✓	
Profesora			×	×
Secretaria			×	×
Actriz	×	×	×	

Por lo tanto, Carol es la enfermera.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 78

José, Carlos y Manuel tienen diferentes aficiones y gustos en fútbol (SC, AL y U); en literatura (novela, poesía y periodismo); en licores (gin, pisco, cerveza) y en cigarrillos (X, Y y Z).

Se sabe que:

- Carlos no simpatiza con SC.
- Al simpatizante de la U le gusta el pisco.
- El que fuma X es periodista.
- El simpatizante de SC toma cerveza.
- José disfruta cuando juega la U o lee a Bécquer.
- Manuel fuma Y.
- El hincha de AL trabaja en el diario *El Saber*.

Mencione los 4 gustos de José.

A) SC, cerveza, novela e Y.
B) AL, gin, periodismo y X.
C) U, pisco, poesía y Z.
D) SC, pisco, novela y X.
E) AL, cerveza, novela e Y.

Resolución

Piden mencionar los gustos de José.
De los datos:

- El que fuma X es periodista.
- El hincha de AL trabaja en el diario *El Saber*.

Nombre			
Fútbol	AL		
Literatura	Periodista		
Licor			
Cigarros	X		

- Al simpatizante de la U le gusta el pisco.

- José disfruta cuando juega la U y lee a Bécquer.

Nombre		**José**	
Fútbol	AL	**U**	
Literatura	Periodista	**Poesía**	
Licor		**Pisco**	
Cigarros	*X*		

- Manuel fuma *Y*

Nombre		José	**Manuel**
Fútbol	AL	U	
Literatura	Periodista	Poesía	
Licor		Pisco	
Cigarros	*X*		**Y**

↑
Solo puede ser Z

Por lo tanto, los gustos de José son: U, pisco, poesía y Z.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 79

Marcos, Janeth, Manuel y Magaly son hinchas de los siguientes equipos (no necesariamente en ese orden): Boys, Universitario, Cristal y Alianza. Marcos no es hincha de Boys y su amigo tampoco. Si sabemos que Magaly es hincha de Universitario y su enamorado es hincha de Cristal y es el único amigo de Marcos, ¿Marcos, hincha de qué equipo es?

A) Universitario
B) Boys
C) Cristal
D) Alianza
E) Boys y Cristal

Resolución

Piden: ¿de qué equipo es hincha Marcos?

De los datos:

- Sabemos que Magaly es hincha de Universitario y su enamorado es hincha de Cristal y es el único amigo de Marcos.

su único amigo
su enamorado

	Boys	**U**	**SC**	**AL**
Marcos		×	×	
Janeth		×	×	
Manuel	×	×	✓	×
Magaly	×	✓	×	×

- Marcos no es hincha de Boys y su amigo tampoco.

su único amigo

	Boys	**U**	**SC**	**AL**
Marcos	×	×	×	✓
Janeth		×	×	
Manuel	×	×	✓	×
Magaly	×	✓	×	×

Por lo tanto, Marcos es hincha de Alianza.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 80

Están en una sala de conferencia: un ingeniero, un contador, un abogado y un médico. Los nombres, aunque no necesariamente en ese orden, de los profesionales son Pedro, Diego, Juan y Luis. Si se sabe que:

- Pedro y el contador no se llevan bien.
- Juan se lleva muy bien con el médico.
- Diego es pariente del abogado y este es amigo de Luis.
- El ingeniero es muy amigo de Luis y del médico.

¿Quién es el médico?

A) Pedro B) Diego C) Juan D) Luis E) Pablo

Resolución

Piden: ¿quién es el médico?

De los datos:

- Pedro y el contador no se llevan bien.
- Juan se lleva muy bien con el médico.

	Pedro		Diego		Juan		Luis	
Ingeniero								
Contador	×	no amistad						
Abogado								
Médico					×	sí amistad		

- Diego es pariente del abogado y este es amigo de Luis.
- El ingeniero es muy amigo de *Luis* y del *médico*.

→ Personas diferentes

amigos

	Pedro		Diego		Juan		Luis	
Ingeniero							×	sí amistad
Contador	×	no amistad	×		×		✓	
Abogado			×	sí amistad			×	sí amistad
Médico					×	sí amistad	×	

- *Juan* se lleva muy bien con el médico.
- *El ingeniero* es muy amigo del médico.
  - → Juan y el ingeniero son personas distintas.

amigos

	Pedro		Diego		Juan		Luis	
Ingeniero					✗		✗	sí amistad
Contador	✗	no amistad	✗		✗		✓	
Abogado	✗		✗	sí amistad	✓		✗	sí amistad
Médico					✗	sí amistad	✗	

Analizando los datos de amistad, se tiene:

- Abogado pariente de *Diego* → (se llevan bien)
- Abogado se lleva bien con *Luis*.
- Juan (el abogado) se lleva bien con el *médico*.
  - → El médico es Diego o Luis.

Como Luis es contador, entonces Diego es médico.

Clave D

Capítulo

3

Inducción - Deducción

La matemática ha sido muchas veces asociada al memorismo y ello responde a la falta de un sistema educativo acorde a nuestra realidad, a la necesidad de un cambio en el modelo educativo, etc. Ello lleva muchas veces a disminuir la autoestima de las personas, creyendo que la matemática solo la desarrollan personas excepcionales, privilegiadas, genios. Con esta forma de ver la matemática, se esta dejando de lado la capacidad de análisis que ella comprende y solo se la asocia con la capacidad de memorizar fórmulas.

En consecuencia, nos corresponde revertir esta situación poniendo en práctica nuestra capacidad de raciocinio y análisis objetivo.

El siguiente capítulo comprende dos tipos de razonamientos empleados cotidianamente, muchas veces sin conocer que se trata de ellos. Específicamente nos referimos al razonamiento inductivo y al razonamiento deductivo, razonamientos complementarios que permiten plantear hipótesis, inferir conclusiones y modelar situaciones nuevas.

Capítulo 3

Inducción - Deducción

PROBLEMA N.° 1

Calcule el valor M y dé como respuesta la suma de sus cifras.

$M=(666666666666)^2$

A) 102 B) 140 C) 108

D) 110 E) 111

Resolución

Piden suma de cifras de

$$M=\underbrace{(666\ldots6)}_{12\text{ cifras}}^2$$

Analizando los casos particulares:

Caso 1

$$\underbrace{6}_{\textcircled{1}\text{ cifra}}^2 = \overset{\text{resultado}}{\underbrace{3\,6}_{+}} \longrightarrow \overset{\text{suma de cifras}}{9} = 9\times\textcircled{1}$$

Caso 2

$$\underbrace{66}_{\textcircled{2}\text{ cifras}}^2 = \underbrace{4\,3\,5\,6}_{+\,+\,+} \longrightarrow 18 = 9\times\textcircled{2}$$

Caso 3

$$\underbrace{666}_{\textcircled{3}\text{ cifras}}^2 = \underbrace{4\,4\,3\,5\,5\,6}_{+\,+\,+\,+\,+} \longrightarrow 27 = 9\times\textcircled{3}$$

En el problema

$$\underbrace{(66\ldots6)}_{\textcircled{12}\text{ cifras}}^2 = \longrightarrow \overset{\text{suma de cifras}}{9\times\textcircled{12}=108}$$

Por lo tanto, la suma de cifras de M es 108.

Clave C

PROBLEMA N.° 2

Calcule la suma de cifras del resultado.

$$A=\underbrace{555\ldots555}_{100\text{ cifras}}\times\underbrace{999\ldots999}_{100\text{ cifras}}$$

A) 1 B) 10 C) 100

D) 90 E) 900

Resolución

Piden suma de cifras de

$$A=\underbrace{555\ldots5}_{100\text{ cifras}}\times\underbrace{99\ldots999}_{100\text{ cifras}}$$

Analizando los casos particulares:

Caso 1

$$\underbrace{5}_{\textcircled{1}\text{ cifra}} \times \underbrace{9}_{\textcircled{1}\text{ cifra}} = \overset{\text{resultado}}{\underbrace{4\,5}_{+}} \longrightarrow \overset{\text{suma de cifras}}{9} = 9\times\textcircled{1}$$

Caso 2

$$\underbrace{55}_{\textcircled{2}\text{ cifras}} \times \underbrace{99}_{\textcircled{2}\text{ cifras}} = \underset{+\;+\;+}{5\,4\,4\,5} \longrightarrow 18 = 9\times\textcircled{2}$$

Caso 3

$$\underbrace{555}_{\textcircled{3}\text{ cifras}} \times \underbrace{999}_{\textcircled{3}\text{ cifras}} = \underset{+\;+\;+\;+\;+}{5\,5\,4\,4\,4\,5} \longrightarrow 27 = 9\times\textcircled{3}$$

En el problema

$$\underbrace{555...5}_{\textcircled{100}\text{ cifras}} \times \underbrace{999...9}_{\textcircled{100}\text{ cifras}} = \xrightarrow{\quad} \overset{\text{suma de cifras}}{9\times\textcircled{100}} = 900$$

Por lo tanto, la suma de cifras de A es 900.

Clave B

PROBLEMA N.° 3

Si

$A = (\underbrace{333...333}_{61\text{ cifras}})^2$ y $B = (\underbrace{666...666}_{31\text{ cifras}})^2$

Calcule la diferencia entre la suma de cifras del resultado de A y la suma de cifras del resultado de B.

A) 279 B) 549 C) 270
D) 828 E) 720

Resolución

Piden la diferencia entre la suma de cifras del resultado de A y la suma de cifras del resultado de B.

Dato:

$A = (\underbrace{333...33}_{61\text{ cifras}})^2$ y $B = (\underbrace{666...66}_{31\text{ cifras}})^2$

Analizando por inducción para A:

Caso 1

$$\underbrace{3^2}_{\textcircled{1}\text{ cifra}} = \overset{\text{resultado}}{9} \longrightarrow \overset{\text{suma de cifras}}{9\times\textcircled{1}}$$

Caso 2

$$\underbrace{33^2}_{\textcircled{2}\text{ cifras}} = \underset{+\;+\;+}{1\,0\,8\,9} \longrightarrow 9\times\textcircled{2}$$

Caso 3

$$\underbrace{333^2}_{\textcircled{3}\text{ cifras}} = \underset{+\;+\;+\;+\;+}{1\,1\,0\,8\,8\,9} \longrightarrow 9\times\textcircled{3}$$

Luego

$$A = (\underbrace{33...3}_{\textcircled{61}\text{ cifras}})^2 \longrightarrow \overset{\text{suma de cifras}}{9\times\textcircled{61}} = 549$$

En el caso de la expresión B, utilizaremos la inducción analizada en el problema N.° 1, entonces

$$B = (\underbrace{666...666}_{\textcircled{31}\text{ cifras}})^2 \longrightarrow \overset{\text{suma de cifras}}{9\times\textcircled{31}} = 279$$

Por lo tanto, la diferencia entre la suma de cifras del resultado de A y la suma de cifras del resultado B es

$549 - 279 = 270$

Clave C

PROBLEMA N.° 4

Calcule la suma de cifras del resultado de

$$A=\sqrt{\underbrace{111...111}_{2n\text{ cifras}}-\underbrace{222...222}_{n\text{ cifras}}}$$

A) n B) $3n$ C) $6n$
D) n^2 E) $2n$

Resolución

Piden la suma de cifras de A.

Dato: $A=\sqrt{\underbrace{111...111}_{2n\text{ cifras}}-\underbrace{222...222}_{n\text{ cifras}}}$

Analizando la expresión, se observa que la cantidad de cifras 1 es el doble de la cantidad de cifras 2; considerando ello para los casos particulares tendremos:

Caso 1

$$A=\sqrt{\underbrace{11}_{\text{2 cifras}}-\underbrace{2}_{\textcircled{1}\text{ cifra}}}=\overset{\text{resultado}}{3}\longrightarrow\overset{\text{suma de cifras}}{3=3\times\textcircled{1}}$$

Caso 2

$$A=\sqrt{\underbrace{1111}_{\text{4 cifras}}-\underbrace{22}_{\textcircled{2}\text{ cifras}}}=\underbrace{3\,3}_{+}\longrightarrow 6=3\times\textcircled{2}$$

Caso 3

$$A=\sqrt{\underbrace{111111}_{\text{6 cifras}}-\underbrace{222}_{\textcircled{3}\text{ cifras}}}=\underbrace{3\,3\,3}_{+\ +}\longrightarrow 9=3\times\textcircled{3}$$

En el problema

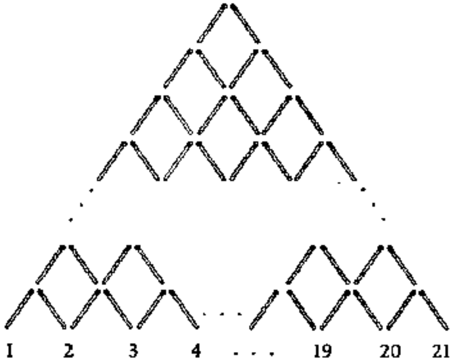
$$A=\sqrt{\underbrace{111...1}_{2n\text{ cifras}}-\underbrace{222...2}_{\textcircled{n}\text{ cifras}}}\longrightarrow\overset{\text{suma de cifras}}{3\times\textcircled{n}}$$

Por lo tanto, la suma de cifras de A es $3n$.

Clave B

PROBLEMA N.° 5

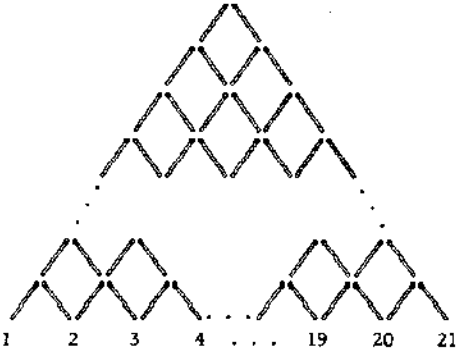
¿Cuántos cerillos conforman la torre mostrada?



A) 20 B) 21 C) 210
D) 200 E) 420

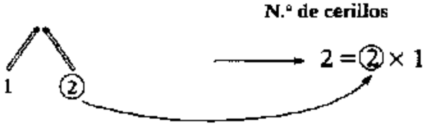
Resolución

Piden la cantidad de cerillos que conforman el siguiente arreglo

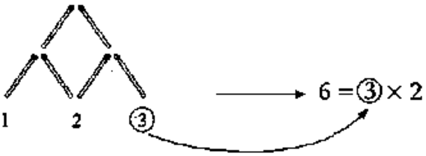


Analizando el arreglo por niveles:

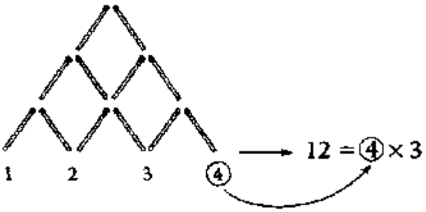
Caso 1



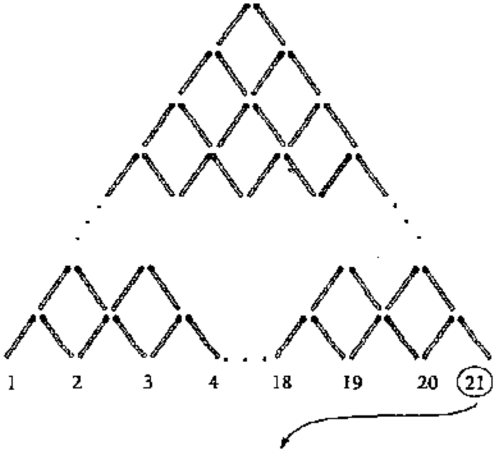
Caso 2



Caso 3



En el problema



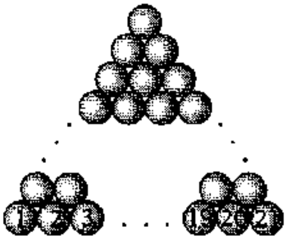
N.° de cerillos = ㉑ × 20 = 420

Por lo tanto, la cantidad de cerillos en el arreglo es 420.

Clave E

PROBLEMA N.° 6

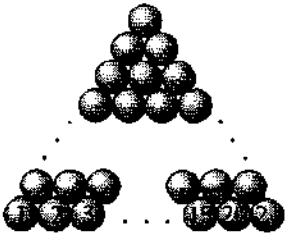
En el siguiente gráfico, ¿cuántos triángulos equiláteros simples se formarán, en total, al unirse los centros de tres circunferencias vecinas inmediatas?



A) 20　　B) 21　　C) 400
D) 441　　E) 360

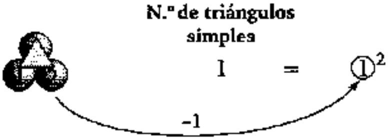
Resolución

Piden el total de triángulos equiláteros simples que se pueden formar al unirse los centros de 3 circunferencias vecinas inmediatas.

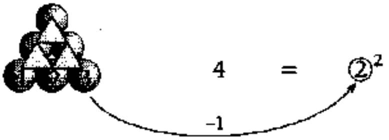


Analizando casos particulares del arreglo mostrado:

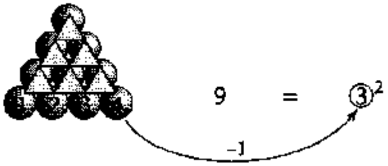
Caso 1



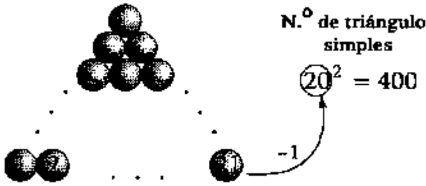
Caso 2



Caso 3



En el problema

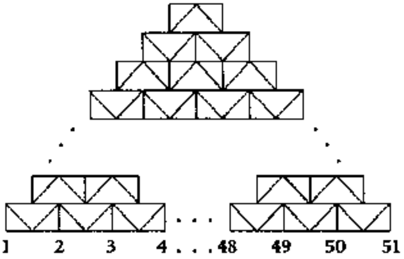


Por lo tanto, el total de triángulos equiláteros simples formados es 400.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

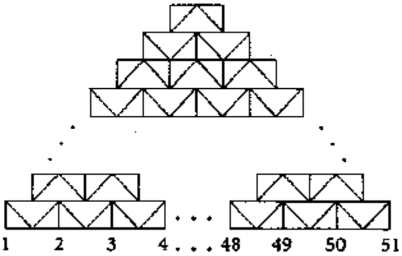
¿Cuántos triángulos se pueden contar, como máximo, en el siguiente gráfico?



A) 5500 B) 5000 C) 5050
D) 5253 E) 5250

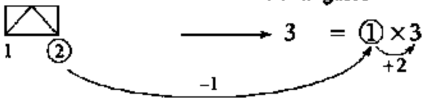
Resolución

Piden la cantidad total de triángulos en el siguiente gráfico



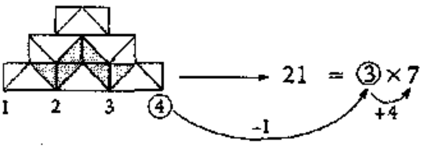
Analizando por inducción:

Caso 1

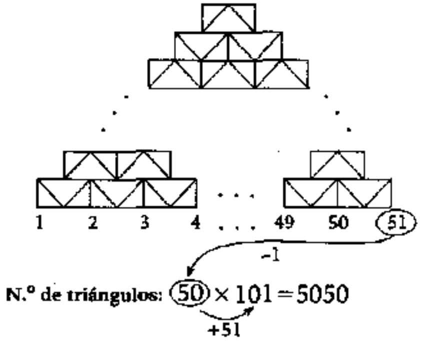


Caso 2

Caso 3



En el problema



Por lo tanto, el número de triángulos es 5050.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Calcule la suma de los términos de la fila 50.

$F_1 \longrightarrow 1$

$F_2 \longrightarrow 3 \quad 5$

$F_3 \longrightarrow 7 \quad 9 \quad 11$

$F_4 \longrightarrow 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- A) 9750
- B) 12 500
- C) 25 000
- D) 75 200
- E) 125 000

Resolución

Piden calcular la suma de los términos de la fila 50.

$F_1 \longrightarrow 1$

$F_2 \longrightarrow 3 \;\; 5$

$F_3 \longrightarrow 7 \;\; 9 \;\; 11$

$F_4 \longrightarrow 13\;15\;17\;19$

Analizando los números ubicados en cada fila.

suma

fila ① ⟶ 1 $\qquad$ $1 = ①^3$

fila ② ⟶ $\underbrace{3\;5}_{+}$ $\qquad$ $8 = ②^3$

fila ③ ⟶ $\underbrace{7\;9}_{+}\underbrace{\;11}_{+}$ $\qquad$ $27 = ③^3$

En el problema

suma

fila (50) ⟶ $(50)^3 = 125\,000$

Por lo tanto, la suma de los términos ubicados en la fila 50 es 125 000.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 9

Si $a+b+c=0$. Calcule la suma de cifras de A.

$$A=(\underbrace{xxx...xxx}_{100\text{ cifras}})^2$$

Sabiendo además que $x=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$

- A) 90
- B) 989
- C) 99
- D) 900
- E) 199

Resolución

Piden calcular la suma de cifras de A.

Datos:

$$A=(\underbrace{\overline{xxxx\ldots xx}}_{100\text{ cifras}})^2$$

- $a+b+c=0$
- $x=\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}$

Para determinar el valor de x, recordemos una de las identidades condicionales

$$\boxed{\text{Si } a+b+c=0, \text{ entonces } a^3+b^3+c^3=3abc}$$

De donde, analizando los dos últimos datos tendríamos:

$$x=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$$

$$x=\frac{a^3}{abc}+\frac{b^3}{abc}+\frac{c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

$$x=\frac{3abc}{abc}$$

$\rightarrow\ x=3$

Entonces, la expresión A quedaría así

$$A=(\underbrace{333\ldots3}_{100\text{ cifras}})^2$$

Por lo tanto, de la inducción analizada en el problema N.° 3, tendríamos la suma de cifras de A es igual a $9\times100=900$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Calcule la suma de cifras del resultado de A.

$$A=(\underbrace{999\ldots9995}_{101\text{ cifras}})^2$$

A) 900 B) 925 C) 625
D) 90 E) 907

Resolución

Piden calcular la suma de cifras del resultado de A.

Dato:

$$A=(\underbrace{999\ldots9995}_{101\text{ cifras}})^2$$

Se observa que la base de la expresión A está formada por un número compuesto con cifras 9 que termina en 5; entonces, reconociendo esas características analizaremos los casos particulares:

Caso 1

resultado **suma de cifras**

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \underbrace{95}^2 = 9025 \arrow[r] & 16=9\times\text{①}+7 \\ \text{② cifras} \arrow[ur, bend right, "-1"'] & \end{tikzcd}$$

Caso 2

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \underbrace{995}^2 = 990025 \arrow[r] & 25=9\times\text{②}+7 \\ \text{③ cifras} \arrow[ur, bend right, "-1"'] & \end{tikzcd}$$

Caso 3

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \underbrace{9995}^2 = 99900025 \arrow[r] & 34=9\times\text{③}+7 \\ \text{④ cifras} \arrow[ur, bend right, "-1"'] & \end{tikzcd}$$

En el problema

$$\begin{tikzcd} A=\underbrace{(999...95)}_{\textcircled{101}\text{ cifras}}{}^{2} \arrow[r, "\text{suma de cifras}"] \arrow[r, bend right=40, "-1"'] & 9\times\textcircled{100}+7=907 \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado de *A* es 907.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

Halle la suma de los elementos de la siguiente matriz de 10×10

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 18 & 20 \\ 4 & 6 & 8 & \dots & 20 & 22 \\ 6 & 8 & 10 & \dots & 22 & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 18 & 20 & 22 & \dots & 34 & 36 \\ 20 & 22 & 24 & \dots & 36 & 38 \end{bmatrix}$$

A) 2500 B) 1900 C) 1650
D) 2000 E) 3600

Resolución

Piden hallar la suma de los elementos de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 18 & 20 \\ 4 & 6 & 8 & \dots & 20 & 22 \\ 6 & 8 & 10 & \dots & 22 & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 18 & 20 & 22 & \dots & 34 & 36 \\ 20 & 22 & 24 & \dots & 36 & 38 \end{bmatrix}$$

Analizando los casos particulares:

Caso 1

$$\begin{tikzcd} \left[\textcircled{2}\right] \arrow[r, phantom, "\text{suma de los elementos}"] \arrow[rrr, bend right, "\div 2"'] & = 2 & = 2\times 1 & = 2\times\textcircled{1}^{3} \end{tikzcd}$$

Caso 2

$$\begin{tikzcd} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \textcircled{4} & 6 \end{bmatrix} \arrow[rrr, bend right, "\div 2"'] & = 16 & = 2\times 8 & = 2\times\textcircled{2}^{3} \end{tikzcd}$$

Caso 3

$$\begin{tikzcd} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ \textcircled{6} & 8 & 10 \end{bmatrix} \arrow[rrr, bend right, "\div 2"'] & = 54 & = 2\times 27 & = 2\times\textcircled{3}^{3} \end{tikzcd}$$

En el problema

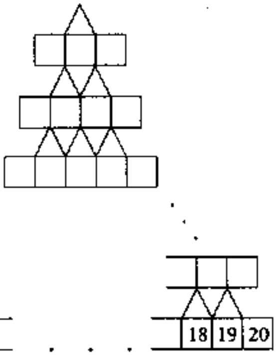
$$\begin{tikzcd} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & \cdots & 20 \\ 4 & 6 & 8 & \cdots & 22 \\ 6 & 8 & 10 & \cdots & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \textcircled{20} & 22 & 24 & & 38 \end{bmatrix} \arrow[d, "\div 2"] \\ \text{suma}=2\times\textcircled{10}^{3}=2000 \end{tikzcd}$$

Por lo tanto,t la suma de los elementos de la matriz es 2000.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

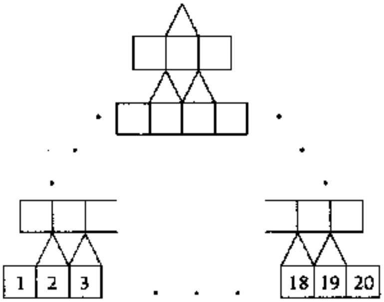
Calcule el número total de triángulos de la forma △ y ▽ en el siguiente gráfico.



A) 441 B) 225 C) 324
D) 400 E) 300

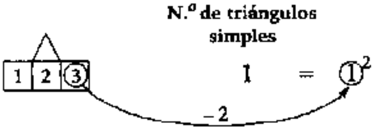
Resolución

Piden calcular el número total de triángulos simples en el gráfico mostrado.

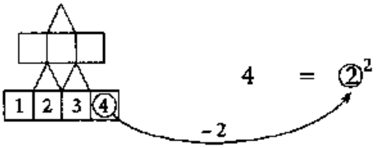


Analizando los casos particulares del gráfico mostrado:

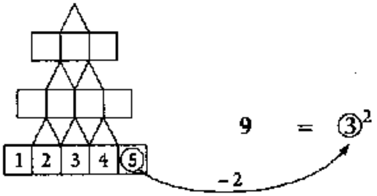
Caso 1



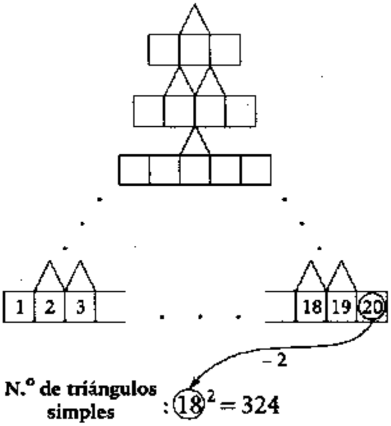
Caso 2



Caso 3



En el problema



Por lo tanto, la cantidad total de triángulos simples es 324.

Clave C

PROBLEMA N.° 13

Calcule la suma de cifras del resultado de efectuar $E=81(12345679)^2$.

A) 49 B) 64 C) 81
D) 100 E) 72

Resolución

Piden calcular la suma de cifras del resultado de efectuar E.

Dato: $E=81(12345679)^2$

Desarrollando la expresión E antes de aplicar la inducción.

$$E=9^2\times(12345679)^2=(9\times12345679)^2$$

$$E=\underbrace{111111111}_{9\text{ cifras}}{}^2$$

Analizando por inducción:

Caso 1

$$\begin{array}{ccccc} & \text{resultado} & & \text{suma de cifras} & \\ \underbrace{1}_{\textcircled{1}\text{ cifra}}{}^2 = & 1 & \longrightarrow & 1 & = \textcircled{1}^2 \end{array}$$

Caso 2

$$\underbrace{11}_{\textcircled{2}\text{ cifras}}{}^2 = 121 \longrightarrow 4 = \textcircled{2}^2$$

Caso 3

$$\underbrace{111}_{\textcircled{3}\text{ cifras}}{}^2 = 12321 \longrightarrow 9 = \textcircled{3}^2$$

Para la expresión E

$$E=\underbrace{111111111}_{\textcircled{9}\text{ cifras}}{}^2 \longrightarrow \textcircled{9}^2=81$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado de efectuar E es 81.

Clave C

PROBLEMA N.° 14

Si

$$\sqrt{\overline{a5}\times\overline{a6}\times\overline{a7}\times\overline{a8}+1}=2161$$

Calcule

$$M=\underbrace{a+\overline{aa}+\overline{aaa}+\overline{aaaa}+\ldots}_{a\text{ sumandos}}$$

A) 4936
B) 4856
C) 4836
D) 4938
E) 4746

Resolución

Piden calcular el valor de M.

Datos:

- $\sqrt{\overline{a5}\times\overline{a6}\times\overline{a7}\times\overline{a8}+1}=2161$

- $M=\underbrace{a+\overline{aa}+\overline{aaa}+\overline{aaaa}+\ldots}_{a\text{ sumandos}}$

Del primer dato se observa que los 4 factores que se encuentran en el radicando son números consecutivos, criterio que se tendrá en cuenta para el análisis de los casos particulares:

Caso 1

$$\sqrt{1\times\underbrace{2\times3}_{-1}\times4+1}=\overset{\text{resultado}}{5}$$

Caso 2

$$\sqrt{2\times\underbrace{3\times4}_{-1}\times5+1}=11$$

Caso 3

$$\sqrt{3\times\underbrace{\textcircled{4\times5}}_{-1}\times6+1}=19$$

En el primer dato se obtiene:

$$\sqrt{\overline{a5}\times\underbrace{\textcircled{\overline{a6}\times\overline{a7}}}_{-1}\times\overline{a8}+1}=2161$$

$\rightarrow\ \overline{a6}\times\overline{a7}-1=2161$

$\underset{46}{\underbrace{\overline{a6}}}\times\underset{47}{\underbrace{\overline{a7}}}=2162$

$\rightarrow\ a=4$

Entonces

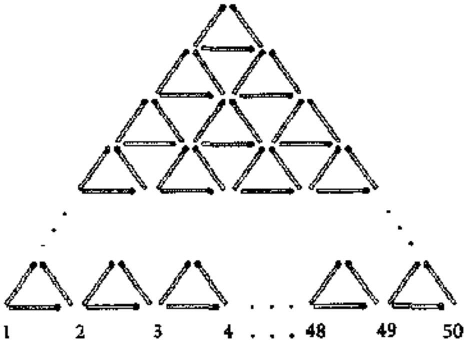
$M=4+44+444+4444$

$\therefore\ M=4936$

Clave A

PROBLEMA N.° 15

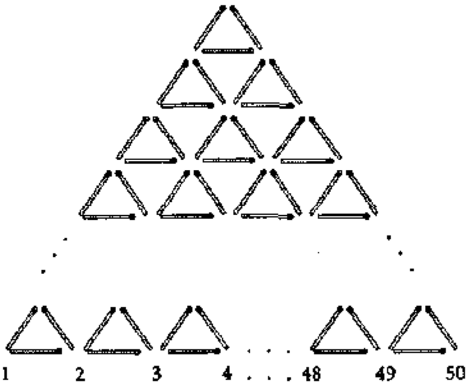
¿Cuántos palitos se trazaron para construir el siguiente arreglo?



A) 3600
B) 3675
C) 2550
D) 3725
E) 3625

Resolución

Piden: ¿cuántos palitos se trazaron para construir el siguiente arreglo?



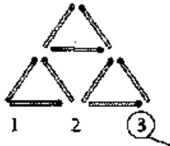
Analizando los casos particulares:

Caso 1

N.° de palitos

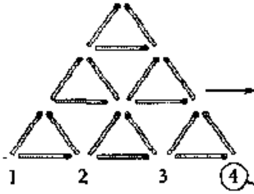
$\longrightarrow 3=3\times1=3\left(\frac{1\times\textcircled{2}}{2}\right)$

Caso 2



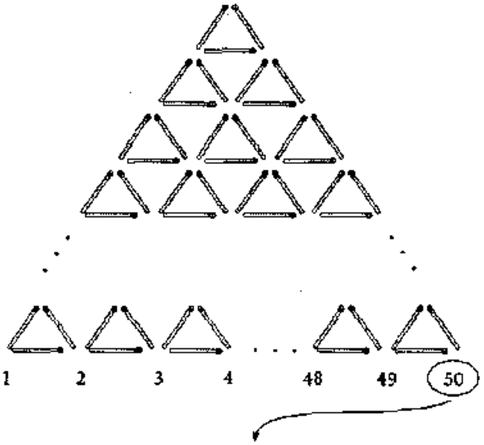
$\longrightarrow 9=3\times3=3\left(\frac{2\times\textcircled{3}}{2}\right)$

Caso 3



$\longrightarrow 18=3\times6=3\left(\frac{3\times\textcircled{4}}{2}\right)$

En el problema



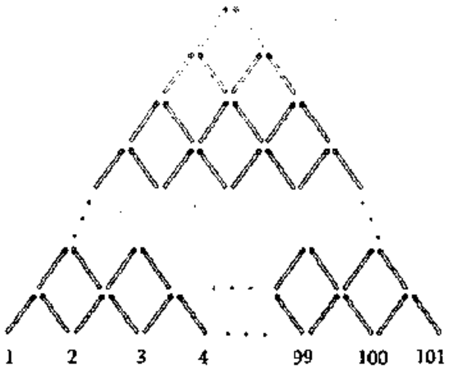
N.° de palitos: $3\times\left(\frac{49\times\textcircled{50}}{2}\right)=3675$

Por lo tanto, el total de palitos empleados en la construcción del siguiente arreglo es 3675.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

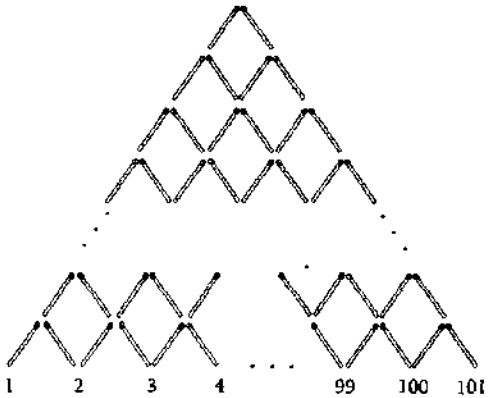
¿Con cuántos palitos se formó el siguiente gráfico?



A) 11 000 B) 10 010 C) 10 200
D) 10 100 E) 10 101

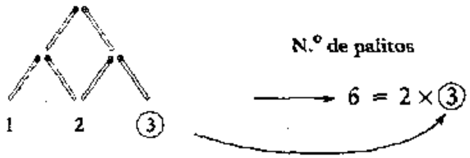
Resolución

Piden ¿con cuántos palitos se formó el siguiente gráfico?



Analizando los casos particulares:

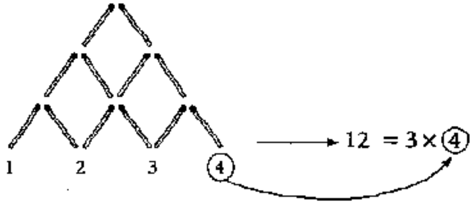
Caso 1



N.° de palitos

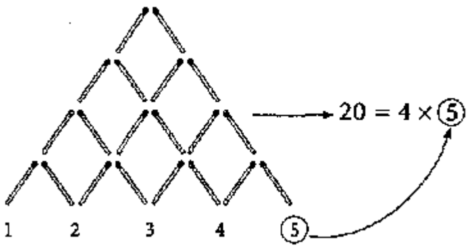
$\longrightarrow 6 = 2\times③$

Caso 2

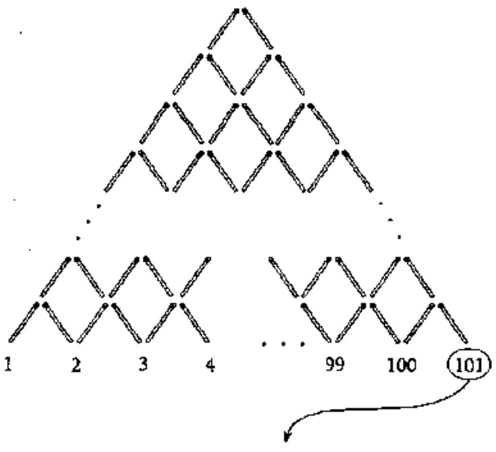


$\longrightarrow 12 = 3\times④$

Caso 3



En el problema:



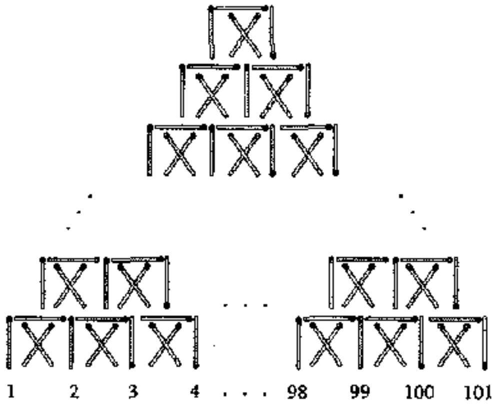
N.º de palitos: 100 × (101) = 10 100

Por lo tanto, el total de palitos empleados es 10 100.

Clave **D**

PROBLEMA N.º 17

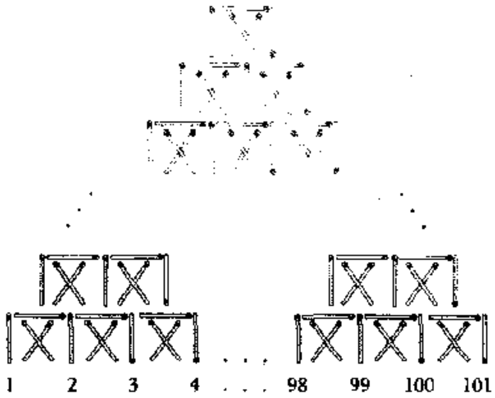
Para construir el siguiente castillo se utilizaron cerillos, ¿cuántos se emplearon en total?



A) 10 000
B) 16 000
C) 25 000
D) 20 400
E) 20 300

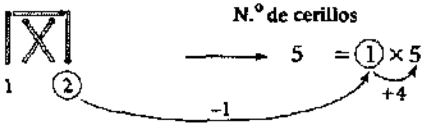
Resolución

Piden: ¿cuántos cerillos se emplearon en total para construir el siguiente castillo?

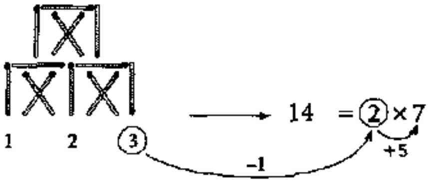


Analizando el siguiente castillo, se considera menos cantidad de niveles para los casos particulares:

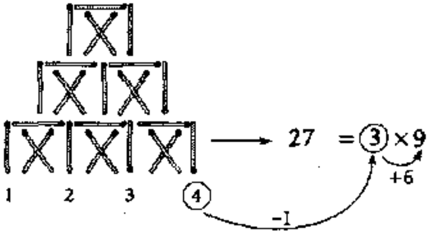
Caso 1



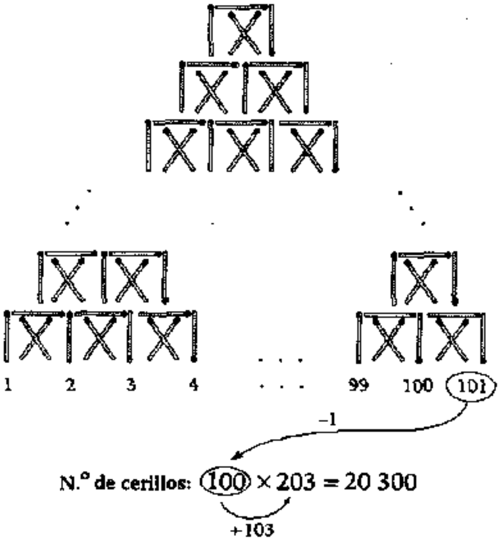
Caso 2



Caso 3



En el problema



N.° de cerillos: $\textcircled{100} \times 203 = 20\,300$

Por lo tanto, el total de cerillos empleados en la construcción del castillo es 20 300.

Clave

PROBLEMA N.° 18

Halle la suma de cifras del resultado de la siguiente operación

$$\sqrt{\underbrace{999..99}_{2(n-1)\text{cifras}}-\underbrace{1999...998}_{n\text{ cifras}}}$$

A) $3n$ B) $6n$ C) $6(n+1)$
D) $9n$ E) $9(n-1)$

Resolución

Piden hallar la suma de cifras del resultado de la siguiente operación

$$\sqrt{\underbrace{999...999}_{2(n-1)\text{cifras}}-\underbrace{19999...98}_{n\text{ cifras}}}$$

Asignando valores particulares a *n*, ya que la suma de cifras depende de dicho valor

Caso 1

$$\sqrt{99-18} = \overset{\text{resultado}}{\sqrt{81} = 9} \longrightarrow \overset{\text{suma de cifras}}{9 = 9\times\textcircled{1}}$$
$(n=\textcircled{2})$ -1

Caso 2

$$\sqrt{9999-198} = \sqrt{9801} = 99 \longrightarrow 18 = 9\times\textcircled{2}$$
$(n=\textcircled{3})$ -1

Caso 3

$$\sqrt{999999-1998} = \sqrt{998001} = 999 \rightarrow 27 = 9\times\textcircled{3}$$
$(n=\textcircled{4})$ -1

En general para n

$$\sqrt{\underbrace{999...9}_{2(n-1)\text{ cifras}}-\underbrace{1999...98}_{n\text{ cifras}}}\xrightarrow{\text{suma de cifras}}9\times(n-1)$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado de la operación es $9(n-1)$.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Si: $M(1)=\ \ 4\times1+1$

$M(2)=\ \ 8\times4+8$

$M(3)=12\times9+27$

$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Calcule el valor de x, si $M(x)=4\times10^4$

A) 15 B) 18 C) 23
D) 20 E) 21

Resolución

Piden calcular el valor de x.

Datos:

- $M(x)=4\times10^4$
- $M(1)=4\times1+1$
- $M(2)=8\times4+8$
- $M(3)=12\times9+27$

$\vdots \qquad \vdots$

Analizando los casos particulares señalados, se observa que:

$$M(n)=(4n)\times n^2+n^3$$

$$M(n)=5n^3$$

Reemplazamos

$$M(x)=5x^3=4\times10^4$$

$$\rightarrow\ 5x^3=2^2\times2^4\times5^4$$

$$x^3=2^6\times5^3$$

Despejamos x

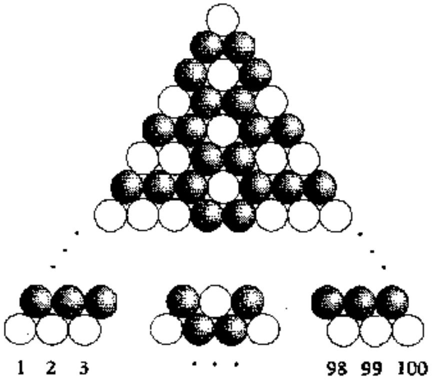
$$x=2^2\times5$$

$$\therefore\ x=20$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

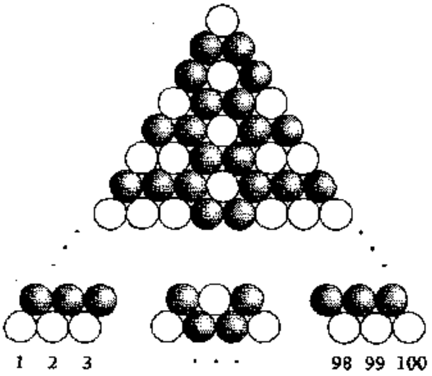
En el siguiente triángulo, ¿cuántas bolitas sombreadas hay?



A) 2550 B) 2500 C) 2250
D) 5100 E) 2555

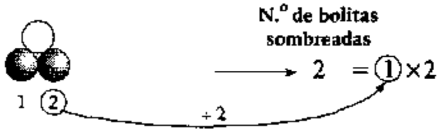
Resolución

Piden: ¿cuántas bolitas sombreadas hay en el siguiente triángulo?

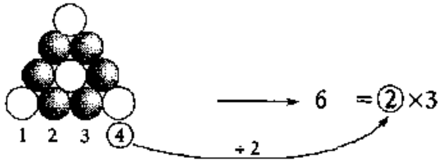


Analizando el gráfico se observa que presenta una distribución secuencial cada 2 niveles, entonces:

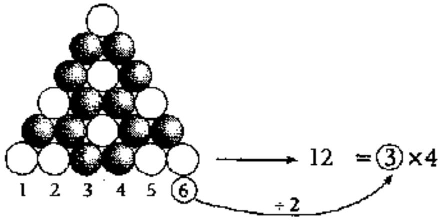
Caso 1



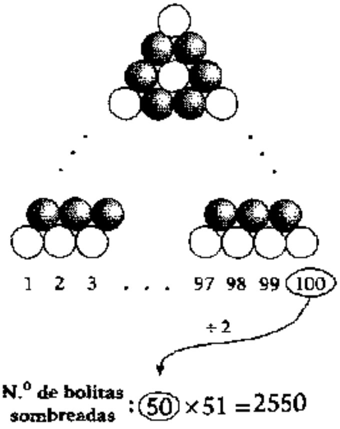
Caso 2



Caso 3



En el problema:



Por lo tanto, el número de bolitas sombreadas es 2550.

Clave **A**

PROBLEMA N.º 21

Determine $P+U+C$,
si $\overline{PUC}+\overline{CUP}=888$
Además, $P-C=4$

A) 10 B) 14 C) 11
D) 13 E) 12

Resolución

Piden $P+U+C$

Datos:

- $\overline{PUC}+\overline{CUP}=888$
- $P-C=4$

Analizando el primer dato:

$$\begin{array}{ccc|l} P & U & C & + \\ C & U & P & \\ \hline 8 & 8 & 8 & \end{array} \begin{cases} C+P=8 \\ \quad \text{o} \\ C+P=18 \begin{pmatrix}\text{imposible} \\ P=C=9\end{pmatrix} \end{cases}$$

Entonces tenemos:

- $C+P=8$
- $P-C=4$

De lo que concluimos que
$P=6$ y $C=2$

Reemplazando

$$\begin{array}{r} 6U2\ + \\ 2U6 \\ \hline 888 \end{array} \quad ➧ \quad U=4$$

$\therefore\ P+U+C=6+4+2=12$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 22

Al multiplicar un número de 7 cifras consecutivas por 13, el resultado termina en 7. ¿Cuál será la diferencia entre la suma de cifras del resultado, con la suma de cifras del número de 7 cifras?

A) 0 B) 1 C) 35
D) 14 E) 13

Resolución

Piden calcular la diferencia entre la suma de cifras de $N\times13$ con la suma de cifras de N.

Sea

$$N=\overline{(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

(Por dato debe tener 7 cifras consecutivas)

Además

$$\underbrace{\overline{(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)}}_{\ldots9}\times13=\ldots7$$

$x+3=9$
$\rightarrow\ x=6$

Reemplazamos
$N=3456789$
$13N=44938257$

Entonces
Suma de cifras de $13N=42$
Suma de cifras de $N=42$

Por lo tanto, la diferencia entre la suma de cifras de $13N$ con la suma de cifras de N es 0.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 23

Si $\overline{ANITA}\times8=\overline{PEPITO}$; O=cero
Halle $M=A+N+I+T+E+P$

A) 20 B) 24 C) 35
D) 27 E) 28

Resolución

Piden $M=A+N+I+T+E+P$

Dato

$$\begin{array}{r} \overline{ANITA}\times \\ 8 \\ \hline \overline{PEPITO} \end{array} \qquad \text{O=cero}$$

Analizamos la cifra de las unidades:

$$\begin{array}{r} \overline{ANIT\boxed{A}}\ \times \\ \boxed{8} \\ \hline PEPIT\boxed{0} \end{array} \Rightarrow \ 8A=\ldots0 \qquad A<\begin{matrix} 0\ (\text{descartado}) \\ 5\ \checkmark \end{matrix} \rightarrow A=5$$

Luego

$$\begin{array}{r} \overset{④}{\curvearrowleft} \\ \overline{5NI\boxed{T}5}\ \times \\ \boxed{8} \\ \hline PEPI\textcircled{T}0 \end{array} \Rightarrow \ \begin{array}{l} 8T+4=\ldots T \\ \rightarrow\ T=8 \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{r} \textcircled{6}\ 4 \\ \curvearrowleft\curvearrowleft \\ \overline{5N\boxed{I}85}\ \times \\ \boxed{8} \\ \hline PEP\textcircled{I}80 \end{array} \Rightarrow \ \begin{array}{l} 8I+6=\ldots I \\ \rightarrow\ I=2 \end{array}$$

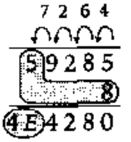
Se observa que

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 4 \\ \curvearrowleft\curvearrowleft\curvearrowleft\curvearrowleft \\ \overline{\boxed{5}N285}\ \times \\ \boxed{8} \\ \hline \textcircled{PE}P280 \end{array} \Rightarrow \ \begin{array}{c} 5\times8+\overset{\text{máx. 7}}{\boxed{\text{lleva}}}=\overline{PE} \\ 40+\overset{\text{máx. 7}}{\boxed{\text{lleva}}}=\overline{PE} \\ \rightarrow\ P=4 \end{array}$$

Reemplazamos

$$\begin{array}{r} \textcircled{2}\ 6\ 4 \\ \curvearrowleft\curvearrowleft\curvearrowleft \\ \overline{5\boxed{N}285}\ \times \\ \boxed{8} \\ \hline \overline{4E4280} \end{array} \Rightarrow \ \begin{array}{l} 8N+2=\ldots4 \\ \quad 8N=\ldots2 \\ N=<\begin{matrix} 4 \\ 9\ \checkmark \end{matrix}\begin{pmatrix}\text{descartado} \\ P=4\end{pmatrix} \\ \rightarrow\ N=9 \end{array}$$

Luego



$5\times8+7=\overline{4E}$

$\rightarrow E=7$

Entonces, el valor de

$M=A+N+I+T+E+P$

$M=5+9+2+8+7+4$

$\therefore\ M=35$

Clave C

PROBLEMA N.° 24

Reconstruya la siguiente operación e indique la suma de cifras del resultado. Cada asterisco representa un dígito cualquiera.

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,*\ \times\\ *\,6\,*\\ \hline *\,8\,4\,*\\ 1\,*\,*\,*\,*\\ *\,*\,*\,*\\ \hline *\,*\,5\,1\,2\,9 \end{array}$$

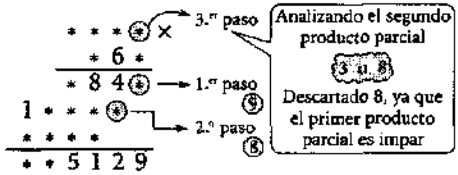
A) 21　　B) 22　　C) 23
D) 24　　　　　　E) 25

Resolución

Piden calcular la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,*\ \times\\ *\,6\,*\\ \hline *\,8\,4\,*\\ 1\,*\,*\,*\,*\\ *\,*\,*\,*\\ \hline *\,*\,5\,1\,2\,9 \end{array}$$

Analizando las cifras de las unidades de los productos parciales

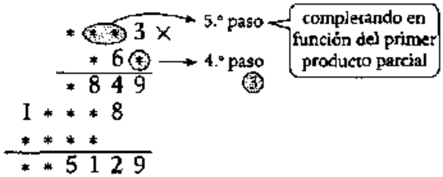


Analizando el segundo producto parcial

3 ó 8

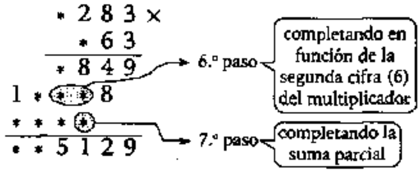
Descartado 8, ya que el primer producto parcial es impar

Tenemos



completando en función del primer producto parcial

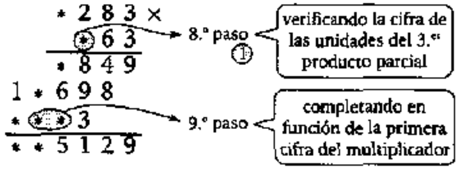
Así



completando en función de la segunda cifra (6) del multiplicador

completando la suma parcial

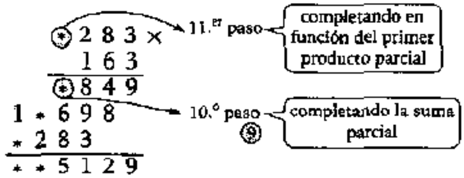
Además



verificando la cifra de las unidades del 3.er producto parcial

completando en función de la primera cifra del multiplicador

Luego



completando en función del primer producto parcial

completando la suma parcial

De esta manera

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 3 & 2 & 8 & 3 & \times \\
 & & & 1 & 6 & 3 & \\ \cline{3-6}
 & & 9 & 8 & 4 & 9 & \\
1 & * & 6 & 9 & 8 & & \\
* & 2 & 8 & 3 & & & \\ \hline
* & * & 5 & 1 & 2 & 9 &
\end{array}$$

Completamos finalmente

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 3 & 2 & 8 & 3 & \times \\
 & & & 1 & 6 & 3 & \\ \cline{3-6}
 & & 9 & 8 & 4 & 9 & \\
1 & 9 & 6 & 9 & 8 & & \\
3 & 2 & 8 & 3 & & & \\ \hline
5 & 3 & 5 & 1 & 2 & 9 &
\end{array}$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado es 25.

Clave E

PROBLEMA N.° 25

Calcule la suma de cifras del cociente, en la siguiente división:

$$\begin{array}{ccccccc|l}
* & * & * & * & * & * & * & ** \\ \cline{8-8}
* & * & * & & & & & **8** \\ \cline{1-3}
- & - & - & - & * & * & & \\
 & & & & * & * & & \\ \cline{5-6}
 & & & - & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & \\ \cline{5-7}
 & & & & - & - & 1 &
\end{array}$$

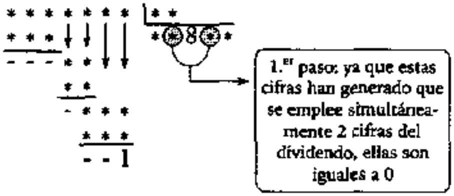
A) 20 B) 21 C) 26
D) 30 E) 32

Resolución

Piden calcular la suma de cifras del cociente en la siguiente división:

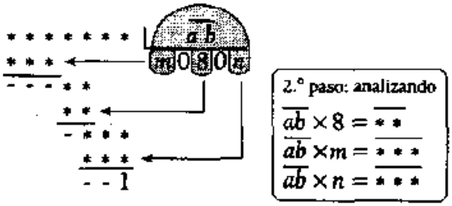
$$\begin{array}{ccccccc|l}
* & * & * & * & * & * & * & ** \\ \cline{8-8}
* & * & * & & & & & **8** \\ \cline{1-3}
- & - & - & - & * & * & & \\
 & & & & * & * & & \\ \cline{5-6}
 & & & - & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & \\ \cline{5-7}
 & & & & - & - & 1 &
\end{array}$$

Analizando las cifras del cociente



1.er paso: ya que estas cifras han generado que se emplee simultáneamente 2 cifras del dividendo, ellas son iguales a 0

Luego



2.° paso: analizando

$\overline{ab}\times 8=\overline{**}$

$\overline{ab}\times m=\overline{***}$

$\overline{ab}\times n=\overline{***}$

Necesariamente

$m>8 \wedge n>8$

$\rightarrow m=n=9$

Por lo tanto, la suma de cifras del cociente es

$m+0+8+0+n$

$=9+0+8+0+9$

$=26$

Clave C

PROBLEMA N.° 26

Halle la última cifra del resultado de

$$E=3671^{31}+(825^{19}+1)\ (26^2-1)$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Piden hallar la última cifra del resultado de:

$$E=3671^{31}+(825^{19}+1)(26^2-1)$$

Antes de analizar el problema, recordemos:
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\boxed{(\ldots1)^n=\ldots1 \qquad (\ldots5)^n=\ldots5 \qquad (\ldots6)^n=\ldots6}$$

En el problema

$$E=3671^{31}+(825^{19}+1)(26^2-1)$$

Analizando la última cifra

$$E=(\ldots1)^{31}+((\ldots5)^{19}+1)((\ldots6)^2-1)$$

$$E=\ldots1+(\ldots5+1)(\ldots6-1)$$

$$E=\ldots1+\underbrace{(\ldots6)(\ldots5)}$$

$$E=\ \ldots1\ +\ \ldots0\ =\ \ldots1$$

Por lo tanto, la última cifra del resultado de E es 1.

Clave A

PROBLEMA N.° 27

Si $\overline{SIETE}+\overline{TRES}=100\,000$
halle $\overline{SEIS}$, además $I=E$ y $T=R$

A) 8128　B) 8118　C) 9229
D) 9339　E) 9119

Resolución

Piden hallar $\overline{SEIS}$.
Datos:

- $I=E$ y $T=R$
- $\overline{SIETE}+\overline{TRES}=100\,000$

Analizando la adición

1.^{er} paso: necesariamente $S=9$ para que el resultado presente una cifra más.

$$\begin{array}{r} \textcircled{S}\ I\ E\ T\ \textcircled{E} \\ T\ R\ E\ S \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

2.° paso: conocido el valor de S entonces $E=1=I$

Luego

$$\begin{array}{r} 9\ I\ 1\ \textcircled{T}\ 1\ + \\ T\ \textcircled{R}\ 1\ 9 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

3.^{er} paso: completando la adición
$\rightarrow T = 8$

4.° paso: conociendo el valor de T
$\rightarrow R = 8$

$\therefore\ \overline{SEIS}=9119$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 28

Calcule la suma de cifras del resultado de

$$E=\sqrt{10305050301+2040604020}$$

A) 10　B) 9　C) 12
D) 6　E) 8

Resolución

Piden calcular la suma de cifras del resultado de

$$E=\sqrt{10305050301+2040604020}$$

Desarrollamos el radicando

$$E=\sqrt{12345654321}$$

Observamos las características del radicando, analizando casos particulares:

Caso 1

$$\begin{array}{lcc} & \text{resultado} & \text{suma de cifras} \\ E=\sqrt{1\textcircled{2}1} & =11 & \longrightarrow\ 2 \end{array}$$

Caso 2

$$E=\sqrt{12\textcircled{3}21}=111 \longrightarrow 3$$

Caso 3

$$E=\sqrt{123\textcircled{4}321}=1111 \longrightarrow 4$$

En el problema

$$E=\sqrt{12345\textcircled{6}54321} \xrightarrow{\text{suma de cifras}} 6$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado de E es 6.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

Un número de 4 cifras de la forma $\overline{abc6}$, elevado al cuadrado, termina en $\overline{abc6}$. Calcule $a+b+c$.

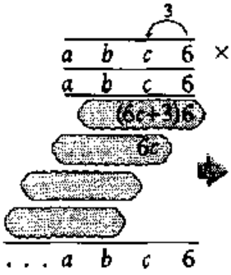
A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

Resolución

Piden calcular el valor de $a+b+c$

Dato: Se sabe que $\overline{abc6}^2=\overline{...abc6}$

Analizando la multiplicación, se tendría



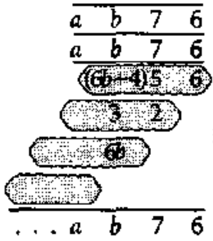
analizando la suma parcial

$(6c+3)+6c=\overline{...c}$

$12c+3=\overline{...c}$

$\rightarrow c=7$

Luego



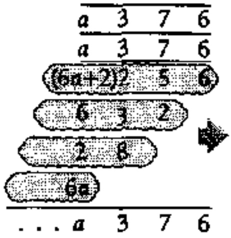
analizando la suma parcial

$(6b+4)+3+6b=\overline{...b}$

$12b+7=\overline{...b}$

$\rightarrow b=3$

Y finalmente



analizando la suma parcial

$(6a+2)+6+2+(6a)+1=\overline{...a}$

$12a+11=\overline{...a}$

$\rightarrow a=9$

Entonces

$\overline{abc6}=9376$

$\therefore\ a+b+c=9+3+7=19$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Calcule $(A-M-N)^{1997}$
si se sabe que
$\overline{1A}+\overline{2A}+\overline{3A}+\ ...\ +\overline{9A}=\overline{MN1}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución

Piden calcular el valor de

$$(A-M-N)^{1997}$$

Dato: $\overline{1A}+\overline{2A}+\overline{3A}+...+\overline{9A}=\overline{MN1}$

Analizamos la cifra de las unidades de los sumandos

$$\begin{array}{r} \overline{1A}\ + \\ \overline{2A} \\ \overline{3A} \\ \vdots \\ \underline{\overline{9A}} \\ \overline{MN1} \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{array}{l} 9A=\ldots 1 \\ A=9 \end{array}$$

Analizamos la cifra de las decenas de los sumandos.

$$\begin{array}{r} \overset{8}{19}\ + \\ 29 \\ 39 \\ \vdots \\ \underline{99} \\ \overline{MN1} \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{array}{l} (1+2+3...+9)+8=\overline{MN} \\ \overline{MN}=53 \\ M=5 \ \wedge \ N=3 \end{array}$$

Luego

$(A-M-N)^{1997}=(9-5-3)^{1997}$

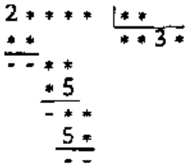
$(A-M-N)^{1997}=1^{1997}$

$\therefore\ (A-M-N)^{1997}=1$

Clave B

PROBLEMA N.° 31

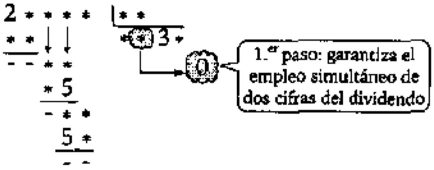
En la siguiente división, halle la suma de las cifras del dividendo



A) 21
B) 37
C) 25
D) 18
E) 15

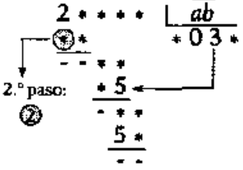
Resolución

Piden hallar la suma de cifras del dividendo.



1.er paso: garantiza el empleo simultáneo de dos cifras del dividendo

Luego, analizando la tercera cifra del cociente, se tiene



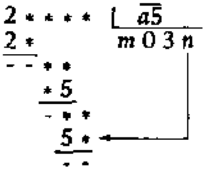
3.er paso:

$\overline{ab}\times 3=\overline{*5}$

$\rightarrow b=5$

$\rightarrow a=1\ 6\ 2$

Además

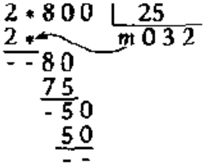


4.° paso:

$\overline{a5}\times n=\overline{5*}$

$\rightarrow a=2$ y $n=2$

Reemplazamos



5.° paso:

$25\times m=\overline{2*}$

$\rightarrow m=1$

Finalmente

$$\begin{array}{l|l}
25\,800 & 25 \\ \cline{2-2}
\underline{25} & 1032 \\
\text{- -}\,80 & \\
\quad\underline{75} & \\
\quad\text{-}50 & \\
\quad\underline{50} & \\
\quad\text{- -} &
\end{array}$$

Por lo tanto, la suma de las cifras del dividendo es 2+5+8+0+0=15

Clave E

PROBLEMA N.° 32

Si:

$A+U=D$ y $U+D=17$

halle la suma de las cifras del resultado de

$$E=\overline{AU}\times(\underbrace{\overline{AA\ldots A}}_{8\text{ cifras}})^2-(\underbrace{\overline{DD\ldots DD}}_{8\text{ cifras}})^2+(\underbrace{\overline{UU\ldots U}}_{8\text{ cifras}})^2$$

A) 49
B) 54
C) 64
D) 72
E) 80

Resolución

Piden hallar la suma de cifras del resultado de

$$E=\overline{AU}\times(\underbrace{\overline{AA\ldots A}}_{8\text{ cifras}})^2-(\underbrace{\overline{DD\ldots DD}}_{8\text{ cifras}})^2+(\underbrace{\overline{UU\ldots U}}_{8\text{ cifras}})^2$$

Datos:

- $A+U=D$
- $U+D=17$

Del primer dato concluimos que:

$$D>A\wedge D>U$$

En el segundo dato se observa que

$$\begin{array}{lll}
U+D=17 & & \\
\downarrow\quad\downarrow & & \\
9\quad 8 & \times & \text{(descartado, ya que } D>U\text{)} \\
8\quad 9 & \checkmark &
\end{array}$$

Evaluamos en el primer dato

$A=1$

Reemplazamos en E

$$E=18\times(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2-(\underbrace{99\ldots9}_{8\text{ cifras}})^2+(\underbrace{88\ldots8}_{8\text{ cifras}})^2$$

Desarrollamos cada sumando

$$E=18\times(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2-9^2\times(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2+8^2(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2$$

$$E=18\times(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2-81\times(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2+64(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2$$

$$E=(18-81+64)\times(\underbrace{11\ldots1}_{8\text{ cifras}})^2$$

$$E=\underbrace{111\ldots1}_{8\text{ cifras}}{}^2$$

Por la inducción analizada en el problema N.° 13, la suma de cifras de E es $8^2=64$.

Clave C

PROBLEMA N.° 33

En un examen, las respuestas a las cinco primeras preguntas son: a, b, c, d, e; para las siguientes 10 son: a, a, b, b, c, c, d, d, e, e; para los siguientes 15 son: a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, d, d, e, e, e; y así sucesivamente. Entonces, la respuesta a la pregunta 90, es

A) a
B) b
C) c
D) d
E) e

Resolución

Piden: ¿cuál es la respuesta a la pregunta 90?
Se sabe que:

	$5\times\left(\frac{1\times2}{2}\right)$	$5\times\left(\frac{2\times3}{2}\right)$	$5\times\left(\frac{3\times4}{2}\right)$		$5\times\left(\frac{5\times6}{2}\right)$
Preguntas	1-⑤	6-⑮	16-㉚	. . .	-(75)
Respuestas	a, b, c, d, e	a, b, c, d, e a, b, c, d, e	a, b, c, d, e a, b, c, d, e a, b, c, d, e		

Hasta la pregunta 75, cada respuesta se habrá repetido 5 veces, entonces las siguientes respuestas se presentarán 6 veces, así:

Preguntas	76–81	82–87	88–93	. . .
Respuestas	a, a, a, a, a, a	b, b, b, b, b, b	c, c, c, c, c, c	. . .

Por lo tanto, la respuesta al problema 90 es c.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 34

Si $\dfrac{\overline{A2}}{\overline{1A}}=3$

calcule $E=2(A+3)+7$

A) 4 B) 7 C) 14
D) 21 E) 20

Resolución

Piden calcular

$E=2(A+3)+7$

Dato: se cumple que

$$\frac{\overline{A2}}{\overline{1A}}=3$$

Desarrollando tenemos:

$$\begin{array}{r} \overline{1\,A}\ \times \\ 3 \\ \hline \overline{A\,2} \end{array} \quad \rightarrow \quad A=4$$

$\therefore\ E=2(4+3)+7=21$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

Si $\overline{ababa}\times6=212118$

halle $\overline{aab}+\overline{ab}$.

A) 335 B) 370 C) 535
D) 730 E) 337

Resolución

Piden hallar el valor de $\overline{aab}+\overline{ab}$

Dato: $\overline{ababa}\times 6=212118$

Desarrollamos la operación

$$\underbrace{\overline{ababa}=\frac{212118}{6}=35353}$$

Por comparación

$a=3 \wedge b=5$

$\therefore \overline{aab}+\overline{ab}=335+35=370$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 36

Efectúe la siguiente suma y halle $m+n+p+q$.

$$\underbrace{7+77+777+...+777...77}_{36 \text{ sumandos}}=\overline{...mnpq}$$

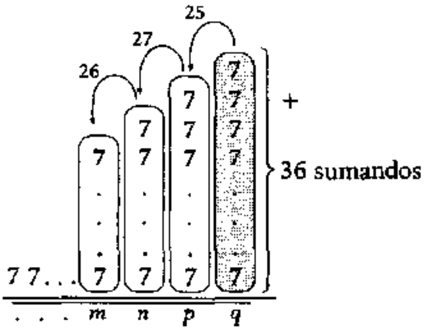
A) 7 B) 5 C) 9
D) 12 E) 14

Resolución

Piden hallar el valor de $m+n+p+q$.
Dato:

$$\underbrace{7+77+777+...+777...7}_{36 \text{ sumandos}}=\overline{...mnpq}$$

Analizamos en forma vertical la adición indicada:



$36\times 7=...q \rightarrow q=2$

$35\times 7+25=...p \rightarrow p=0$

$34\times 7+27=...n \rightarrow n=5$

$33\times 7+26=...m \rightarrow m=7$

$\rightarrow m+n+p+q=7+5+0+2$

$\therefore m+n+p+q=14$

Clave E

PREGUNTA N.° 37

Se tiene un número de 3 cifras que comienza en 5 y acaba en 2; dichas cifras son cambiadas por 1 y 8, respectivamente. ¿En cuánto ha disminuido dicho número?

A) 388 B) 432 C) 406
D) 280 E) 394

Resolución

Piden: ¿en cuánto disminuye el número original?

Dato:

- Número original : $\overline{5a2}$
- Número final : $\overline{1a8}$
  (alterado)

Para determinar la variación procedemos a sustraer ambas cantidades

$\overline{5a2}-\overline{1a8}$

Por descomposición canónica

$$\underbrace{(502+\cancel{10a})-(108+\cancel{10a})}_{394}$$

Por lo tanto, dicho número disminuyó en 394.

Clave E

PROBLEMA N.° 38

Si

$(a+b+c)^2=\overline{a25}$

Calcule

$M=\overline{ab3}+\overline{c2b}+\overline{4ac}+\overline{bca}$

- A) 1475
- B) 1685
- C) 2088
- D) 1575
- E) 1988

Resolución

Piden calcular

$$M=\overline{ab3}+\overline{c2b}+\overline{4ac}+\overline{bca}$$

Dato:

$$(a+b+c)^2=\overline{a25}$$

Por cifras terminales se verifica que

- $a+b+c=15$

$$\begin{array}{l} \underbrace{(a+b+c)^2}=\overline{a25} \\ \qquad\qquad\quad\ \downarrow \\ \quad 15^2 \quad\ =225 \end{array}$$

$\rightarrow\ a+b+c=15$

$a=2$ ✓

$b+c=13$ ✓

O también

- $a+b+c=25$

$$\begin{array}{l} \underbrace{(a+b+c)^2}=\overline{a25} \\ \qquad\qquad\quad\ \downarrow \\ \quad 25^2 \quad\ =625 \end{array}$$

$\rightarrow\ a+b+c=25$

$a=6$ ✗

$b+c=19$ ✗

Imposible, ya que la suma de dos dígitos como máximo es 18.

Se pide

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & \\ & a & b & 3 \quad + \\ & c & 2 & b \\ & 4 & a & c \\ & b & c & a \\ \hline 2 & 0 & 8 & 8 \end{array}$$

$\therefore\ M=2088.$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Poseo cinco dígitos, pero si me restaras la unidad, ya no tendría cinco, sino solamente cuatro. ¿Quién soy? (Dé como respuesta la suma de cifras del número).

- A) 1
- B) 27
- C) 36
- D) 2
- E) 3

Resolución

Piden la suma de cifras del número de 5 cifras.

Dato:

$$\overline{abcde}-1=\overline{mnpq}$$

Sea

$$\overline{abcde}=\overline{mnpq}\overset{\text{un orden más}}{\frown}+1$$

Único caso posible

$$10\,000=9999+1$$

Por lo tanto, la suma de cifras del número es 1.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 40

Calcule $a+b+c+d$,

si

a y $c < 6$; b y $d < 8$

Además,

$$\underbrace{131^2+133^2+135^2+231^2+233^2+235^2+...}_{111\text{ términos}}=$$

$$=\sqrt{\overline{...ab}+\overline{...cd}}$$

A) 2
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

Resolución

Piden calcular el valor de

$a+b+c+d$

Datos:

a y $c < 6$;
b y $d < 8$

Analizamos las cifras terminales

$$\underbrace{...1+...9+...5+...1+...9+...5+...}_{111=3\times37\text{ términos}}=\sqrt{\overline{...ab}+\overline{...cd}}$$

$$37\times(...1+...9+...5)=\sqrt{\overline{...ab}+\overline{...cd}}$$

$$\underbrace{37\times(...5)}=\sqrt{\overline{...ab}+\overline{...cd}}$$

$$...5=\sqrt{\overline{...ab}+\overline{...cd}}$$

$$(...5)^2=\overline{...ab}+\overline{...cd}=...25$$

Desarrollamos la adición indicada

$$\begin{array}{r} \overline{...ab}\ + \\ \overline{...cd} \\ \hline ...25 \end{array}$$

2.° paso ← ┘└ → **1.^{er} paso**

$a+c=2$ ✓ o	$b+d=5$ ✓ o
$a+c=12$ ✗	$b+d=15$ ✗
(descartado ya que a y $c < 6$)	(descartado ya que b y $d < 8$)

Entonces

$b+d=5$ y $a+c=2$

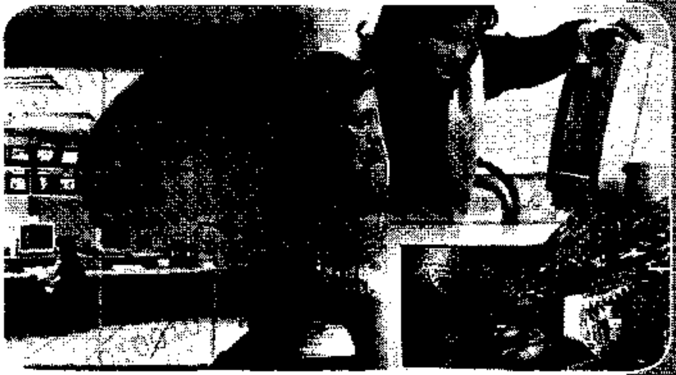
$$\therefore\ a+b+c+d=\underbrace{a+c}_{2}+\underbrace{b+d}_{5}=7$$

Clave **D**

Capítulo

4

Habilidad operativa



En nuestra experiencia diaria, comprobamos que el tiempo es bastante importante cuando de realizar una actividad se trata, más aún si se refiere a resolver un examen de admisión; es recién entonces, tal vez, cuando reflexionamos más sobre él. En este capítulo presentaremos formas abreviadas de realizar cálculos, tales como la multiplicación o la potenciación de ciertas cantidades; además, veremos qué tan útil nos pueden resultar ciertos conocimientos básicos, como la teoría de exponentes, la factorización, etc., en la resolución de expresiones que aparentemente son muy laboriosas, pero que con un poco de habilidad serán resueltas fácilmente. Asimismo, mostraremos procesos sencillos y abreviados de cómo multiplicar por 5; 9; 11; 25; 99; 999, etc.; la multiplicación por complemento, método que se puede emplear cuando los factores son bastantes cercanos a la unidad inmediata superior y, finalmente, cómo resolver ciertas potencias, por ejemplo, la de exponente 2 (cuadrados) cuando se trata de un número de dos cifras, o de un número que termina en cifra 5, entre otros.

Capítulo 4

Habilidad operativa

PROBLEMA N.° 1

Se sabe que $a-b=b-c=c-d=\sqrt[5]{5}$
Calcule el valor de

$$A=\frac{(a-c)^{10}+(a-b)^{10}-(c-a)^{10}+(b-c)^{5}}{(c-a)^{10}-(a-c)^{10}+(b-c)^{5}}$$

A) 1　　B) 2　　C) 4
D) 6　　E) $\sqrt{5}$

Resolución

Se pide valor de

$$A=\frac{(a-c)^{10}+(a-b)^{10}-(c-a)^{10}+(b-c)^{5}}{(c-a)^{10}-(a-c)^{10}+(b-c)^{5}}$$

Observamos que

$$\underbrace{(a-c)^{10}=(\underbrace{-(c-a)}_{\substack{\text{signo negativo con}\\ \text{exponente par}}})^{10}=(c-a)^{10}}_{\text{iguales}}$$

Luego, en

$$A=\frac{\cancel{(a-c)^{10}}+(a-b)^{10}-\cancel{(c-a)^{10}}+(b-c)^{5}}{\cancel{(c-a)^{10}}-\cancel{(a-c)^{10}}+(b-c)^{5}}$$

Reemplazamos el dato

$$A=\frac{(\sqrt[5]{5})^{10}+(\sqrt[5]{5})^{5}}{(\sqrt[5]{5})^{5}}=\frac{5^2+5}{5}$$

$\therefore\ A=6$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Halle

$$E=\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}$$

si $16^{3^{2x}}=8^{4^{2x}}$

A) 1　　B) 2　　C) 1/2
D) 0　　E) 4

Resolución

Se pide el valor de la expresión $E=\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}$
En el dato:

$$16^{3^{2x}}=8^{4^{2x}}$$

Expresamos los miembros en una misma base

$$(2^4)^{3^{2x}}=(2^3)^{4^{2x}}\qquad\text{(Potencia de potencia)}$$

$$2^{4\cdot 3^{2x}}=2^{3\cdot 4^{2x}}\qquad\text{(Bases iguales)}$$

$$\rightarrow\ 4\cdot 3^{2x}=3\cdot 4^{2x}$$

$$\frac{3^{2x}}{3}=\frac{4^{2x}}{4}\qquad\text{(Bases comunes)}$$

$$3^{2x-1}=4^{2x-1}$$

$$\frac{3^{2x-1}}{4^{2x-1}}=1\qquad\text{(Exponente común)}$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}}_{}=1$$

$\therefore\ E=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Si $a+b+c=0$; $a \neq b; b \neq c; a \neq c$

halle $M=\dfrac{3(a+b)(a+c)(b+c)+3abc}{a^5+b^5+c^5+a^9+b^9+c^9}$

A) 1 B) 6 C) 2
D) 0 E) 1/2

Resolución

Se pide el valor de

$$M=\frac{3(a+b)(a+c)(b+c)+3abc}{a^5+b^5+c^5+a^9+b^9+c^9}$$

Del dato:

$a+b+c=0; a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c$

$a+b=-c$

$a+c=-b$

$b+c=-a$

Reemplazamos en

$$M=\frac{3\overbrace{(-c)(-b)(-a)}^{-abc}+3abc}{a^5+b^5+c^5+a^9+b^9+c^9}$$

$$M=\frac{\cancel{-3abc}+\cancel{3abc}}{a^5+b^5+c^5+a^9+b^9+c^9}$$

$\therefore$ $M=0$

Clave D

PROBLEMA N.° 4

Halle $2x-5$ si $0,\underbrace{00...00}_{23\text{ ceros}}1234=1234\times 10^x$

A) 48 B) 30 C) −59
D) 43 E) −40

Resolución

Se pide el valor de $2x-5$

Dato: $0,\underbrace{00...00}_{23\text{ ceros}}1234=1234\times 10^x$

Recuerda

$$\underbrace{0,2}_{1\text{ cifra}}=\frac{2}{10}=2\times 10^{-1}$$

$$\underbrace{0,03}_{2\text{ cifras}}=\frac{3}{100}=\frac{3}{10^2}=3\times 10^{-2}$$

$$\underbrace{0,012}_{3\text{ cifras}}=\frac{12}{1000}=\frac{12}{10^3}=12\times 10^{-3}$$

En el dato

$$\underbrace{0,\underbrace{00...00}_{23\text{ cifras}}\ \underbrace{1234}_{+4\text{ cifras}}}_{27\text{ cifras}}=1234\times 10^x$$

$1234\times 10^{-27}=1234\times 10^x$

$\rightarrow$ $x=-27$

Luego, $2x-5=-59$

Clave C

PROBLEMA N.° 5

¿A qué es igual $3x+2$? si

$\sqrt[\sqrt{x}]{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[9]{9}$

A) 9 B) 29 C) 30
D) 81 E) 25

Resolución

Se pide el valor de $3x+2$

Dato: $\sqrt[\sqrt{x}]{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[9]{9}$

Por la teoría de exponentes, en el dato

$$\sqrt[3\cdot\sqrt{x}]{x}=\sqrt[9]{9}=\sqrt[3\cdot 3]{9}$$

Damos forma al segundo miembro

$$\sqrt[3\cdot\sqrt{x}]{x}=\sqrt[3\cdot\sqrt{9}]{9}$$

$\rightarrow\ \ x=9$

Finalmente, $3x+2=29$

Clave B

PROBLEMA N.° 6

Resuelva $\dfrac{2^{x+1}-3^{x+1}}{3^x}=1,5$

Indique el valor de $E=-x^2+2x-5$

A) -8 B) 5 C) -13
D) -9 E) 13

Resolución

Se pide el valor de $E=-x^2+2x-5$

Del dato

$$\frac{2^{x+1}-3^{x+1}}{3^x}=1,5=\frac{3}{2}$$

$$2(2^{x+1})-2(3^{x+1})=3^x\cdot 3$$

$$2^{x+2}=2(3^{x+1})+1(3^{x+1})$$

$$2^{x+2}=3(3^{x+1})=3^{x+2}$$

$$\frac{2^{x+2}}{3^{x+2}}=1 \qquad \text{(Exponente común)}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}=1\ \ \rightarrow\ \ x+2=0$$

$$x=-2$$

Luego

$$E=-(-2)^2+2(-2)-5$$

$\therefore\ \ E=-13$

Clave C

PROBLEMA N.° 7

Si $\underbrace{b^{320}+b^{320}+b^{320}+...+b^{320}}_{81\text{ veces}}=81^{81}$

halle $E=(b-1)^{(b-1)^{(b-1)}}$

A) 8 B) 16 C) 32
D) 4 E) 3

Resolución

Se pide el valor de $E=(b-1)^{(b-1)^{(b-1)}}$

Del dato

$$\underbrace{b^{320}+b^{320}+...+b^{320}}_{81\text{ veces}}=81^{81}$$

$$81\cdot b^{320}=81^{81}$$

$$b^{320}=\frac{81^{81}}{81}=81^{80}$$

Descomponemos en factores el 320

$$b^{4\cdot 80}=81^{80}$$

$$(b^4)^{80}=81^{80}$$

$$b^4=81=3^4$$

$\rightarrow\ \ b=3$

Reemplazamos en lo pedido

$\therefore\ \ E=(3-1)^{(3-1)^{(3-1)}}=2^{2^2}=16$

Clave B

PROBLEMA N.° 8

Simplifique

$$E=(\underbrace{3^n\cdot 3^n\cdot 3^n\cdot ...3^n}_{n\text{ factores}})\cdot(\underbrace{2^n\cdot 2^n\cdot 2^n\cdot ...2^n}_{n\text{ factores}})$$

A) 5^{2n} B) 6^{n^2} C) $5n$
D) 7^{n^2} E) $6n^2$

Resolución

Se pide simplificar la expresión

$$E=\underbrace{(3^n\cdot 3^n\cdot\ldots\cdot 3^n)}_{n\text{ factores}}\cdot\underbrace{(2^n\cdot 2^n\cdot\ldots\cdot 2^n)}_{n\text{ factores}}$$

(Producto con bases iguales)

$$E=(3^{\overbrace{n+n+n+\ldots+n}^{n\text{ sumandos}}})\cdot(2^{\overbrace{n+n+n+\ldots+n}^{n\text{ sumandos}}})$$

$$E=(3^{n\cdot n})\cdot(2^{n\cdot n})$$

$$E=3^{n^2}\times 2^{n^2}$$ (Exponente común)

$$E=(3\times 2)^{n^2}$$

$$\therefore\ E=6^{n^2}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 9

Calcule x en

$$\sqrt[33]{3}\cdot\sqrt[3]{33}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[33]{33}=\sqrt[11]{x^4}$$

A) 3 B) 33 C) 99
D) 11 E) 39

Resolución

Se pide el valor de x
En el dato

$$\underbrace{\sqrt[33]{3}\cdot\sqrt[3]{33}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[33]{33}}_{\text{índices comunes}}=\sqrt[11]{x^4}$$

$$\sqrt[33]{3\cdot 33}\cdot\sqrt[3]{33\cdot 3}=\sqrt[11]{x^4}$$

$$\sqrt[33]{99}\cdot\sqrt[3]{99}=\sqrt[11]{x^4}$$

$$99^{\frac{1}{33}}\cdot 99^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{11}}$$

(Producto con bases iguales)

Simplificamos

$$99^{\frac{1}{33}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{11}}$$

$$99^{\frac{12}{33}}=x^{\frac{4\cdot 3}{11\cdot 3}}=x^{\frac{12}{33}}$$

$$\therefore\ x=99$$

Clave C

PROBLEMA N.° 10

Resuelva

$$A=\left[\frac{(1984)(2016)+256}{(959)(1041)+1681}\right]^5$$

A) 32 B) 64 C) 128
D) 256 E) 1024

Resolución

Se pide resolver la expresión

$$A=\left[\frac{(1984)(2016)+256}{(959)(1041)+1681}\right]^5$$

Descomponemos los factores

$$A=\left[\frac{(2000-16)(2000+16)+16^2}{(1000-41)(1000+41)+41^2}\right]^5$$

$$A=\left[\frac{2000^2-\cancel{16^2}+\cancel{16^2}}{1000^2-\cancel{41^2}+\cancel{41^2}}\right]^5$$

(Exponente común)

$$A=\left[\left(\frac{2000}{1000}\right)^2\right]^5$$ (Potencia de potencia)

$$\therefore\ A=2^{10}=1024$$

Clave E

PROBLEMA N.° 11

Si $\overline{KENAR}\cdot 99999=\overline{...12345}$,

halle $(K+A+R+E+N)$

A) 28 B) 29 C) 30

D) 31 E) 40

Resolución

Se pide $K+A+R+E+N$.

Dato:

$$\overline{KENAR}\cdot\underbrace{99999}_{\text{máximo número de 5 cifras}}=...12345$$

$$\overline{KENAR}(100000-1)=...12345$$

$$\overline{KENAR00000}-\overline{KENAR}=...12345$$

Ordenamos en forma vertical la operación

$$\begin{array}{r} \overline{KENAR^{1}0^{1}0^{1}0^{1}0^{1}0}\,- \\ \overline{K\,E\,N\,A\,R} \\ \hline ....1\;2\;3\;4\;5 \end{array}$$

de donde

$10-R=5\rightarrow R=5$

$9-A=4\rightarrow A=5$

$9-N=3\rightarrow N=6$

$9-E=2\rightarrow E=7$

$9-K=1\rightarrow K=8$

Finalmente, $K+A+R+E+N=31$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

Si $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0$, halle y.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) todas las anteriores

Resolución

Se pide valor de y

En el dato

$$x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0$$

$$\underline{xy}-\cancel{xz}+\underline{yz}-\underline{yx}+\cancel{zx}-\underline{zy}=0$$

Factorizamos lo que se indica

$y(x-z)+y(z-x)=0$

$y(x-z+z-x)=0$

$y(0)=0$ Ecuación compatible indeterminada

Por lo tanto, y toma infinitos valores (1; 2; 3; 4; ...).

Clave **E**

PROBLEMA N.° 13

Si $x^2=3x-1$, halle $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

A) 27 B) 9 C) 18

D) 24 E) 21

Resolución

Se pide hallar el valor de $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

Dato: $x^2=3x-1$

Recuerda

La forma abreviada del binomio suma al cubo es

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

Entonces, del dato

$x^2=3x-1\quad(x\neq 0)$

Multiplicamos por $\dfrac{1}{x}$: $x=3-\dfrac{1}{x}$

$x+\dfrac{1}{x}=3$

Elevamos al cubo (forma abreviada)

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\underbrace{(x)\left(\frac{1}{x}\right)}_{1}\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{3}=3^3$$

$$\therefore\ x^3+\frac{1}{x^3}=18$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

Halle el valor de x para que verifique

$$\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}=4$$

Dé como respuesta $x-5$.

A) 11 B) 44 C) 95
D) 76 E) 164

Resolución

Se pide el valor de $x-5$.

Dato:

$$\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}=4$$

Elevamos al cubo (forma abreviada) el dato

$$\left(14+\cancel{\sqrt{x}}\right)+\left(14-\cancel{\sqrt{x}}\right)+3\underbrace{\left(\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\right)}_{\text{índice común}}$$

$$\ldots\underbrace{\left(\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\right)}_{4\text{ (dato)}}=4^3$$

$$28+3\left(\sqrt[3]{\left(14+\sqrt{x}\right)\left(14-\sqrt{x}\right)}\right)(4)=64$$

$$12\left(\sqrt[3]{\left(14^2-x\right)}\right)=36$$

$$\sqrt[3]{196-x}=3$$

Elevamos al cubo

$$196-x=3^3$$

$$\rightarrow\ x=169$$

Luego

$$\therefore\ x-5=164$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 15

Si $x^2+y^2=20$
calcule $K=(x+y)^2+(x-y)^2$

A) 20 B) 40 C) 30
D) 50 E) $\sqrt{20}$

Resolución

Se pide valor de K

$$K=(x+y)^2+(x-y)^2$$

Por la 1.ª identidad de Legendre

$$K=2\underbrace{(x^2+y^2)}_{20\text{ (dato)}}$$

$$\therefore\ K=40$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Un matemático tiene 3 números; luego los suma de 2 en 2 y obtiene otros tres números, que son 13, 17 y 24. Halle el mayor de los tres.

A) 3
B) 15
C) 14
D) 16
E) 10

Resolución

Se pide el mayor de 3 números.

Sean *a*, *b* y *c* los 3 números.

Del dato del problema

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & a+b=13 \\ \text{(II)} & a+c=17 \\ \text{(III)} & \underline{b+c=24} \end{array}\right| +$$

$$2(a+b+c)=54$$

$$\underbrace{a+b}_{13\,(\text{de I})}+c=27$$

$\therefore$ $c=14$ (el mayor)

Clave C

PROBLEMA N.° 17

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}=\frac{b}{c}$ y $a\cdot b\cdot c=27$

calcule el valor de $K=a+b+c$

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 18

Resolución

Se pide el valor de $K=a+b+c$

Datos:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{a}=\frac{b}{c} \qquad \text{(I)}$$

y $a\cdot b\cdot c=27$ (II)

Buscaremos relacionar (I) y (II)

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}=\frac{b}{c}=K$

$\rightarrow \frac{a\cdot c\cdot b}{b\cdot a\cdot c}=K^3$ (Propiedad)

$K^3=1$

$\rightarrow K=1$

Luego $a=b=c$

En (II)

$a\cdot b\cdot c=27$

$\rightarrow$ $a=b=c=3$

$\therefore$ $K=a+b+c=9$

Clave C

PROBLEMA N.° 18

Efectúe $E=\frac{(12345)^2-(12343)^2}{10^4+2344}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Se pide el resultado de

$$E=\frac{(12345)^2-(12343)^2}{10^4+2344}$$

De la diferencia de cuadrados, tenemos

$$E=\frac{(12345+12343)(12345-12343)}{10000+2344}$$

$$E=\frac{\overset{2}{\cancel{24688}}\,(2)}{\cancel{12344}}$$

$\therefore$ $E=4$

Clave D

PROBLEMA N.° 19

Simplifique

$$S=\left[\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}\right]\cdot\left[\sqrt{a^2-b}\right]+b$$

A) a B) a^2 C) $a/2$
D) $2b$ E) $2a$

Resolución

Se pide simplificar la expresión S

$$S=\Big[\underbrace{\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)}_{\text{índice común}}\Big]\cdot\left[\sqrt{a^2-b}\right]+b$$

$$S=\left[\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}\right]\cdot\left[\sqrt{a^2-b}\right]+b$$

$$S=\left(\sqrt{a^2-b}\right)\left(\sqrt{a^2-b}\right)+b$$

$$S=\left(\sqrt{a^2-b}\right)^{\cancel{2}}+b$$

$\therefore\ S=a^2$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 20

Si $(+)(+)=(-)(-)$, calcule el valor de

$$A=\left[\frac{ENERO}{ERA}+\frac{DINERO}{DIRA}+\frac{MASA}{AMENOS}\right]^5$$

A) 81 B) 64 C) 246
D) 0 E) 243

Resolución

Del dato

$$(+)(+)=(-)(-)$$

$$(\cancel{M}A\cancel{S})\cdot(\cancel{M}A\cancel{S})=(\cancel{M}ENO\cancel{S})\cdot(\cancel{M}ENO\cancel{S})$$

$$A\cdot A=ENO\cdot ENO$$

$$\rightarrow\ A=ENO$$

Aplicamos en

$$A=\left[\frac{\cancel{E}\,\cancel{N}ER\cancel{O}}{ER\cancel{A}}+\frac{DI\cancel{N}\,\cancel{E}R\cancel{O}}{DIR\cancel{A}}+\right.$$

$$\left.\dots+\frac{M\cancel{A}S\cancel{A}}{\cancel{A}M\cancel{E}\,\cancel{N}\,\cancel{O}S}\right]^5$$

Efectuamos

$$A=\left[\frac{ER}{ER}+\frac{DIR}{DIR}+\frac{MS}{MS}\right]^5$$

$$A=[1+1+1]^5$$

$$A=3^5$$

$\therefore\ A=243$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 21

Si $\sqrt{-1}=i$, calcule el valor de
$A=[(1-\text{i})^{108}-(1+\text{i})^{108}]^{1996}$

A) 1 B) $2(2^{28})$ C) 0
D) 2^{54} E) -2^{5994}

Resolución

Se pide el valor de

$$A=\left[(1-i)^{108}-(1+i)^{108}\right]^{1996}\quad;\quad i=\sqrt{-1}$$

Descomponemos el exponente 108 de manera que

$$A=\left[\left((1-i)^2\right)^{54}-\left((1+i)^2\right)^{54}\right]^{1996}$$

$$A=\left[\left(\cancel{1^2}-2(1)(i)+\cancel{i^2}\right)^{54}-\left(\cancel{1^2}+2(1)(i)+\cancel{i^2}\right)^{54}\right]^{1996}$$

$$A=\Big[\underbrace{(-2i)}_{\substack{\text{signo negativo}\\ \text{exponente par}}}^{54}-(2i)^{54}\Big]^{1996}$$

$$A=\left[\cancel{(2i)^{54}}-\cancel{(2i)^{54}}\right]^{1996}$$

$\therefore\ A=0$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

Si $\left(\frac{x}{y}\right)^a+\left(\frac{y}{x}\right)^a=731$, calcule $\mathrm{L}=\sqrt[3]{\frac{x^a-y^a}{\sqrt{x^a\cdot y^a}}}$

A) ±2 B) ±3 C) 7
D) ±11 E) 9

Resolución

Se pide calcular el valor de $L=\sqrt[3]{\frac{x^a-y^a}{\sqrt{x^a\cdot y^a}}}$

Del dato:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a+\left(\frac{y}{x}\right)^a=731$$

Efectuamos

$$\frac{x^a}{y^a}+\frac{y^a}{x^a}=731$$

$$\frac{\left(x^a\right)^2+\left(y^a\right)^2}{x^ay^a}=731$$

$$(x^a)^2+(y^a)^2=731x^ay^a$$

Sumamos $-2x^ay^a$ m. a. m.

$$\underbrace{\left(x^a\right)^2-2x^ay^a+\left(y^a\right)^2}_{\text{TCP}}=729x^ay^a$$

$$(x^a-y^a)^2=729x^ay^a$$

$$\sqrt{}:\quad x^a-y^a=\pm27\sqrt{x^ay^a}$$

Reemplazamos en

$$L=\sqrt[3]{\frac{\pm27\,\cancel{\sqrt{x^ay^a}}}{\cancel{\sqrt{x^ay^a}}}}$$

$\therefore\ L=\pm3$

Clave B

PROBLEMA N.° 23

Halle K en

$$\left(\sqrt[K+1]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[K-1]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)=\sqrt[48]{\left(5+\sqrt{24}\right)^7}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

Resolución

Se pide valor de K en

$$\left(\sqrt[K+1]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[K-1]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)=\sqrt[48]{\left(5+\sqrt{24}\right)^7}$$

Por la teoría de exponentes

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{K+1}}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{K-1}}=\sqrt[48]{\left(5+\sqrt{24}\right)^7}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{1}{K+1}+\frac{1}{K-1}}=\sqrt[48]{\left(5+\sqrt{4\times6}\right)^7}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{2K}{K^2-1}}=\sqrt[48]{\left(5+2\sqrt{6}\right)^7}$$

$$\left((\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\right)^{\frac{K}{K^2-1}}=(5+2\sqrt{6})^{\frac{7}{48}}$$

Resolvemos la potencia con exponente 2

$$(5+2\sqrt{6})^{\frac{K}{K^2-1}}=(5+2\sqrt{6})^{\frac{7}{48}}\ \text{(Bases iguales)}$$

$$\rightarrow\quad\frac{K}{K^2-1}=\frac{7}{48}$$

$\therefore\ K=7$

Clave E

PROBLEMA N.° 24

Halle la suma de cifras de $R=(10^{30}+1)(10^{30}-1)$

A) 630 B) 540 C) 360
D) 270 E) 300

Resolución

Se pide la suma de cifras del resultado de

$$R=(10^{30}+1)(10^{30}-1)$$

Operamos en R, teniendo

$$R=(10^{30})^2-1^2$$

$$R=10^{60}-1$$

Resolvemos

$$R=\underbrace{1000...000}_{60\text{ ceros}}-1$$

$$R=\underbrace{999...999}_{60\text{ cifras}}$$

Luego

$$\underset{\text{de } R}{S_{\text{cifras}}}=\underbrace{9+9+...+9+9}_{60\text{ sumandos}}$$

$\therefore\ \underset{\text{de } R}{S_{\text{cifras}}}=540$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

Si $3=1$,

calcule el valor de

$$A=\frac{3+3+3+...(8K+10\text{ veces})}{3+3+3+...(18K+1\text{ veces})}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Se pide el valor de la expresión

$$A=\frac{3+3+3+...(8K+10\ \text{ veces})}{3+3+3+...(18K+1\ \text{ veces})}$$

Dato: $3=1$

Reducimos la expresión

$$A=\frac{\cancel{3}(8K+10)}{\cancel{3}(18K+1)}$$

Para utilizar el dato, hacemos

$$A=\frac{(3(2)+2)K+3(3)+1}{3(3)(2)K+1}$$

Reemplazamos el dato

$$A=\frac{(1(2)+2)K+1(1)+1}{1(1)(2)K+1}$$

$$A=\frac{4K+2}{2K+1}=\frac{2(2K+1)}{2K+1}$$

$\therefore\ A=2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 26

Si $x^y=y^x$; x e $y\in\mathbb{Z}^+$, $x\neq y$,

calcule $(y-x)^{(x+y)}$

A) 2 B) 4 C) 16
D) 32 E) 64

Resolución

Se pide resultado de $(y-x)^{(x+y)}$

Del dato:

$x^y=y^x$; x e $y\in\mathbb{Z}^+\wedge x\neq y$

$2^4=4^2$ (únicos valores enteros positivos que verifican)

$\rightarrow\ x=2\wedge y=4$ (también puede ser $x=4\wedge y=2$)

Luego,

$$(y-x)^{(x+y)}=64$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 27

Calcule la suma de cifras del resultado de

$$E=\sqrt{1\times3\times5\times17\times257+1}$$

A) 6 B) 12 C) 10
D) 16 E) 13

Resolución

Se pide la suma de cifras del resultado de

$$E=\sqrt{1\times3\times5\times17\times257+1}$$

Los dos primeros factores los expresamos, así

$$E=\sqrt{\underbrace{(2-1)(2+1)}\times5\times17\times257+1}$$

$$E=\sqrt{\underbrace{\left(2^2-1\right)\times\left(2^2+1\right)}\times17\times257+1}$$

$$E=\sqrt{\underbrace{\left(2^4-1\right)\times\left(2^4+1\right)}\times257+1}$$

$$E=\sqrt{\left(2^8-1\right)\times\left(2^8+1\right)+1}$$

$$E=\sqrt{2^{16}-1+1}=256$$

Luego

$\therefore\ \underset{\text{de } E}{S_{\text{cifras}}}=2+5+6=13$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 28

Calcule la suma de cifras del resultado de

$$A=\frac{13}{15}+\frac{1313}{1515}+\frac{131313}{151515}+\ldots+\frac{\overbrace{1313\ldots13}^{60\text{ cifras}}}{\underbrace{1515\ldots15}_{60\text{ cifras}}}$$

A) 6 B) 7 C) 9
D) 8 E) 10

Resolución

Se pide la suma de cifras del resultado de

$$A=\frac{13}{15}+\frac{1313}{1515}+\frac{131313}{151515}+\ldots+\frac{\overbrace{1313\ldots13}^{60\text{ cifras}}}{\underbrace{1515\ldots15}_{60\text{ cifras}}}$$

Primero, hay que conocer la cantidad de sumandos de

$$A=\overset{1.°}{\frac{13}{\underbrace{15}_{2\text{ cifras}}}}+\overset{2.°}{\frac{1313}{\underbrace{1515}_{4\text{ cifras}}}}+\overset{3.°}{\frac{131313}{\underbrace{151515}_{6\text{ cifras}}}}+\overset{\ldots}{\ldots}+\overset{30.°}{\frac{1313\ldots13}{\underbrace{1515\ldots15}_{60\text{ cifras}}}}$$

la mitad del número de cifras
indica la posición del sumando

Entonces, *A* tiene 30 sumandos.

Recuerda

$\underbrace{21}\underbrace{21}=21(101)$

$\underbrace{32}\underbrace{32}\underbrace{32}=32(10101)$

En la expresión, se tiene

$$A=\underbrace{\frac{13}{15}+\frac{13\cancel{(101)}}{15\cancel{(101)}}+\frac{13\cancel{(10101)}}{15\cancel{(10101)}}+\ldots+\frac{13\cancel{(101\ldots101)}}{15\cancel{(101\ldots101)}}}_{30\text{ sumandos}}$$

$$A=\frac{13}{15}(30)=26$$

$\therefore\ \underset{\text{de } A}{S_{\text{cifras}}}=2+6=8$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

Calcule el valor de x^2+1, si

$$2(5x^2+15)+\sqrt{5(6+2x^2)}=420$$

A) 35 B) 36 C) 37
D) 38 E) 39

Resolución

Se pide el valor de x^2+1

Se sabe que

$$2(5x^2+15)+\sqrt{5(6+2x^2)}=420$$

$$(10x^2+30)+\sqrt{30+10x^2}=420 \qquad \text{(I)}$$

Hacemos que

$$\underbrace{\sqrt{10x^2+30}}_{\text{positivo}}=a>0$$

Reemplazamos en (I) teniendo

$$a^2+a=420$$

$$a^2+a-420=0$$

$$\begin{array}{lll} a & +21 & \rightarrow\ a=-21(<0) \\ a & -20 & \rightarrow\ a=20 \end{array}$$

Luego

$$a=\sqrt{10x^2+30}=20$$

$$(\ )^2:\ \ 10x^2+30=400$$

$$\div 10:\ \ x^2+3=40$$

$$\therefore\ \ x^2+1=38$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

Si $x^{x^{x^7}}=7$, calcule el valor de

$$A=x^7+x^{x^7}+x^{x^{x^7}}+\ldots+\underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x^7}}}}}}_{n\text{ veces}}$$

A) n B) n^7 C) $7n$

D) $49n$ E) $14n$

Resolución

Se pide valor de la expresión A.

Del dato:

$$x^{x^{x^7}}=7 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[7]{7}}$$

se cumple para toda expresión de esa forma

Reemplazamos en

$$A=x^7+x^{x^7}+x^{x^{x^7}}+\ldots+\underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x^7}}}}}}_{n\text{ veces}}$$

Entonces

$$A=\underbrace{7+7+7+\ldots+7}_{n\text{ veces}}$$

$$\therefore\ \ A=7n$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 31

Si $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2$, halle $\dfrac{x}{x-4}$

A) 0 B) 1 C) 3/2

D) 2 E) A o C

Resolución

Se pide valor de $\dfrac{x}{x-4}$

En el dato:

$$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2$$

$$\underbrace{(x+2)^2-(x-2)^2}_{\substack{\text{Por 2.ª identidad}\\ \text{de Legendre}}}+\underbrace{(x+1)^2-(x-1)^2}_{\substack{\text{Por 2.ª identidad}\\ \text{de Legendre}}}=x^2$$

$$4(x)(2)+4(x)(1)=x^2$$

$$8x+4x=x^2$$

Pasando todo al segundo miembro

$$x^2-12x=0$$

$$x(x-12)=0$$

$$\rightarrow\ \ x=0\ \vee\ x=12$$

Luego
si $x=0$

$$\frac{x}{x-4}=\frac{0}{0-4}=0$$

si $x=12$

$$\frac{x}{x-4}=\frac{12}{12-4}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ 0$ ó $\frac{3}{2}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 32

Calcule la suma de las cifras de N, luego de efectuar

$N=22\times202\times20002\times100000001$

A) 128 B) 140 C) 150
D) 138 E) 100

Resolución

Se pide la suma de cifras del resultado de N.
Del dato

$$N=22\times202\times20002\times100000001$$

$$N=4444\times20002\times100000001$$

$$N=88888888\times100000001$$

$$N=8888888888888888$$

$\therefore\ S_{\substack{\text{cifras}\\ \text{de } N}}=8(16)=128$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 33

Halle la suma de cifras del resultado de

$M=(5555556)^2-(4444445)^2$

A) 14 B) 12 C) 21
D) 20 E) 28

Resolución

Se pide la suma de cifras del resultado de

$$M=(5555556)^2-(4444445)^2$$

En M, descomponemos la diferencia de cuadrados:

$$M=(5555556+4444445)(5555556-4444445)$$

$$M=(10000001)(1111111)$$

$$M=\underbrace{1111111}_{7\text{ cifras}}\underbrace{1111111}_{7\text{ cifras}}$$

Luego

$\therefore\ S_{\substack{\text{cifras}\\ \text{de } M}}=1(14)=14$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

Calcule

$$R=\sqrt[3]{\frac{(323\times325+1)\times9\times111}{18^4\times37}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Se pide el valor de R

$$R=\sqrt[3]{\frac{(323\times 325+1)\times 9\times 111}{18^4\times 37}}$$

En R buscaremos simplificar algunos factores para no tener que realizar las operaciones indicadas, para ello hacemos lo siguiente:

$$R=\sqrt[3]{\frac{((324-1)(324+1)+1)\times 3^2\times 3\times 37}{(18^2)^2\times 37}}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{(324^2-\cancel{1}+\cancel{1})\times 3^3\times \cancel{37}}{324^2\times \cancel{37}}}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{(324)^2\times 3^3}{324^2}}$$

$\therefore\ R=3$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 35

Halle el resultado de

$C=2{,}52(0{,}16)^2+(0{,}16)^3+(0{,}84)^2\times(0{,}48)+(0{,}84)^3$

A) 5,25	B) 1	C) 3,87
D) 1,03		E) 2

Resolución

Se pide el resultado de

$C=2{,}52(0{,}16)^2+(0{,}16)^3+(0{,}84)^2\times(0{,}48)+(0{,}84)^3$

A la expresión C, por los exponentes y bases que presenta, se le puede dar la forma siguiente

$$\boxed{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3}$$

Veamos

$$C=3(0{,}84)(0{,}16)^2+(0{,}16)^3+(0{,}84)^2\times(3)(0{,}16)+(0{,}84)^3$$

Reordenamos los factores y sumandos

$C=(0{,}16)^3+3(0{,}16)^2(0{,}84)+3(0{,}16)(0{,}84)^2+(0{,}84)^3$

Luego

$C=(0{,}16+0{,}84)^3$

$\therefore\ C=1^3=1$

Clave ■

PROBLEMA N.° 36

Si $2^x=8^{y+1}$

$9^y=3^{x-9}$

halle $x+y$

A) 21	B) 6	C) 27
D) 18		E) 35

Resolución

Se pide $x+y$

Datos

$2^x=8^{y+1}$ (I)

$9^y=3^{x-9}$ (II)

Del dato (I)

$2^x=(2^3)^{y+1}$ (Potencia de potencia)

$2^x=2^{3y+3}\ \rightarrow\ x=3y+3$ (III)

Del dato (II)

$(3^2)^y=3^{x-9}$

$3^{2y}=3^{x-9}\ \rightarrow\ 2y=x-9$ (IV)

Luego (III)+(IV)

$\cancel{x}+2y=\cancel{x}+3y-9+3$

$y=6$

Reemplazamos en (III)

$x=21$

$\therefore\ x+y=27$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 37

Si $m-3n=4p$, calcule $E=\dfrac{p+n}{m-p}$

A) 1 B) 1/3 C) 3
D) 1/12 E) 1/4

Resolución

Se pide el valor de $E=\dfrac{p+n}{m-p}$

Dato: $m-3n=4p$

Del dato, despejamos m

$$m=4p+3n$$

$$-p:\ m-p=4p+3n-p$$

$$m-p=3p+3n$$

Factorizamos el 3

$$m-p=3(p+n)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{p+n}{m-p}=E$$

$$\therefore\quad E=\frac{1}{3}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 38

Si $x-y=3$, además $xy=-2$, calcule $E=x^4+y^4$.

A) 10 B) 15 C) 23
D) 13 E) 17

Resolución

Se pide el valor de $E=x^4+y^4$

Datos:

$x-y=3$ (I)

$xy=-2$ (II)

Para calcular lo pedido; empleamos los productos notables, en (I)

$$(x-y)^2=3^2$$

$$x^2-2\underbrace{xy}_{-2\text{ (dato)}}+y^2=9$$

$$x^2+4+y^2=9$$

$$x^2+y^2=5$$

Luego

$$(x^2+y^2)^2=5^2$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4=25$$

$$x^4+2(-2)^2+y^4=25$$

$$\therefore\quad x^4+y^4=17$$

Observación

En este tipo de ejercicios también se puede asignar valores numéricos enteros que verifiquen los datos.

Por ejemplo, en el ejercicio $x=2 \wedge y=-1$

$\rightarrow\ E=(2)^4+(-1)^4=17$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 39

Si $3a+2b+c=0$, calcule

$$E=\left(\frac{a+c}{a+b}\right)^{\left(\frac{b-c}{a+b}\right)}$$

A) 8 B) 4 C) −8
D) −4 E) 6

Resolución

Se pide valor de la expresión

$$E=\left(\frac{a+c}{a+b}\right)^{\left(\frac{b-c}{a+b}\right)}$$

Del dato:

$3a+2b+c=0$

Para obtener $a+c$ sumamos $-2a$ a cada miembro

$$a+2\widehat{b+c=-2}a$$

$$a+c=-2a-2b$$

Factorizamos

$$a+c=-2(a+b) \qquad \text{(I)}$$

Para obtener $b-c$, sumamos b a cada miembro del dato

$$3a+3b+\widehat{c=b}$$

Factorizamos

$$3(a+b)=b-c \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) y (II) en

$$E=\left(\frac{-2\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}}\right)^{\left(\frac{3\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}}\right)}$$

$\therefore\ E=(-2)^3=-8$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

Si $xy=z$

$yz=x$

$zx=y$

calcule

$$E=\frac{x^2+2y^2+3z^2}{xyz};\ xyz\neq 0$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución

Se pide calcular el valor de

$$E=\frac{x^2+2y^2+3z^2}{xyz}\ ;\ xyz\neq 0$$

Datos:

$xy=z$ (I)

$yz=x$ (II)

$zx=y$ (III)

(I) · (II) · (III)

$(xyz)^2=xyz$

$(xyz)^2-(xyz)=0$

$(xyz)(xyz-1)=0$

$\rightarrow\ \underset{\text{(Contradice dato)}}{xyz=0}\ \vee\ xyz=1$ (IV)

Luego

(I) en(IV): $\underbrace{xy}_{z}z=1\ \rightarrow\ z^2=1$

(II) en (IV): $x\underbrace{yz}_{x}=1\ \rightarrow\ x^2=1$

(III)) en (IV): $\underbrace{xyz}_{y}\ \rightarrow\ y^2=1$

Reemplazamos en

$$E=\frac{1+2(1)+3(1)}{1}$$

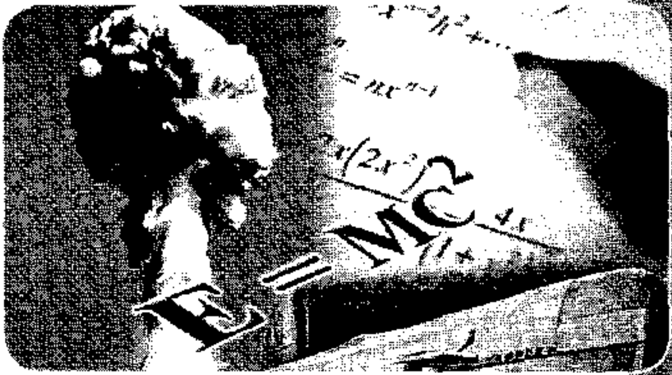
$\therefore\ E=6$

Clave **E**

Capítulo

5

Planteo de ecuaciones



En situaciones diarias podemos percibir la estrecha relación que existe entre la matemática y la realidad: cuando determinamos el tiempo a emplear en el día para actividades académicas, actividades personales, el tiempo que nos toma llegar a nuestro centro de estudios, la cantidad de ejercicios que pueden ser resueltos en un tiempo determinado, la ecuación que nos permitirá obtener el mayor beneficio en un negocio que emprendemos, etc. La matemática es parte de nuestra vida cotidiana, por ende, puede ser mejor comprendida si la extraemos de la realidad de la que proviene; es decir, si traducimos situaciones reales que involucren aspectos matemáticos al lenguaje propio de la matemática: las ecuaciones.

No es un proceso sencillo: Se necesita de mucha destreza y ejercitación. Por ello, este capítulo presenta diversas situaciones a modo de ejercicios extraídos de la realidad que serán resueltos partiendo de la correcta interpretación de los textos.

Capítulo **5**

Planteo de ecuaciones

PROBLEMA N.° 1

Elena repartió sus ahorros entre 15 mendigos. ¿Cuál es la mínima cantidad de dinero que pudo haber aumentado a lo que repartió para que cada mendigo reciba exactamente S/.10 más de lo que recibió?

A) S/.120 B) S/.140 C) S/.160
D) S/.130 E) S/.150

Resolución

Piden: ¿cuál es la mínima cantidad que se debe agregar a lo repartido para que cada mendigo reciba exactamente S/.10 más de lo que recibió?
Se conoce que son 15 mendigos a los cuales se les repartió una cierta suma de dinero. Si se desea que a cada uno le corresponda S/.10 más, se debe agregar (al monto total) $15\times10=$S/.150
Por lo tanto, la cantidad agregada, como mínimo, es S/.150.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 2

Se tiene un número impar, se le añade el par de números impares que le anteceden y los tres números pares que son inmediatamente anteriores a dicho número, dando un resultado de 939 unidades.
Halle la suma de cifras del número impar mencionado.

A) 26 B) 15 C) 13
D) 19 E) 20

Resolución

Piden hallar la suma de cifras del número impar mencionado.
Sea el número impar x.
Desarrollando el proceso indicado

$$x+\underbrace{(x-2)+(x-4)}_{\substack{\text{se le añade el par de}\\ \text{números impares que}\\ \text{le anteceden}}}+\underbrace{(x-1)+(x-3)+(x-5)}_{\substack{\text{se le añade 3 números}\\ \text{pares anteriores}}}=939$$

Resolviendo: $x=159$

Por lo tanto, la suma de cifras de x es 15.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 3

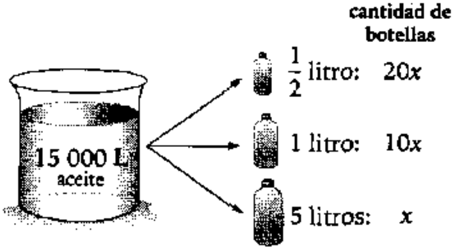
Para envasar 15 000 litros de aceite se disponen de botellas de 1/2 litro, 1 litro y 5 litros. Por cada botella de 5 litros, hay 10 de un litro y 20 de medio litro. Al terminar de envasar el aceite no sobró ninguna botella vacía. ¿Cuántas botellas habían en total?

A) 14 600 B) 18 600 C) 27 000
D) 24 200 E) 16 000

Resolución

Piden ¿cuántas botellas habían en total?
Datos: por cada botella de 5 litros, hay 10 de un litro y 20 de medio litro.

- Se sabe que:



- Con respecto al contenido total (en litros)

$$\frac{1}{2}\times(20x)+1\times(10x)+5\times(x)=15\,000$$

$$\rightarrow\ x=600$$

Por lo tanto, el total de botellas es
$31x=18\,600$.

Clave

PROBLEMA N.° 4

Sobre un estante se pueden colocar 24 libros de RM y 20 libros de RV o 36 libros de RM y 15 libros de RV. ¿Cuántos de RM, únicamente, entrarían en el estante?

A) 8 B) 24 C) 240 D) 120 E) 72

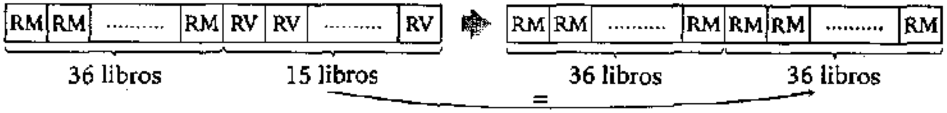
Resolución

Piden: ¿cuántos libros de RM, únicamente, entrarían en el estante?
Datos: en un estante se pueden colocar 24 libros de RM y 20 de RV o 36 libros de RM y 15 de RV.
Gráficamente

Con respecto al largo del estante: 24 RM+20 RV=36 RM+15 RV

$$\times3\left(\begin{array}{l}5\text{ RV}=12\text{ RM}\\15\text{ RV}=36\text{ RM}\end{array}\right)\times3$$

Analizamos el estante (II)



Por lo tanto, en el estante entran, exactamente, 72 libros de RM.

Clave

PROBLEMA N.° 5

Con 195 soles se compraron chompas de 7; 8 y 13 soles, respectivamente. ¿Cuántas chompas se compraron si en total se compraron el máximo número de chompas y por lo menos se compró una de cada precio?

A) 23 B) 30 C) 24
D) 26 E) 25

Resolución

Piden: ¿cuántas chompas se compraron como máximo?

Dato: se cuenta con S/.195 para comprar chompas de S/.7; S/.8 y S/.13, por lo menos una de cada precio.

Consideramos la siguiente compra:

Precio	S/.7	S/.8	S/.13	
N.° de chompas	x	y	z	
Gasto total	$7x$	$8y$	$13z$	=S/.195

Se plantea

$$7x+8y+13z=195$$

$$7(x+y+z)+y+6z=195$$

Se desea obtener la máxima cantidad de chompas, y ello se logrará adquiriendo menor cantidad de las chompas más costosas, así

$$7(x+y+z)+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{y}+6\underset{\underset{2}{\downarrow}}{z}=195$$

Despejamos

$$(x+y+z)_{\text{máx}}=26$$

Por lo tanto, se compraron 26 chompas como máximo.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Con motivo de su cumpleaños, los hijos de la señora María decidieron hacerle un regalo. Magaly propuso dar cada uno S/.6, pero faltaron S/.8 para comprar el regalo, por lo que decidieron optar por contribuir cada uno con S/.7, de esta manera compraron un regalo cuyo precio era la mitad del primero y aún sobraron S/.20. ¿Cuál es la suma de los precios de los dos regalos?

A) S/.44 B) S/.22 C) S/.60
D) S/.72 E) S/.66

Resolución

Piden la suma de los precios de los 2 regalos.

Sea el número de hijos: x.

- Magaly propuso dar cada uno S/.6, pero faltaron S/.8 para comprar el regalo.

Se deduce que

costo del regalo inicial $=6x+8$

Luego, decidieron contribuir con S/.7 cada uno, de esa forma compraron un regalo cuyo precio era la mitad del primero y aún sobró S/.20.

Se deduce que

costo del regalo final $=3x+4$

Además

$$\underbrace{7x}_{\substack{\text{monto}\\ \text{recaudado}\\ \text{finalmente}}} = \underbrace{(3x+4)}_{\substack{\text{regalo}\\ \text{comprado}}} + \underbrace{20}_{\text{sobró}}$$

Resolvemos: $x=6$

Por lo tanto, la suma de los precios de los 2 regalos es

$$\underbrace{(6x+8)}_{44}+\underbrace{(3x+4)}_{22}=\text{S/.}66$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

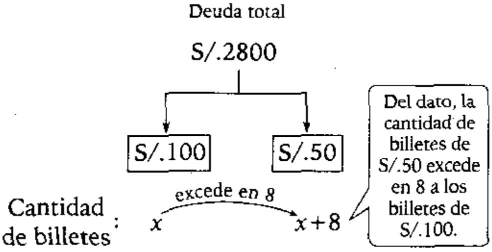
Con billetes de 100 soles y de 50 soles se pagó una deuda de 2800 soles. El número de billetes de 50 soles excede en 8 al número de billetes de 100 soles. Si los billetes que tenemos de 100 soles los contáramos como billetes de 50 soles, y viceversa, ¿qué cantidad de dinero tendríamos?

A) S/.4500 B) S/.2900 C) S/.3200
D) S/.3800 E) S/.4200

Resolución

Piden: ¿qué cantidad de dinero tendríamos si los billetes de S/.100 los contáramos como billetes de S/.50 y viceversa?

Se sabe que



Deuda total

$$100x+50(x+8)=2800$$

$$\rightarrow \quad x=16$$

En el supuesto planteado

	S/.100	S/.50
cantidad de billetes:	$\underbrace{x+8}_{24}$	$\underbrace{x}_{16}$

Dinero total=24×(S/.100)+16×(S/.50)=S/.3200

Por lo tanto, en el supuesto planteado tendría S/.3200.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Un comerciante tiene al inicio del día 8 lapiceros de 10 soles cada uno y 4 lapiceros de 20 soles cada uno. Si al final del día tiene 120 soles, ¿cuántos lapiceros le sobran si le quedan por lo menos un lapicero de cada precio?

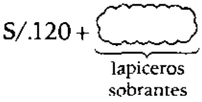
A) 4 B) 5 C) 6
D) 2 E) 3

Resolución

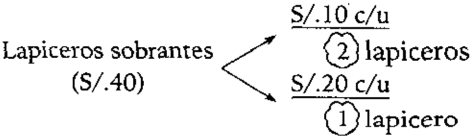
Piden: al final del día, ¿cuántos lapiceros le sobran al comerciante?
Al final del día

	S/.10 c/u	S/.20 c/u
N.° de lapiceros	8	4

El capital inicial es de S/.80+S/.80=S/.160
Al final del día



Se deduce que los lapiceros sobrantes deben estar valorizados en S/.40.
Por dato: debe quedar al menos un lapicero de cada precio.



Por lo tanto, al final del día quedan 3 lapiceros sin vender.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 9

En una granja, por cada gallina hay tres pavos y por cada pavo hay 4 patos. Si en total se han contado 160 patas de animales, ¿cuántos pavos hay?

A) 14 B) 10 C) 15
D) 20 E) 8

Resolución

Piden la cantidad de pavos.
Se sabe que:

- Por cada gallina hay 3 pavos

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{N.° de gall.} & \textbf{N.° de pavos} \\ \rightarrow & \boxed{1} \xrightarrow[\times 3]{} & \boxed{3} \end{array}$$

- Por cada pavo hay 4 patos

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{N.° de pavos} & \textbf{N.° de patos} \\ \rightarrow & \textcircled{1} \xrightarrow[\times 4]{} & \textcircled{4} \end{array}$$

De ambas relaciones se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \textbf{N.° de gall.} & \xrightarrow{\times 3} & \textbf{N.° de pavos} & \xrightarrow{\times 4} & \textbf{N.° de patos} \\ x & & 3x & & 12x \end{array}$$

Con respecto a la cantidad de extremidades, se tiene

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Extr. de gall.} & \textbf{Extr. de pavos} & \textbf{Extr. de patos} \\ \underline{2}x & \underline{2}(3x) & \underline{2}(12x) \end{array}$$

Total de extremidades: $32x=160 \rightarrow x=5$

Por lo tanto, la cantidad de pavos es $3x=15$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Un caminante ha recorrido 1000 metros, unas veces avanzando, otras retrocediendo. Si solo ha avanzado 350 metros, ¿cuántos metros recorrió retrocediendo?

A) 300 m B) 425 m C) 325 m
D) 280 m E) 345 m

Resolución

Piden: ¿cuántos metros recorrió retrocediendo?
Datos:

Recorrido total=1000 m
Avance final=350 m

Se considera en el problema que el caminante avanza y retrocede durante su recorido, entonces

$$\begin{array}{c}\text{Recorrido}\\ \text{total}\end{array} = \begin{array}{c}\text{longitud}\\ \text{avanzada}\end{array} + \begin{array}{c}\text{longitud}\\ \text{retrocedida}\end{array} = 1000\text{ m}$$

$$\begin{array}{c}\text{Avance}\\ \text{final}\end{array} = \begin{array}{c}\text{longitud}\\ \text{avanzada}\end{array} - \begin{array}{c}\text{longitud}\\ \text{retrocedida}\end{array} = 350\text{ m}$$

De lo que longitud retrocedida=325 m

Por lo tanto, la longitud que dicho caminante recorrió retrocediendo es 325 m.

Clave **C**

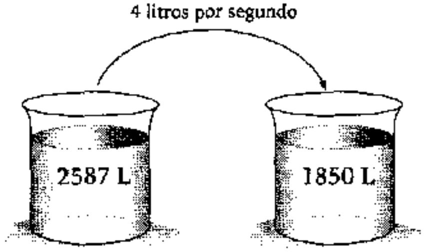
PROBLEMA N.° 11

Dos depósitos contienen 2587 y 1850 litros de agua y con una bomba se traslada del primero al segundo 4 litros por segundo. ¿Después de cuánto tiempo uno contendrá el doble de litros que el otro?

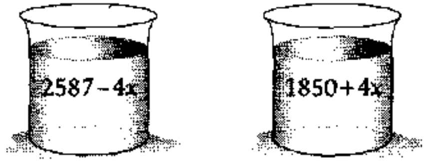
A) 4 min 37 s B) 3 min 21 s
C) 4 min 38 s
D) 5 min 24 s E) 3 min 42 s

Resolución

Piden: ¿después de cuánto tiempo un recipiente contendrá el doble de litros que el otro?
Dato: se traslada del primer al segundo recipiente 4 litros por segundo.
Gráficamente



Luego de x segundos



Se desea que

$$1850+4x=2\times(2587-4x)$$
$$\rightarrow\ x=277$$

Por lo tanto, deben transcurrir

277 seg <> 4 min 37 s

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

Un maestro y su ayudante trabajan juntos. El primero gana 25 soles por día más que el segundo. Si después de trabajar cada uno el mismo número de días, el primero recibe 1050 soles y el segundo, 875 soles; ¿cuál es el jornal del ayudante?

A) S/.120 B) S/.115 C) S/.152
D) S/.125 E) S/.130

Resolución

Piden: ¿cuál es el jornal del ayudante?
Se conoce que

	Maestro	**Ayudante**
Jornal diario	S/.$x+25$	S/.x
Sueldo total	S/.1050	S/.875
N.° de días trabajados	$\frac{1050}{x+25}$	$\frac{875}{x}$

Por el dato: ambos trabajan una misma cantidad de días, se tiene

$$\frac{1050}{x+25}=\frac{875}{x}$$
$$\rightarrow\ x=\text{S/.}125$$

Por lo tanto, el jornal (sueldo diario) del ayudante es S/.125.

Clave **D**

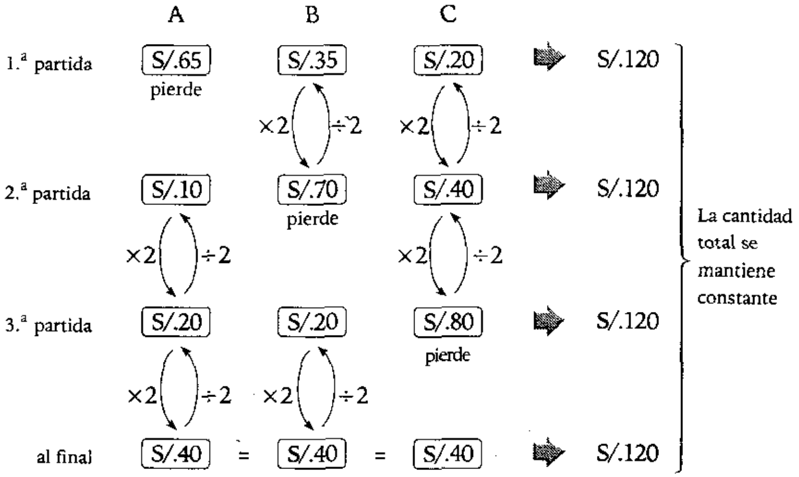
PROBLEMA N.° 13

Tres jugadores, A, B y C, convienen en que el perdedor de cada partida duplicará el dinero de los otros dos. Pierden una partida cada uno en orden alfabético y al final cada uno se queda con 40 soles. ¿Con cuánto dinero empezó cada uno?

A) 65; 35 y 20 soles.
B) 100; 30 y 18 soles.
C) 80; 45 y 23 soles.
D) 96; 30 y 14 soles.
E) 41; 23 y 16 soles.

Resolución

Piden: ¿con cuánto dinero empezó cada uno?
Datos: tres jugadores A, B y C, convienen en que el perdedor de cada partida duplicará el dinero de los otros dos.
Analizamos el desarrollo de las partidas, considerando que cada uno perdió una vez y en orden alfabético.



Por lo tanto, las cantidades iniciales de cada jugador son: S/.65; S/.35 y S/.20

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

La regla de juego de cierta competencia de azar es que el perdedor de cada partida duplique el dinero de los otros participantes y además les dará S/.10. Si hay 3 personas que están jugando y cada uno pierde una partida y al final tienen cada uno S/.70, halle el dinero inicial del participante que tuvo mayor cantidad.

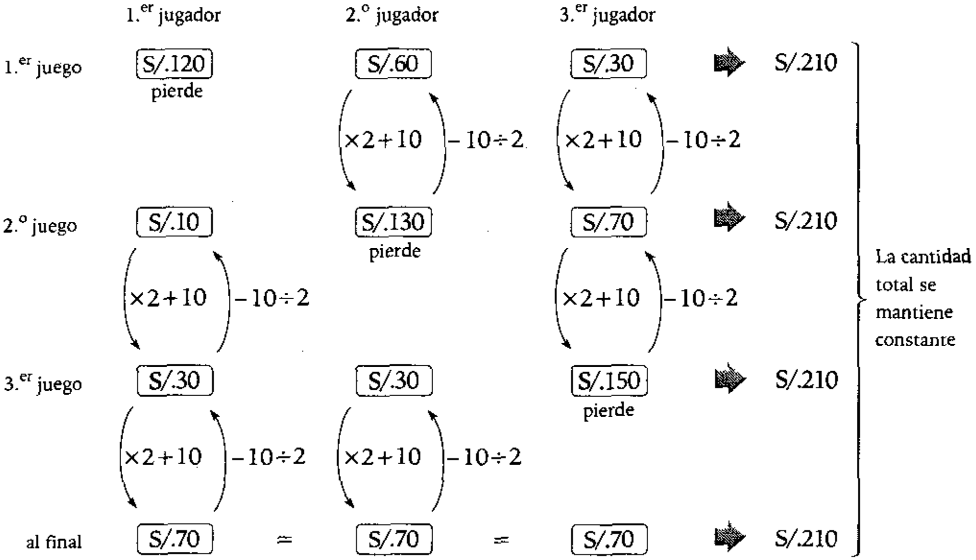
A) S/.120	B) S/. 180	C) S/.110
D) S/.140		E) S/.220

Resolución

Piden hallar el dinero inicial del participante que tuvo mayor cantidad.
Dato:

- El perdedor de cada partida duplica el dinero de los participantes y además agrega S/.10.

Si cada uno perdió un juego, se tiene



Por lo tanto, el participante con mayor cantidad de dinero al inicio tenía S/.120

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

Maribel va al cine con sus primas y al querer sacar entradas para mezanine de 30 soles cada una, observa que le falta dinero para 3 de ellas, por tal motivo tiene que sacar entradas de 15 soles cada una, entrando todas al cine y sobrándole aún 30 soles para las gaseosas. ¿Cuántas primas fueron al cine con Maribel?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución

Piden: ¿cuántas primas fueron al cine con Maribel?
Sea el número de primas (incluida Maribel) $=x$

- Al querer sacar entradas de S/.30 cada una, falta dinero para 3 de ellas.

Se deduce que

$$\text{Dinero total} = 30\underbrace{(x-3)}_{\text{N.° de entradas}}$$

Luego

- Se sacan entradas de S/.15 cada una, entrando todas al cine y sobrándole aún S/.30.

Se deduce que

$\text{Dinero total} = 15x+30$

Igualamos el total de dinero

$30(x-3)=15x+30$

$\rightarrow\ x=8$

Por lo tanto, son 8 primas, es decir, Maribel fue al cine con sus 7 primas.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Si compro 2 revistas gastaría 2 soles más que si comprara 3 periódicos. Pero si comprara 5 periódicos gastaría 2 soles más que si comprara 2 revistas. ¿Cuánto cuesta cada periódico?

A) S/.4
B) S/.3
C) S/.5
D) S/.1,5
E) S/.2

Resolución

Piden: ¿cuánto cuesta cada periódico?
Sea: el precio de c/periódico=S/.x
el precio de c/revista=S/.y

Por dato:

- Precio de 2 revistas–precio de 3periód.=S/.2
  $2y-3x=2$ (I)
- Precio de 5 periód.–precio de 2 revistas=S/.2
  $5x-2y=2$ (II)

De (I) y (II):
x=S/.2 ; y=S/.4

Por lo tanto, cada periódico cuesta S/.2.

Clave **E**

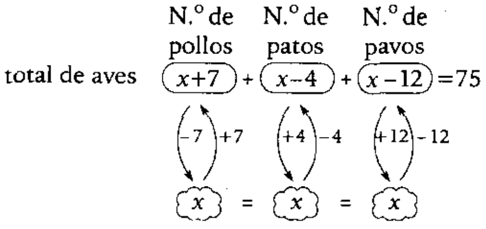
PROBLEMA N.° 17

Entre pollos, patos y pavos, un granjero tiene en total 75 aves. Si tuviera 12 pavos más, 4 patos más y 7 pollos menos, tendría la misma cantidad de aves de cada especie. El número de pollos que tiene es

A) 42 B) 33 C) 39
D) 35 E) 40

Resolución

Piden cantidad de pollos.
Se sabe que



De lo que
$(x+7)+(x-4)+(x-12)=75$
$\rightarrow\ x=28$

Por lo tanto, la cantidad de pollos es $x+7=35$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

Milagros viaja en el último vagón de un tren, el cual tiene 9 vagones; cuando avanza de un vagón a otro tiene que pagar S/.16 y cuando retrocede de un vagón a otro le pagan S/.12. Si para llegar al primer vagón realizó 24 cambios de vagones, calcule la cantidad que tenía inicialmente si es igual a la suma de lo que pagó y cobró.

A) S/.350 B) S/.352 C) S/.298 D) S/.344 E) S/.426

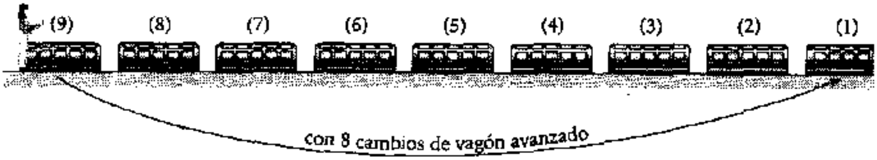
Resolución

Piden la cantidad que tenía inicialmente.

Datos:

- Cuando avanza de un vagón a otro paga S/.16.
- Cuando retrocede de un vagón a otro le pagan S/.12.
- Para llegar al primer vagón realiza 24 cambios de vagón.

Graficamos



Sea:

x cambios de vagón avanzando

y cambios de vagón retrocediendo

Para que Milagros llegué al vagón 1 debe cumplirse que:

$x-y=8$ (I)

Además, en total se realizaron 24 cambios, entonces:

$x+y=24$ (II)

De (I) y (II):

$x=16;\ y=8$

Entonces

- Pagó en total$=16\times16=$S/.256
- Cobró en total$=8\times12=$S/.96

Por dato:

$$\text{Cantidad inicial} = \underbrace{\text{pagó}}_{S/.256} + \underbrace{\text{cobró}}_{S/.96} = S/.352$$

Por lo tanto, la cantidad que tenía inicialmente era S/.352.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

En un salón de clases, hay 6 asientos desocupados, 9 estudiantes sentados y 3 estudiantes de pie al lado de la pizarra. Si 7 estudiantes salen del salón y 8 entran, ¿cuántos asientos desocupados habrá cuando se sienten todos los alumnos?

A) 4
B) 3
C) 2
D) 1
E) 0

Resolución

Piden: ¿cuántos asientos desocupados habrá cuando se sienten todos los alumnos?

Inicialmente hay 6 asientos desocupados, 9 estudiantes sentados y 3 estudiantes de pie, si todos se hubiesen sentado sobrarían solo 3 asientos desocupados.
Ahora, si 7 estudiantes salen del salón y 8 entran, habría un estudiante más en el salón, por lo tanto sobraría un asiento menos (2).

Por lo tanto, habría solo 2 asientos desocupados.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

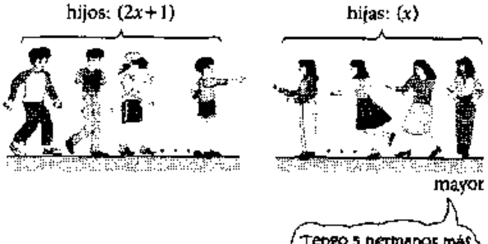
En una familia, el hermano mayor dice: *Mis hermanos son el doble de mis hermanas.* Y la hermana mayor dice: *Tengo 5 hermanos más que hermanas.* ¿Cuántas hijas tiene la familia?

A) 9 B) 11 C) 3
D) 10 E) 8

Resolución

Piden el número de hijas.
Analizamos la composición de dicha familia

Luego



$$\rightarrow \quad \underbrace{(2x+1)}_{\text{hermanos}} - \underbrace{(x-1)}_{\text{hermanas}} = 5$$

$$\rightarrow \quad x=3$$

Por lo tanto, el número de hijas es $x=3$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 21

Pagué 12 centavos por los duraznos que compré al almacenero, explicó la cocinera, *pero me dio dos duraznos extra, porque eran muy pequeños, eso hizo que en total pagara un centavo menos por docena que el primer precio que me dio*.

¿Cuántos duraznos compró la cocinera?

A) 14 B) 20 C) 18
D) 12 E) 16

Resolución

Piden: ¿cuántos duraznos compró la cocinera?

Representando gráficamente la información brindada:

	Inicialmente	Al final
Costo total	12 cent.	12 cent.
N.° de duraznos	x	$x+2$
Precio de cada durazno	$\frac{12}{x}$ cent.	$\frac{12}{x+2}$ cent.

Por dato: al final pagué un centavo menos por cada docena de duraznos.

$$\rightarrow \quad \begin{matrix}\text{Rebaja por}\\ \text{cada durazno}\end{matrix} = \frac{1}{12}\text{ cent.}$$

Entonces

$$\frac{12}{x} - \frac{12}{x+2} = \frac{1}{12}$$

$$\rightarrow \quad x = 16$$

Por lo tanto, la cocinera compró 16 duraznos.

Observación

Solo se considera los 16 duraznos comprados ya que los 2 duraznos extras son parte de la oferta (regalo).

Clave **E**

PROBLEMA N.° 22

Si tú me dieras dos de tus canicas, tendríamos la misma cantidad; en cambio, si yo te diera tres de las mías, tú tendrías el doble de las que a mí me quedarían. ¿Cuántas canicas tenemos entre los dos?

A) 40 B) 30 C) 35
D) 60 E) 42

Resolución

Piden: ¿cuántas canicas tenemos entre los dos?

De los datos:

- Si tú me dieras 2 de tus canicas, tendríamos la misma cantidad.

$$\text{N.° de canicas:} \quad \begin{matrix}\underline{\text{Yo}}\\ x\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\underline{\text{Tú}}\\ x+4\end{matrix}$$

Luego

Si yo te diera 3 de las mías, tú tendrías el doble de lo que a mí me quedaría.

$$\underbrace{x+7}_{\substack{\text{Tú}\\ \text{tendrías}}} = 2\underbrace{(x-3)}_{\substack{\text{Me}\\ \text{quedaría}}}$$

$$\rightarrow \quad x = 13$$

Por lo tanto, entre los dos tenemos

$$\underbrace{x}_{13} + \underbrace{(x+4)}_{17} = 30 \text{ canicas.}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 23

María, cada día, gasta la mitad de lo que tiene, más dos soles. Si después de tres días le queda 30 soles, ¿cuánto tenía al inicio?

A) S/.234
B) S/.300
C) S/.268
D) S/.240
E) S/.215

Resolución

Piden: ¿cuánto tenía al inicio?

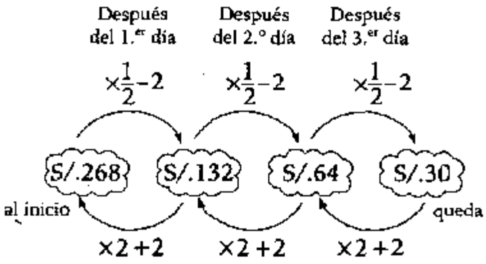
Dato:

Cada día gasta la mitad de lo que tiene más S/.2. Luego de 3 días le queda S/.30.

Observación

Gasta	Queda
$\times\frac{1}{2}$ total + S/.2	$\times\frac{1}{2}$ total − S/.2

Analizamos el gasto en los 3 días:



Por lo tanto, al inicio tenía S/.268.

Clave C

PROBLEMA N.° 24

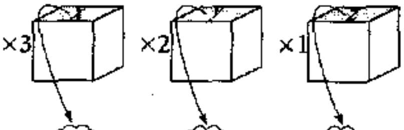
Se lanza 3 dados simultáneamente. El triple del resultado del primer dado, más el doble del resultado del segundo dado, más el resultado del tercer dado, suman diez. ¿Cuántos posibles resultados pudieron darse?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resolución

Piden: ¿cuántos posibles resultados pudieron darse?

Se lanzan 3 dados simultáneamente:



Se plantea: $3x + 2y + z = 10$

Luego

$$3x+2y+z=10\;;\;x, y \wedge z \le 6$$

$$\text{4 soluciones}\left\{\begin{array}{ccc}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 5\end{array}\right.$$

Por lo tanto, se pueden generar 4 posibles resultados.

Clave D

PROBLEMA N.° 25

Una sala tiene 3 metros más de largo que de ancho. Si el largo fuese 3 metros más de lo que es y el ancho fuese dos metros menos, la superficie del piso sería la misma. Halle el área de dicha superficie.

A) 150 m^2
B) 180 m^2
C) 160 m^2
D) 170 m^2
E) 120 m^2

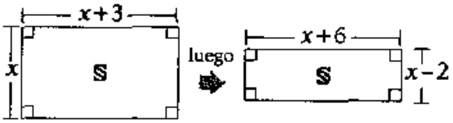
Resolución

Piden el área de la superficie de la sala.

Dato:

La sala tiene 3 metros más de largo que de ancho. Si el largo fuese 3 metros más y el ancho fuese 2 metros menos, la superficie del piso no varía.

Graficamos



$\mathbb{S}=x(x+3)$ $\qquad$ $\mathbb{S}=(x+6)(x-2)$

Igualamos

$$x(x+3)=(x+6)(x-2)$$
$$\rightarrow \quad x=12$$

Por lo tanto, el área de la superficie de la sala es $\underbrace{x}_{12}\ \underbrace{(x+3)}_{\times\ 15}=180\ \text{m}^2$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 26

Dos señoras llevan al mercado 100 manzanas. Una de ellas tenía mayor número de manzanas que la otra; no obstante, ambas obtuvieron iguales sumas de dinero. Una de ellas le dice a la otra: *Si yo hubiese tenido la cantidad de manzanas que tú tuviste y tú la cantidad que yo tuve, hubiésemos recibido respectivamente 15 y 20/3 soles* ¿Cuántas manzanas tenía cada una?

A) 30 y 70
B) 45 y 55
C) 20 y 80
D) 40 y 60
E) 48 y 52

Resolución

Piden: ¿cuántas manzanas tenía cada señora?

De los datos:

	Señora 1	**Señora 2**
N.° de manzanas	x	$100-x$

En el caso que se intercambiase la cantidad de manzanas, tendremos:

	Señora 1	**Señora 2**
N.° de manzanas	$100-x$	x
Costo total	S/.15	S/.$\left(\frac{20}{3}\right)$
Costo unitario	$\frac{15}{100-x}$	$\frac{20}{3x}$

Ya que los costos unitarios son iguales, con respecto a la venta inicial se tiene:

	Señora 1	**Señora 2**
N.° de manzanas	x	$100-x$
Costo unitario	$\frac{15}{100-x}$	$\frac{20}{3x}$
Costo total	$\frac{15x}{100-x}$	$\frac{20(100-x)}{3x}$

Por dato:

$$\frac{15x}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}$$

$$\rightarrow\ x=40$$

Por lo tanto, las señoras tienen 40 y 60 manzanas.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 27

Un comerciante compró 2500 botellas a 20 soles el ciento. En el camino se le rompieron 190 botellas y luego regala 5 botellas por cada 100 que vendía. ¿En cuánto vendió el ciento si en total ganó 116 soles?

A) S/.30 B) S/.32 C) S/.25
D) S/.28 E) S/.26

Resolución

Piden: ¿en cuánto vendió el ciento de botellas?
Dato:
Compró 2500 botellas a S/.20 el ciento.
Precio de costo: S/.20×25=S/.500

Luego, se le rompieron 190 botellas, entonces quedan 2310 botellas.

Al vender

$$\underline{\text{Vende}}\quad\underline{\text{Regala}}\quad\underline{\text{Entrega}}$$
$$100K+5K=105K$$

$$\rightarrow\ 105K=2310$$

$$K=22$$

Entonces, solo vendió 2200 botellas de las 2310 que tenía (el resto fueron regaladas)

Sea el precio de venta por ciento=S/.x.

$\rightarrow$ Precio de venta total=$22x$

Por definición

$$\begin{matrix}\text{Precio de}\\ \text{venta}\end{matrix}-\begin{matrix}\text{Precio de}\\ \text{costo}\end{matrix}=\overbrace{\text{S/.116}}^{\text{Ganancia}}$$

$$22x-500=116$$

$$\rightarrow\ x=28$$

Por lo tanto, el ciento de botellas se vendió a S/.28.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 28

Un estudiante gasta 7 soles en pasajes cuando va a una conferencia. Si en n días ha gastado p soles, ¿cuántos días no asistió a la conferencia durante los n días?

A) $n-\frac{p}{2}$ B) $n-\frac{p}{7}$ C) $n-\frac{p}{n}$

D) $p-\frac{n}{7}$ E) $p-\frac{n}{7p}$

Resolución

Piden: ¿cuántos días no asistió a la conferencia durante los n días?

Dato: se gasta S/.7 cuando va a la conferencia.

Luego de n días

Gasta S/.7 **Días que asistió**	No gasta **Días que no asistió**
$n-x$	x

Gasto total: $7(n-x)=p \rightarrow x=n-\frac{p}{7}$

Por lo tanto, el número de días que no asistió a la conferencia es $n-\frac{p}{7}$

Clave B

PROBLEMA N.° 29

Un tren, al final de su recorrido, llega con 40 adultos y 30 niños, con una recaudación de 20 soles. Cada adulto y cada niño pagan pasajes únicos de 0,2 y 0,1 soles, respectivamente. ¿Con cuántos pasajeros salió de su paradero inicial si en cada parada suben 3 adultos con 2 niños y bajan 2 adultos junto con 5 niños?

A) 160
B) 70
C) 80
D) 120
E) 90

Resolución

Piden: ¿con cuántos pasajeros salió de su paradero inicial?

Sean x paraderos en la carretera.

	Subida		**Bajada**	
	Paradero inicial	Paraderos en la carretera		Paradero final
Adultos	$40-x$	$3x$	$2x$	40
Niños	$30+3x$	$2x$	$5x$	30

En cada paradero suben 3 adultos con 2 niños y bajan 2 adultos junto con 5 niños.

Además, el número de personas que suben al tren es igual al número de personas que bajan

N.° de adultos: $2x+40$

N.° de niños: $5x+30$

Se sabe que

Pasaje de adultos: S/.0,2

Pasaje de niños: S/.0,1

Recaudación total

$(S/.0,2)\times(2x+40)+(S/.0,1)\times(5x+30)=S/.20$

$x=10$

Por lo tanto, el número de pasajeros que salieron del paradero inicial es

$$\underbrace{(40-x)}_{30}+\underbrace{(3x+30)}_{60}=90$$

Clave E

PROBLEMA N.° 30

Una señora quiso comprar cierto número de limones con cierta suma de dinero, pero al ver que el precio de cada limón había bajado en S/.2, compró 4 limones más por la misma suma. Si el número de soles que pagó por cada limón y el número de limones que compró suman 16, ¿cuánto gastó en la compra de limones?

A) S/.10 B) S/.60 C) S/.64
D) S/.48 E) S/.72

Resolución

Piden: ¿cuánto gastó en la compra de limones?

Dato:

El número de soles que pagó por cada limón y el número de limones que compró suman 16.

	Al inicio	Finalmente
Número de limones		x
Precio de cada limón		$16-x$

Pero al ver que el precio de cada limón había bajado S/.2, compró 4 limones más.

+4

	Al inicio	Finalmente
Número de limones	$x-4$	x
Precio de cada limón	$18-x$	$16-x$

−2

En ambos casos, la compra se realiza con la misma suma de dinero, entonces:

$$(18-x)(x-4)=(16-x)x$$

$$x=12$$

$$\text{Gasto total} = \underbrace{x}_{12}\ \underbrace{(16-x)}_{4}=\text{S/.}48$$

Por lo tanto, el gasto total es S/.48.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

Un poste de a metros de longitud está pintado de rojo y blanco. Si se pinta b metros más de blanco, la mitad del poste estaría pintado de rojo. ¿Cuántos metros de poste están pintados de blanco?

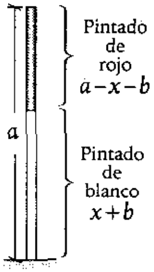
A) $\frac{a-2b}{2}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\frac{a-b}{2}$

D) $\frac{a}{2+b}$ E) $\frac{a}{2-b}$

Resolución

Piden: ¿cuántos metros de poste están pintados de blanco?
Se sabe que

Luego, si se pinta b metros de blanco, tenemos



Por dato, la mitad del poste estaría pintado de rojo.

$$\rightarrow\ a-x-b=\frac{a}{2}$$

$$x=\frac{a}{2}-b=\frac{a-2b}{2}$$

Por lo tanto, el número de metros del poste pintado de blanco es $\frac{a-2b}{2}$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 32

Un vendedor afirma que como hoy vendió cada caramelo a 10 céntimos más que ayer, vendió 10 caramelos menos que ayer; además, hoy vendió tantos caramelos como céntimos cobró por cada uno. Respecto a la venta de ayer, ¿cuánto ganó o perdió hoy día?

A) ganó 10 céntimos
B) ganó S/.1
C) perdió S/.1
D) perdió 10 céntimos
E) no gana ni pierde

Resolución

Piden: ¿cuánto ganó o perdió hoy?

De los datos:

	Ayer	Hoy	
N.° de caram.	$x+20$	$\xrightarrow{-10}$ $x+10$	=
Precio c/caram.	x	$\xrightarrow{+10}$ $x+10$	

Recaudación de ayer:

$$x(x+20)=x^2+20x$$

Recaudación de hoy:

$$(x+10)^2=x^2+20x+100$$

Por lo tanto, hoy ganó (respecto de ayer) 100 céntimos más, es decir S/.1.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

De un grupo de caramelos, retiro 5 y el resto los reparto entre un grupo de niños a quienes les doy 11 caramelos a cada uno, menos al último a quien le doy 15. Si antes de repartirlos retirase 20 caramelos más, ahora solo podría darles 9 caramelos a todos, menos al último, a quien ahora solo podría darle 5 caramelos. ¿Cuántos niños hay?

A) 6
B) 9
C) 11
D) 75
E) 30

Resolución

Piden la cantidad de niños.

Sea el número de niños: x.

De los datos:
De un grupo de caramelos retiro 5 y el resto los reparto entre los x niños, 11 caramelos cada uno, menos al último a quien le doy 15.

Se deduce:

$$\text{Número de caramelos}: \underbrace{11(x-1)+15+\overset{\text{retiradas}}{5}}_{11x+9} \qquad \text{(I)}$$

Luego, si se retirase 20 caramelos más, ahora solo podría darles 9 caramelos a todos menos al último, a quien ahora solo podría darle 5 caramelos.

Se deduce

$$\text{Número de caramelos}: \underbrace{9(x-1)+5+\overset{\text{retiradas}}{25}}_{9x+21} \qquad \text{(II)}$$

De (I) = (II):
$x=6$

Por lo tanto, son 6 niños.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

En el tercer día de su viaje, una nave del planeta Pin llega al planeta Pum. Al bajar a la superficie, uno de sus tripulantes le dice a su compañero: *Los habitantes de este planeta, aunque tienen 20 dedos en total, como nosotros, tienen una extremidad menos y un dedo más en cada extremidad.* ¿Cuántas extremidades tienen los habitantes del planeta Pum?

A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 10

Resolución

Piden: ¿cuántas extremidades tienen los habitantes del planeta Pum?

De los datos, tenemos:

	Pin	**Pum**
N.° de extremidades	x	$x-1$
N.° de dedos p/extrem.	$\frac{20}{x}$	$\frac{20}{x-1}$

Total de dedos: 20 = 20

Además, los habitantes del planeta Pum tienen un dedo más por extremidad

$$\frac{20}{x-1}-\frac{20}{x}=1 \rightarrow x=5$$

Por lo tanto, el número de extremidades en los habitantes del planeta Pum es

$x-1=4$
↓
5

Clave **B**

PROBLEMA N.° 35

Un comerciante compró telas de dos calidades por el valor de 300 soles. De la primera calidad adquiere 6 m más que de la segunda. Si por la tela de la primera calidad hubiera pagado el precio de la segunda, su costo hubiera sido 180 soles; pero, si por la tela de la segunda calidad hubiera pagado el precio de la primera, el costo hubiera sido 120 soles. ¿Cuántos metros compró de cada calidad?

A) 10 m y 16 m
B) 14 m y 20 m
C) 8 m y 14 m
D) 18 m y 12 m
E) 11 m y 17 m

Resolución

Piden: ¿cuántos metros compró de cada calidad?
Se conoce que:

	Tela 1 (S/.m)	Tela 2 (S/.n)
N.° de metros de tela	$x+6$	x

Del dato:

costo total$=m(x+6)+n(x)=300$ (I)

Luego

- Si el costo de tela 1 es S/.n

  $\rightarrow$ costo total$=n(x+6)$

  $n(x+6)=180$ (II)

- Si el costo de tela 2 es S/.m

  $\rightarrow$ costo total$=mx$

  $mx=120$ (III)

Reemplazando (II) y (III) en (I):

$$\frac{120}{x}(x+6)+\frac{180x}{x+6}=300$$

$\rightarrow$ $x=12$

Por lo tanto, se compraron 18 m y 12 m

Clave **D**

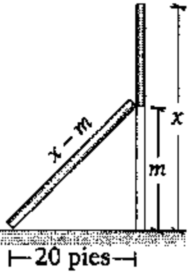
PROBLEMA N.° 36

Un asta de metal se rompió en cierto punto quedando con la parte de arriba doblada a manera de gozne y la punta tocando el piso en un punto localizado a 20 pies de la base. Se reparó, pero se rompió de nuevo. Esta vez en un punto localizado 5 pies más abajo que la vez anterior y la punta tocando el piso a 30 pies de la base. ¿Qué longitud tenía el asta?

A) 43 pies B) 55 pies C) 58 pies
D) 50 pies E) 62 pies

Resolución

Piden la longitud del asta.
Inicialmente

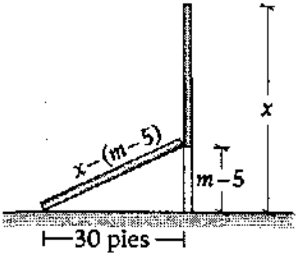


- Por Pitágoras

  $(x-m)^2-m^2=20^2$

  $x^2-2xm=400$ (I)

Se reparó, pero se rompió de nuevo.



- Por Pitágoras:

  $(x-(m-5))^2-(m-5)^2=30^2$

  $x^2-2xm+10x=900$ (II)

De (I) y (II):

$x=50$

Por lo tanto, la longitud del asta es de 50 pies.

Clave **D**

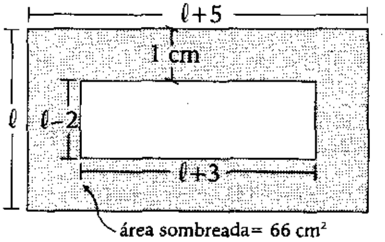
PROBLEMA N.° 37

Si se corta una banda de un centímetro de ancho de todo el contorno de una hoja rectangular de papel, su área disminuye en 66 cm^2. Si, además, se sabe que el largo excede al ancho en 5 cm antes de cortarse, ¿cuál es el largo y el ancho de la hoja original del papel?

A) 20 cm y 26 cm
B) 30 cm y 35 cm
C) 21 cm y 25 cm
D) 17 cm y 22 cm
E) 20 cm y 15 cm

Resolución

Piden el largo y ancho de la hoja original.
Dato: el largo excede al ancho en 5 cm.
Además



$$\rightarrow\ (\ell+5)\cdot\ell-(\ell+3)\cdot(\ell-2)=66$$
$$\ell=15$$

Por lo tanto, el largo y el ancho de la hoja original es 20 cm y 15 cm.

Clave E

PROBLEMA N.° 38

Si se posaran $(n-1)$ jilgueros en cada uno de los n postes, sobrarían 10 jilgueros; pero si en cada poste se posaran 3 jilgueros más, quedarían 2 postes vacíos. ¿Cuánto es la mitad del número de postes?

A) 14 B) 10 C) 8
D) 12 E) 7

Resolución

Piden la mitad del número de postes.
De los datos:
Si se posarán $(n-1)$ jilgueros en cada uno de los n postes, sobrarían 10 jilgueros.
Se deduce

número de jilgueros$=n(n-1)+10$

Luego
Pero si en cada poste se posaran 3 jilgueros más $(n+2$ jilgueros), quedarían 2 postes vacíos.
Se deduce

número de jilgueros$=(n-2)(n+2)$

Igualamos la cantidad de jilgueros:

$$n(n-1)+10=(n-2)(n+2)$$
$$n=14$$

Por lo tanto, la mitad del número de postes es 7.

Clave E

PROBLEMA N.° 39

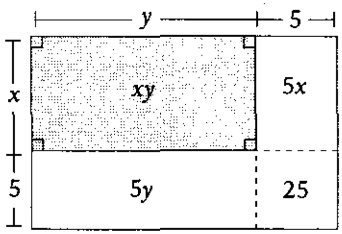
Un terreno tiene forma rectangular. Si tuviera 5 metros más de largo y 5 metros más de ancho, su área se duplicaría. Si tuviera 2 metros menos de largo y 2 metros menos de ancho, el área disminuiría en 46 m^2. Halle el área del terreno y dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 5 B) 7 C) 8
D) 6 E) 9

Resolución

Piden el área del terreno (indique la suma de sus cifras).
Sea el terreno rectangular de dimensiones x e y

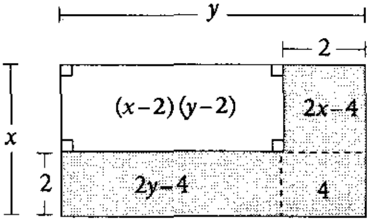
Si tuviera 5 metros más de largo y 5 metros más de ancho, su área se duplicaría.



$\rightarrow 5y+5x+25=xy$

$5(y+x)+25=xy$ (I)

Luego, si tuviera 2 metros menos de largo y 2 metros menos de ancho, el área disminuiría en 46 m^2



$\rightarrow 2y+2x-4=46$

$y+x=25$ (II)

De (I) y (II)

$y=15; x=10$

Por lo tanto, el área del terreno es 150 m^2, su suma de cifras es igual a 6.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 40

Al regalar el Sr. Pérez tantas veces 5 céntimos de soles como soles tenía en su bolsillo, le quedaron 38 soles. ¿Cuántos soles le hubieran quedado si hubiera regalado tantas veces 50 céntimos como la mitad del número de soles que tenía?

A) 20 B) 30 C) 35
D) 25 E) 40

Resolución

Piden: ¿cuántos soles le hubieran quedado si hubiera regalado tantas veces 50 céntimos como la mitad del número de soles que tenía?

Sea x el número de soles que tiene el señor Pérez.

Se sabe que

$$\boxed{\text{S/.}x} - \underbrace{5x\text{ cént.}}_{\substack{\text{regala } x \text{ veces}\\ \text{5 céntimos}}} = \text{S/.}38$$

En céntimos

$100x-5x=3800 \rightarrow x=40$

Entonces el señor Pérez tiene: S/.40.

Piden

$$\overset{\text{regala}}{50\text{ cént.}\ x\ \underbrace{20}_{\substack{\text{la mitad del}\\ \text{número de}\\ \text{soles que}\\ \text{tiene}}}} \;<>\; \overset{\text{regala}}{\underbrace{1000\text{ cént.}}_{\text{S/.10}}}$$

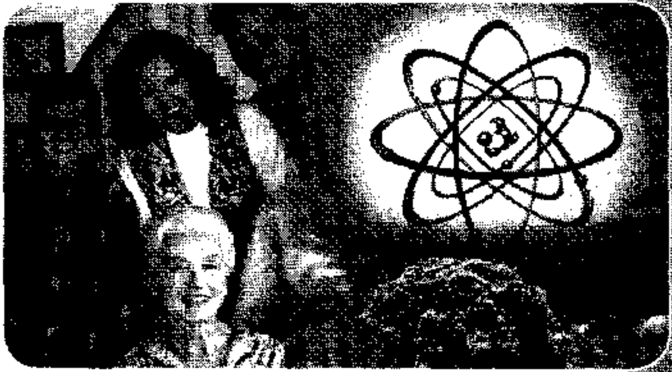
Por lo tanto, le hubieran quedado S/.30.

Clave **B**

Capítulo

6

Problemas sobre edades



En este capítulo, trataremos de manera específica acerca del uso de ciertos criterios prácticos para la resolución de este tipo de problemas, de manera bastante simple y sin apelar a una excesiva operatividad.

Cuando nos referimos a los problemas sobre edades, debemos entender que aún seguimos estudiando el tema de Planteo de Ecuaciones, solo que, por su particularidad en el enfoque de resolución, se desarrolla como un tema aparte. Estos problemas los subdividimos en dos tipos:

- Problemas donde interviene una persona.
- Problemas donde intervienen dos o más personas.

De esta manera, se busca una aproximación a la aplicación de los criterios como el del aspa simétrica o el de las diferencias horizontal y vertical en cada uno de estos subtemas.

Capítulo 6

Problemas sobre edades

PROBLEMA N.° 1

Si al doble de la edad que tendré dentro de 2 años, le resto el doble de la edad que tenía hace 2 años, se obtiene la edad que tengo. ¿Qué edad tendré dentro de 2 años?

A) 12 años
B) 14 años
C) 20 años
D) 15 años
E) 10 años

Resolución

Se pide mi edad dentro de 2 años.
Sea x mi edad actual,
de la condición del problema

$$2(x+2)-2(x-2)=x$$

$$2x+4-2x+4=x$$

$$x=8 \quad \text{(edad actual)}$$

Por lo tanto, dentro de 2 años tendré 10 años.

Clave E

PROBLEMA N.° 2

Una persona tiene, en 1988, tantos años como el producto de las 2 últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es la suma de cifras de la edad que tenía en 1980?

A) 6
B) 4
C) 5
D) 7
E) 8

Resolución

Se pide la suma de cifras de la edad de una persona en 1980.

Sea el año de nacimiento de la persona: $\overline{19ab}$

Recuerda

Cuando la persona ya cumplió años, se cumple que

$$\text{Año de nacimiento} + \text{Edad actual} = \text{Año actual}$$

En 1988:

$$\overline{19ab}+\overbrace{a\times b}^{\text{edad actual}}=1988$$

$$1900+\overline{ab}+a\times b=1988$$

$$10\underset{\smile}{a}+b+\underset{\smile}{a}\times b=88$$

Factorizamos a

$$a(b+10)+b=88$$

Para seguir factorizando, sumamos 10 a cada miembro

$$a(b+10)+(b+10)=98$$

$$(\underline{b+10})(\underline{a+1})=98=\underline{14}(\underline{7})$$

$$\begin{aligned} a+1&=7 \\ b+10&=14 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a&=6 \\ b&=4 \end{aligned}$$

Año de nacimiento=1964

Luego, edad de la persona en 1980

$$1980-1964=16 \text{ años}$$

$$\therefore\ S_{\text{cifras}}=7$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

Los 5/7 de la edad de una persona menos 4 años es igual a la edad que tenía hace 12 años. ¿Cuál era su edad hace 12 años?

A) 14 años
B) 18 años
C) 16 años
D) 20 años
E) 22 años

Resolución

Se pide la edad de la persona hace 12 años.
Sea la edad actual de la persona: x años.
De la condición del problema

$$\frac{5}{7}(x-4)=\underbrace{x-12}_{\substack{\text{edad hace}\\ \text{12 años}}}$$

$$5(x-4)=7(x-12)$$

$$5x-20=7x-84$$

$$64=2x$$

$$x=32 \text{ (edad actual)}$$

Por lo tanto, hace 12 años tenía 20 años.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 4

Laura, al ser interrogada por su edad, responde: *Si al año en que cumplí 14 años le suman el año en que cumpliré 23 años, y si a este resultado le restan la suma del año en que nací con el año actual, obtendrán 19.* ¿Cuál es la edad de Laura?

A) 18 años B) 23 años C) 19 años
D) 16 años E) 22 años

Resolución

Se pide la edad de Laura (x).
Sea el año de nacimiento de Laura: $\overline{19ab}$
Por dato:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Año en que}\\ \text{cumple}\\ \text{14 años}\end{array}+\begin{array}{c}\text{Año en que}\\ \text{cumplirá}\\ \text{23 años}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{Año}\\ \text{de}\\ \text{nacimiento}\end{array}+\begin{array}{c}\text{Año}\\ \text{actual}\end{array}\right)=19$$

$$\left(\left(\cancel{\overline{19ab}}+14\right)+\left(\cancel{\overline{19ab}}+23\right)\right)-\left(\cancel{\overline{19ab}}+\left(\cancel{\overline{19ab}}+x\right)\right)=19$$

$$37-x=19$$

$$\therefore\ x=18 \text{ años}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 5

Álex nació en el presente siglo, y en este año cumplirá tantos años como la suma de cifras del año en que nació y el año actual. ¿Cuál será la edad actual de Arturo, si este año cumple tanto como la quinta parte del producto de cifras del año de nacimiento de Álex?
Obs.: Considerar como año actual: 1995.

A) 27 años B) 25 años C) 23 años
D) 19 años E) 30 años

Resolución

Se pide la edad actual de Arturo.

$$=\frac{1}{5}(1\times 9\times a\times b)$$

Dato año actual: 1995.

Sea año de nacimiento de Álex: $\overline{19ab}$

- *Álex cumplirá, este año, tantos años como la suma de cifras del año en que nació y el año actual* (dato).

$$\overline{19ab}+\overbrace{(1+9+a+b+1+9+9+5)}^{\text{Edad de Álex}}=1995$$

$$\cancel{19}00+\overline{ab}+34+a+b=\cancel{19}95$$

$$\overline{ab}+a+b=61$$

Descomponemos el numeral $\overline{ab}$

$$\begin{array}{l} 10a+b+a+b=61 \\ 11a+2b=61 \\ \ \ \ \ \downarrow\ \ \ \ \downarrow \\ \ \ \ \ 5\ \ \ \ 3 \end{array}$$

Entonces, el año de nacimiento de Álex: 1953

Luego, edad de Arturo:

$$\frac{1}{5}(1\times 9\times 5\times 3)=27 \text{ años}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

La edad que tenía hace a años es, a lo que tendré dentro de a años, como 2 es a 3. ¿Qué edad tendré dentro de $2a$ años?

A) $5a$ años B) $6a$ años C) $7a$ años
D) $8a$ años E) $9a$ años

Resolución

Se pide la edad que tendré dentro de $2a$ años.

Sea mi edad actual: x.

Del dato:

- *La edad que tenía hace a años es la que tendré dentro de a años, como 2 es a 3.*

a a

	Hace a años	Presente	Dentro de a años
yo	$2<>x-a$	x	$3<>x+a$

$$\rightarrow\ \frac{x-a}{2}=\frac{x+a}{3}$$

$$3(x-a)=2(x+a)$$

$$3x-3a=2x+2a\ \rightarrow\ x=5a \text{ años}$$

Entonces, dentro de $2a$ años tendré:

$x+2a=7a$ años.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Le preguntan a un individuo por su edad y él contesta: *Mi edad, más dos veces mi edad, más tres veces mi edad y así sucesivamente hasta tantas veces mi edad como la edad que tengo, suman en total 4200.* Halle la edad de dicho individuo.

A) 20 años B) 25 años C) 16 años
D) 24 años E) 18 años

Resolución

Se pide la edad de un individuo (x).

Del dato

$$x+2x+3x+\ldots+\underset{\text{tantas veces como mi edad}}{x}\cdot\overset{\text{mi edad}}{x}=4200$$

Factorizamos x

$$x(\underbrace{1+2+3+...+x})=4200$$

$$x\cdot\frac{x(x+1)}{2}=4200$$

$$x^2(x+1)=2\overbrace{(2)(21)(100)}$$

$$x^2(\underline{x+1})=20^2\cdot(\underline{21})$$

$\therefore$ $x=20$ años

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Hace 5 años, la edad de un padre fue cuatro veces la edad de su hijo; y dentro de 5 años será solamente el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tendrá el padre, cuando el hijo tenga los años que tuvo el padre cuando nació el hijo?

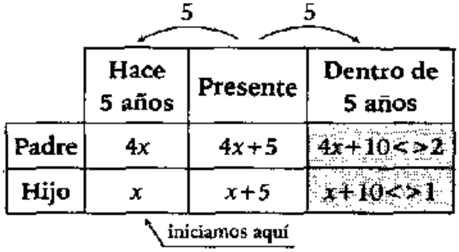
A) 40 años B) 50 años C) 30 años
D) 45 años E) 35 años

Resolución

Se pide la edad que tendrá el padre en el futuro.

Del dato:

- *Hace 5 años, la edad de un padre fue cuatro veces la de su hijo y dentro de 5 años será solamente el doble.*



	Hace 5 años	Presente	Dentro de 5 años
Padre	$4x$	$4x+5$	$4x+10<>2$
Hijo	x	$x+5$	$x+10<>1$

iniciamos aquí

Entonces

$$\frac{4x+10}{2}=\frac{x+10}{1}$$

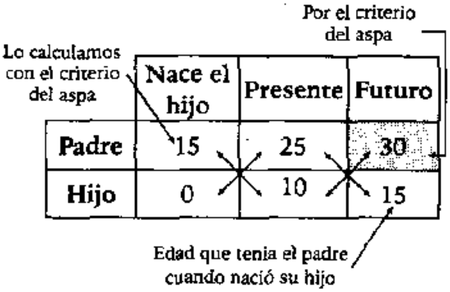
$$4x+10=2x+20$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

Calculamos las edades actuales del padre y del hijo, para luego hallar lo que se pide:

- *Edad del padre cuando el hijo tenga los años que tuvo el padre cuando nació el hijo.*



Por el criterio del aspa

Lo calculamos con el criterio del aspa

	Nace el hijo	Presente	Futuro
Padre	15	25	30
Hijo	0	10	15

Edad que tenia el padre cuando nació su hijo

Por lo tanto, el padre tendrá 30 años.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

Hace 10 años, tenía la mitad de la edad que tendré dentro de 8 años. Si tú naciste cuando yo tenía 15 años, ¿cuál será la suma de nuestras edades cuando yo tenga el doble de la edad que tuve hace 11 años?

A) 53 B) 62 C) 36
D) 57 E) 72

Resolución

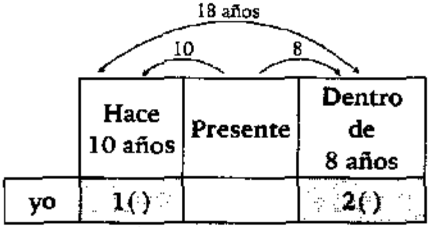
Se pide la suma de nuestras edades en el futuro.
Dato: tú nacistes cuando yo tenía 15 años.

Del dato se deduce que

Edad de yo − edad de tú = 15 años (cte.)

Calculamos la edad actual de yo

- *Hace 10 años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de 8 años* (dato).

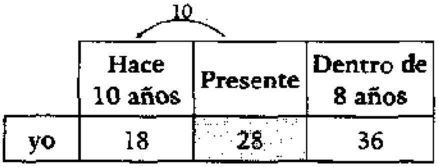


	Hace 10 años	Presente	Dentro de 8 años
yo	1( )		2( )

2( ) − **1**( ) = 18 (tiempo transcurrido)

debe ubicarse 18 para verificar la diferencia

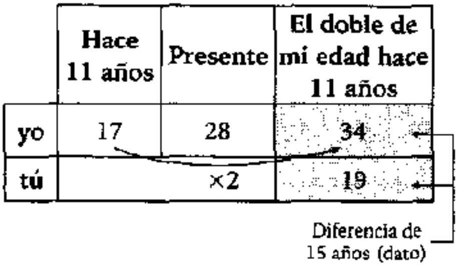
Reemplazando, se tiene la edad de yo en el presente.



	Hace 10 años	Presente	Dentro de 8 años
yo	18	28	36

Luego, para calcular lo pedido

- *Suma de edades cuando yo tenga el doble de la edad que tuve hace 11 años.*



	Hace 11 años	Presente	El doble de mi edad hace 11 años
yo	17	28	34
tú			19

Diferencia de 15 años (dato)

∴ 34 + 19 = 53

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

Dentro de 10 años, tú tendrás la edad que yo tenía cuando tú tenías la edad que yo tuve hace 34 años. ¿Cuántos años tengo si dentro de 20 años la suma de nuestras edades será 98?

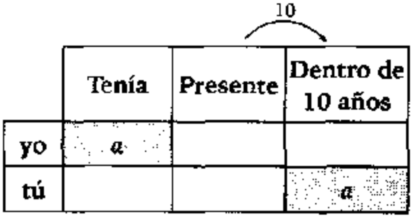
A) 32 años B) 38 años
C) 40 años
D) 43 años E) 37 años

Resolución

Se pide la cantidad de años que tengo: x.

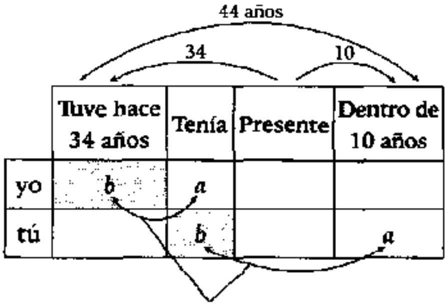
Del dato:

- *Dentro de 10 años, tú tendrás la edad que yo tenía ...*



	Tenía	Presente	Dentro de 10 años
yo	a		
tú			a

- *... cuando tú tenías la edad que yo tuve hace 34 años.*



	Tuve hace 34 años	Tenía	Presente	Dentro de 10 años
yo	b	a		
tú		b		a

iguales intervalos de tiempo (22 años c/u)

De lo anterior, calculamos las edades dentro de 20 años a partir de la edad actual de yo.

22 12 20

	Tuve hace 34 años	Tenía	Presente	Dentro de 20 años
yo	$x-34$	$x-12$	x	$x+20$
tú		$x-34$	$x-22$	$x-2$

$\rightarrow \quad (x+20)+(x-2)=98$ (dato)

$2x+18=98$

$\therefore \quad x=40$ años.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 11

Pedro tiene 47 años; y Jesús, 32 años. ¿Cuántos años hace que la edad de Pedro fue el cuádruplo de la de Jesús?

A) 21 B) 25 C) 27
D) 30 E) 32

Resolución

Se pide: hace cuántos años la edad de Pedro fue el cuádruplo de la de Jesús (x)
Del dato:

x años

	Pasado	Presente
Pedro	4( )	47
Jesús	1( )	32

Diferencia vertical (cte) : $4(\ )-1(\ )=47-32=15$

Debe ubicarse el 5 para verificar la igualdad

Reemplazamos y se obtiene

x años

	Pasado	Presente
Pedro	20	47
Jesús	5	32

Para el intervalo de tiempo: x, aplicamos la diferencia, es decir

$x=47-20$

$\therefore \quad x=27$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

Dentro de 8 años, la suma de nuestras edades será de 46 años; pero hace m años la diferencia de nuestras edades era de 4 años. ¿Hace cuántos años la edad de uno era el triple de la edad del otro?

A) 9 B) 11
C) 14
D) 22 E) 23

Resolución

Se pide: hace cuántos años la edad de uno era el triple de la del otro: x.

Se sabe que: hace m años la diferencia de edades era 4 años.

$\rightarrow$ La diferencia de sus edades a través del tiempo es 4 años (cte.).

Además,

- *Dentro de 8 años la suma de nuestras edades será de 46 años.* (dato)

8

	Presente	Dentro de 8 años
yo	a	$a+8$
tú	b	$b+8$

$\rightarrow\ (a+8)+(b+8)=46$

$a+b+16=46$

$a+b=30$ (I)

Pero $a-b=4$ (dato) (II)

(I) + (II)

$2a=34 \rightarrow a=17$

En (I) $17+b=30 \rightarrow b=13$

Luego, para calcular lo que se pide hacemos

x

	Pasado	Presente
yo	3<>17−x	17
tú	1<>13−x	13

$$\frac{17-x}{3}=\frac{13-x}{1}$$

$17-x=3(13-x)$

$17-x=39-3x$

$2x=22$

$\therefore\ x=11$

PROBLEMA N.° 13

Pedro le dice a Juan: *Dentro de 10 años, yo tendré el doble de la edad que tú tendrás en ese entonces.* Juan responde: *Hace 5 años tu edad era el quíntuplo de la que yo tenía en ese entonces.* Si Juan nació en 1920, ¿en qué año nació Pedro?

A) 1900
B) 1905
C) 1908
D) 1910
E) 1912

Resolución

Se pide el año de nacimiento de Pedro.

Se sabe que Juan nació en 1920.

Del dato, Pedro le dice a Juan.

- *Dentro de 10 años, yo tendré el doble de la edad que tú tendrás en ese entonces*

10

	Presente	Dentro de 10 años
Pedro	$2x-10$	$2x$
Juan	$x-10$	x

Juan responde:

- *Hace 5 años tu edad era el quíntuplo de la que yo tenía en ese entonces*

15

5 10

	Hace 5 años	Presente	Dentro de 10 años
Pedro	5<>2x−15	$2x-10$	$2x$
Juan	1<>x−15	$x-10$	x

Entonces

$$\frac{2x-15}{5}=\frac{x-15}{1}$$

$$2x-15=5(x-15)$$

$$2x-15=5x-75$$

$$3x=60$$

$$\rightarrow x=20$$

Reemplazamos y se obtiene

10

	Presente	Dentro de 10 años
Pedro	30	40
Juan	10	20

De la tabla se observa que

Pedro es mayor que Juan en 30 – 10=20 años.

Entonces, nació 20 años antes que Juan

Año de Nacimiento de Pedro = Año de Nacimiento de Juan – 20

∴ Año de Nacimiento de Pedro =1920–20=1900

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

La edad de un padre sobrepasa, en 5 años, a la suma de las edades actuales de sus tres hijos. Dentro de 10 años, él tendrá el doble de la edad del hijo mayor; dentro de 20 años, tendrá el doble de la edad del segundo; y dentro de 30 años, tendrá el doble de la edad del tercero. Halle la edad del padre.

A) 60 años
B) 70 años
C) 65 años
D) 50 años
E) 40 años

Resolución

Se pide la edad actual del padre.

A partir de los datos del problema, se tiene:

- *Dentro de 30 años, el padre tendrá el doble de la edad del tercer hijo* (dato).

30

	Presente	Dentro de 30 años
Padre		$2a$
1.er hijo		
2.do hijo		
3.er hijo		a

- *Dentro de 20 años, tendrá el padre el doble de la edad del segundo hijo* (dato).

Por diferencia de los intervalos de tiempo

30

20

10

	Presente	Dentro de 20 años	Dentro de 30 años
Padre		$2<>2a-10$	$2a$
1.er hijo		÷2	
2.° hijo		$1<>a-5$	
3.er hijo			a

- *Dentro de 10 años, el padre tendrá el doble de la edad del hijo mayor* (dato).

Por diferencia de intervalos de tiempo

20

10 10

	Presente	Dentro de 10 años	Dentro de 20 años	Dentro de 30 años
Padre		$2 <> 2a-20$	$2a-10$	$2a$
1.^{er} hijo		$1 <> a-10$	+2	
2.^{o} hijo			$a-5$	
3.^{er} hijo				a

Ahora, calculamos las edades actuales de los 4 miembros de la familia y aplicamos el dato.

- *La edad del padre sobrepasa en 5 a la suma de edades actuales de sus tres hijos*

30

20

10

	Presente	Dentro de 10 años	Dentro de 20 años	Dentro de 30 años
Padre	$2a-30$	$2a-20$	$2a-10$	$2a$
1.^{er} hijo	$a-20$	$a-10$		
2.^{o} hijo	$a-25$		$a-5$	
3.^{er} hijo	$a-30$			a

$$(2a-30)-((a-20)+(a-25)+(a-30))=5$$

$$2a-30-3a+75=5$$

$$45-a=5$$

$$\rightarrow\ a=40$$

Por lo tanto, la edad actual del padre es $2a-30=50$ años

Clave **D**

PROBLEMA N.° 15

Dentro de 8 años la edad de Nora será la que Matilde tiene ahora, pero dentro de 15 años Nora tendrá los 4/5 de la edad que tendrá Matilde. Calcule la suma de las edades de ambas cuando Matilde tenía el doble de la edad de Nora.

A) 17 B) 24 C) 25
D) 33 E) 40

Resolución

Se pide la suma de edades cuando Matilde tenía el doble de la edad de Nora.

De los datos:

- *Dentro de 15 años Nora tendrá 4/5 de la edad que tendrá Matilde*

15

	Presente	Dentro de 15 años
Matilde	$5x-15$	$5x$
Nora	$4x-15$	$4x$

Se le asigna un valor que tenga quinta

- *Dentro de 8 años, la edad de Nora será la que Matilde tiene ahora*

15

8

	Presente	Dentro de 8 años	Dentro de 15 años
Matilde	$5x-15$		$5x$
Nora	$4x-15$	$4x-7$	$4x$

iguales (dato)

$\rightarrow\ 5x-15=4x-7$

$x=8$

Reemplazamos en sus edades actuales para calcular lo pedido

	Pasado	Presente
Matilde	$2\times(\ )$	25
Nora	$1\times(\ )$	17

Diferencia vertical (cte.): $2(\ )-1(\ )=25-17\ \ =8$

Se debe ubicar el 8 para verificar la igualdad

Reemplazamos y se obtiene

	Pasado	Presente
Matilde	16	25
Nora	8	17

$\therefore\ 16+8=24$ años

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Cuando Raúl nació, Lucia tenía la tercera parte de lo que Raúl tiene. Si Paola tiene 10/9 de la edad de Raúl, ¿cuál de los tres es más joven y qué edad tiene, si la suma de las edades actuales de Raúl y Paola es 38 años?

A) Raúl, 20 años
B) Paola, 18 años
C) Raúl, 24 años
D) Lucía, 24 años
E) Raúl, 18 años

Resolución

Se pide el más joven y la edad que tiene.

Dato:
Suma de edades actuales de Raúl y Paola es 38 años.

Para saber quién es el más joven, se debe comparar las edades de los tres en un mismo tiempo. Para ello, se sabe que

- *Paola tiene 10/9 de la edad de Raúl*

	Presente
Raúl	$9x$
Paola	$10x$

Le asignamos un valor que tenga novena

Además

- *Cuando Raúl nació, Lucía tenía la tercera parte de lo que Raúl tiene*

	Nació Raúl	Presente
Raúl	0	$9x$
Paola	$\div 3$	$10x$
Lucía	$3x$	

Entonces, el tiempo transcurrido desde que nace Raúl hasta el presente es

+9x

	Nació Raúl	**Presente**
Raúl	0	$9x$
Paola		$10x$
Lucía	$3x$	$12x$

es el más joven → Raúl

Del dato

$9x+10x=38$

$19x=38$

$x=2$

Finalmente, el más joven es Raúl ($9x$ años).

$\therefore$ edad de Raúl$=9x=18$ años

Clave E

PROBLEMA N.° 17

Diana le dice a Carlos: *Mi edad es 4 años menor de la edad que tú tenías cuando yo tenía 8 años menos de la edad que tú tienes; y, cuando tú tengas el doble de la edad que tengo, nuestras edades sumarán 82 años.* ¿Qué edad tiene Diana?

A) 26 B) 24 C) 22
D) 20 E) 18

Resolución

Se pide la edad actual de Diana (x).
Del dato

- *Diana dice: mi edad es 4 años menor de la que tú tenías, cuando yo tenía 8 años menos de la edad que tú tienes...*

	Tenía	**Presente**
Diana	$y-8$	x
Carlos	$x+4$	y

Por el criterio del aspa

$y-8+y=x+x+4$

$2y-8=2x+4$

$2y=2x+12$

$y=x+6$

Reemplazamos y se obtiene

	Tenía	**Presente**
Diana	$x-2$	x
Carlos	$x+4$	$x+6$

Luego

... cuando tú (Carlos) tengas el doble de la edad que tengo, nuestras edades sumarán 82 años.

Por criterio del aspa

	Tenía	**Presente**	**Tengas**
Diana	$x-2$	x	$2x-6$
Carlos	$x+4$	$x+6$	$2x$

Suma=82 años

$\rightarrow\ 2x-6+2x=82$

$4x=88$

$\therefore\ x=22$ años

Clave C

PROBLEMA N.° 18

Un padre, una madre y su hija estaban reunidos y esta preguntó por la edad de su madre y su padre le dijo: *Nuestras tres edades juntas suman sesenta años. Como yo soy seis veces más viejo de lo que tú eres ahora, puede decirse que cuando sea el doble de viejo que tú, nuestras tres edades juntas serán el doble de lo que son ahora*. ¿Qué edad tiene la madre?

A) 32 años B) 30 años C) 29 años
D) 28 años E) 25 años

Resolución

Se pide la edad actual de la madre.
Se sabe que las tres edades (padre, madre e hijo) actuales suman 60.

Del dato:

- *El padre dijo: yo soy seis veces más viejo de lo que tú (hija) eres ahora...*

	Presente
Padre	$7x$
Madre	
Hija	x

Además

- *... cuando sea el doble de viejo que tú (hija), nuestras tres edades juntas serán el doble de lo que son ahora.*

	Presente	**Futuro**
Padre	$7x$	$2\times(\ )$
Madre		
Hija	x	$1\times(\ )$

diferencia cte.
$2\times(\ )-1\times(\ )=6x$

$6x$ para verificar la igualdad

Suma total (dato) $=60$ Suma total $=120$

Reemplazamos y calculamos las edades de la madre a partir de las sumas totales, es decir

$5x$ Por diferencia de tiempos

	Presente	**Futuro**
Padre	$7x$	$12x$
Madre	$60-8x$	$120-18x$
Hija	x	$6x$

Del intervalo de tiempo transcurrido se tiene que

$$(120-18x)-(60-8x)=5x$$
$$120-18x-60+8x=5x$$
$$60-10x=5x$$
$$15x=60$$
$$\rightarrow\ x=4$$

Finalmente, edad actual de la madre:

$$60-8x=28 \text{ años.}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

Hace $a+b+c$ años tu edad era $a+b$ veces la mía. Cuando tú tengas $b+c$ veces mi edad, habrán transcurrido, a partir de hoy, $c+b-a$ años. Entonces, yo tenía en años

A) $2\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right)$ B) $2b(b+c)$

C) $\dfrac{2(a+b)}{c}$

D) $2abc$ E) $2\left(\dfrac{b+c}{a-c}\right)(b+c-1)$

Resolución

Se pide la edad que yo tenía en años (x)

A partir de:

- *Hace $a+b+c$ años tú edad era $a+b$ veces la mía.*

$a+b+c$

	Tenía	Presente
yo	x	
tú	$(a+b)x$	

Luego, con el dato

- *Cuando tu tengas $b+c$ veces mi edad, habrán transcurrido a partir de hoy $c+b-a$ años.*

Se obtiene sumando los intervalos menores

$2(b+c)$

$a+b+c$ $\quad$ $c+b-a$

	Tenía	Pte.	Tengas
yo	x		$1<>x+2(b+c)$
tú	$(a+b)x$		$(b+c)<>(a+b)x+2(b+c)$

$$\rightarrow \frac{x+2(b+c)}{1}=\frac{(a+b)x+2(b+c)}{b+c}$$

$$(b+c)(x+2(b+c))=(a+b)x+2(b+c)$$

$$(b+c)x+2(b+c)^2=(a+b)x+2(b+c)$$

$$(a+b)x-(b+c)x=2(b+c)^2-2(b+c)$$

Factorizando en cada miembro

$$x(a+\cancel{b}-\cancel{b}-c)=2(b+c)(b+c-1)$$

$$x(a-c)=2(b+c)(b+c-1)$$

$$\therefore \quad x=2\left(\frac{b+c}{a-c}\right)(b+c-1)$$

Clave $\boxed{E}$

PROBLEMA N.° 20

Cuando él nació, yo tenía la edad que tú tienes, que a su vez es la edad que él tendrá cuando tú tengas 20 años y yo el doble de lo que tienes. ¿Qué edad tienes, si él tiene la edad que yo tenía cuando tú naciste, y en ese entonces mi edad era 5 años menos que tu edad actual?

A) 5 años $\quad$ B) 10 años $\quad$ C) 15 años

D) 18 años $\quad$ E) 20 años

Resolución

Se pide la edad que tiene tú: x años.

Comenzaremos con el dato

- *... él tiene la edad que yo tenía cuando tú naciste, y en ese entonces mi edad era 5 años menos que tu edad actual.*

Se obtiene de las edades de tú

x años

	Tú naciste	Presente
yo	$x-5$	
tú	0	x
él	▨	$x-5$

Tú es mayor que él

Él aún no nace

Luego

- *Cuando él nació, yo tenía la edad que tú tienes, que a su vez es la edad que él tendrá cuando tú tengas 20 años y yo el doble de lo que tienes.*

se calcula a partir del tiempo transcurrido (x)

x

	Tú naciste	Él nació	Presente	Tendrá
yo	$x-5$	x	$2x-5$	$2x$
tú	0		x	20
él	▨	0	$x-5$	x

Por el criterio del aspa

$$\cancel{2x}-5+20=x+\cancel{2x}$$

∴ $x=15$ años

Clave **C**

PROBLEMA N.° 21

Actualmente nuestras edades suman el doble de lo que tenía mi abuelo en el año 1982; además, ocurre que yo tengo la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tuviste, cuando yo tuve la tercera parte de la edad que tengo ahora. ¿Qué edad tienes actualmente?
Obs.: El abuelo nació en 1912.

A) 32 B) 80 C) 74
D) 48 E) 90

Resolución

Se pide la edad actual de tú.
Se sabe que: el abuelo nació en 1912.

De los datos:

- *Yo tengo la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tuviste, ...*

	Tuviste	Tenía	Presente
yo	iguales	b	a
tú	b	a	iguales

- *... cuando yo tuve la tercera parte de la edad que tengo ahora,* se tiene lo siguiente

Se obtiene por el criterio del aspa

	Tuviste	Tenía	Presente
yo	x	$2x$	$3x$
tú	$2x$	$3x$	$4x$

Por criterio del aspa

Suma=$7x$

Luego, con el dato

- *Actualmente, nuestras edades suman el doble de lo que tenía mi abuelo en 1982,* se obtiene

Edad actual = Año actual − Año de nacimiento

$$7x=2(1982-1912)$$

$$\cancel{7}x=2(\cancel{70})$$

$$x=20$$

Por lo tanto, tú tienes $4x=80$ años

Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

Dentro de 8 años, la edad de Pedro será la que Juan tiene ahora. Dentro de 15 años, Pedro tendrá 4/5 de la edad que tendrá Juan en ese entonces. ¿Cuál era la suma de las edades de Juan y Pedro, cuando Juan tenía el doble de la edad de Pedro?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

Resolución

Se pide la suma de edades cuando Juan tenía el doble de la edad de Pedro.

De los datos:

- *Dentro de 15 años, Pedro tendrá 4/5 de la edad que tendrá Juan en ese entonces.*

15 años

	Presente	Dentro de 15 años
Juan	$5x-15$	$5x$
Pedro	$4x-15$	$4x$

Le asignamos un valor que tenga quinta

- *Dentro de 8 años, la edad de Pedro será la que Juan tiene ahora*

8 años

	Presente	Dentro de 8 años	Dentro de 15 años
Juan	$5x-15$		$5x$
Pedro	$4x-15$	$4x-7$	$4x$

iguales (dato)

$\rightarrow$ $5x-15=4x-7$

$x=8$

Reemplazamos en sus edades actuales para calcular lo que se pide

	Pasado	Presente
Juan	$2\times(\ )$	25
Pedro	$1\times(\ )$	17

Diferencia vertical (cte) : $2\times(\ )-1\times(\ )=$ $25-17$ $=8$

se ubicará 8 para verificar la igualdad

Reemplazamos y se obtiene

	Pasado	Presente
Juan	16	25
Pedro	8	17

$\therefore$ $16+8=24$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Yo tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tuviste cuando yo tuve la novena parte de la edad que tengo ahora. Si nuestras edades suman 57 años, ¿cuántos años tengo?

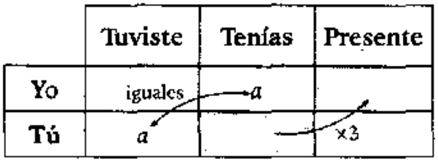
A) 27 B) 37 C) 47
D) 36 E) 26

Resolución

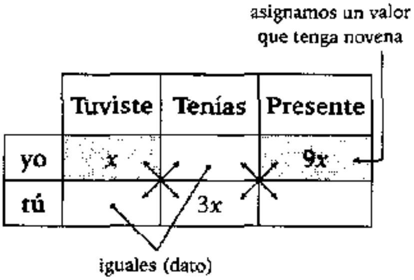
Se pide la cantidad de años que tiene yo.
Dato: nuestras edades actuales suman 57 años.

A partir de:

- *Yo tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tuviste*



- *... cuando yo tuve la novena parte de la edad que tengo ahora*, entonces



Calculamos las edades que faltan en la tabla con el criterio del aspa, de donde se obtiene

	Tuviste	Tenías	Presente
yo	x	$2x$	$9x$
tú	$2x$	$3x$	$10x$

Del dato

$$9x+10x=57$$

$$19x=57$$

$$x=3$$

Por lo tanto, yo tiene (en años) $9x=27$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 24

Luis dice: *La raíz cuadrada del año en que mi bisabuelo nació más la raíz cuadrada del año en que murió, es igual a la edad que tuvo cuando murió.* Las raíces cuadradas dan números exactos. ¿A qué edad murió el bisabuelo de Luis?

Obs.: El bisabuelo nació en el siglo XIX

A) 83 B) 85 C) 87

D) 89 E) 91

Resolución

Se pide la edad del bisabuelo de Luis al morir.

Se sabe que: el bisabuelo nació en el siglo XIX.

Por condición del problema

$$\sqrt{\begin{matrix}\text{Año de nacimiento}\\ \text{del bisabuelo (s. XIX)}\end{matrix}}+\sqrt{\begin{matrix}\text{Año de muerte}\\ \text{del bisabuelo}\end{matrix}}=\begin{matrix}\text{Edad del bisabuelo}\\ \text{al morir}\end{matrix}$$

Observación

Generalmente, por cada siglo existe un año que tiene raíz cuadrada exacta. Es decir

s. XVIII → $1764=42^2$
s. XIX → $1849=43^2$
s. XX → $1936=44^2$
s. XXI → $2025=45^2$

s. XXII → $2116=46^2$
s. XXIII → $2209=47^2$
s. XXIV → $2304=48^2$
⋮ ⋮ ⋮

En el problema, de la observación tenemos

$$\underset{\text{siglo XIX}}{\sqrt{1849}}+\sqrt{1936}=\begin{matrix}\text{Edad del bisabuelo}\\ \text{al morir}\end{matrix}$$

$$43+44=87$$

Por lo tanto, la edad del bisabuelo al morir es 87 años.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

Una herencia de 288 libras de oro se debe repartir entre tres hermanos en forma proporcional a sus edades. El menor se opone al reparto actual y propone repartirse dentro de 8 años, ya que recibiría 8 libras más. Sin embargo, el mayor no está de acuerdo ya que recibiría 8 libras menos. Halle las edades actuales de los tres si suman 48 años.

A) 20; 16 y 12
B) 22; 16 y 10
C) 20; 15 y 13
D) 24; 13 y 11
E) 30; 10 y 8

Resolución

Se pide las edades actuales de tres hermanos.

Sea edad del mayor: *a*.

Edad del segundo: *b*.

Edad del menor: *c*.

Se sabe que

$$a+b+c=48 \qquad \text{(I)}$$

De los datos del problema, el reparto debe ser proporcional a sus edades, es decir:

	En el presente	Dentro de 8 años
Al mayor :	$a\times(\ )$	$(a+8)\times(\ )$
Al segundo :	$b\times(\ )$	$(b+8)\times(\ )$
Al menor :	$c\times(\ )$	$(c+8)\times(\ )$

Total a repartir $:\underbrace{(a+b+c)}_{48(\text{dato})}\times(\ )=\underbrace{(a+b+c+24)}_{72}\times(\ )=288$

verifica la igualdad con 6

verifica la igualdad con 4

Reemplazamos los respectivos valores y se obtiene

	En el presente	Dentro de 8 años	
Al mayor :	$6a$	$4(a+8)$	recibe 8 menos que en el presente
Al segundo :	$6b$	$4(b+8)$	
Al menor :	$6c$	$4(c+8)$	recibe 8 más que en el presente
Total :	288	288	

De donde

$$6a-4(a+8)=8$$
$$6a-4a-32=8$$
$$2a=40$$
$$\rightarrow\ a=20$$

$$4(c+8)-6c=8$$
$$4c+32-6c=8$$
$$2c=24$$
$$\rightarrow\ c=12$$

En (I)

$$20+b+12=48$$
$$b=16$$

Por lo tanto, las edades de los hermanos son 20; 16 y 12.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

El señor Eduardo tuvo un hijo a los 32 años; y un nieto, 18 años más tarde. Actualmente, el nieto tiene 22 años; el abuelo afirma tener 60 años; y el hijo, 38. Halle el producto de los años que ocultan ambos.

A) 26
B) 24
C) 22
D) 20
E) 18

Resolución

Se pide el producto de la cantidad de años que ocultan Eduardo y su hijo.

Del dato:

- *El señor Eduardo tuvo un hijo a los 32 años y un nieto 18 años más tarde; actualmente el nieto tiene 22 años...*

Se obtiene de las edades del nieto

18 años 22 años

	Nació su hijo	Nació su nieto	Presente
Eduardo	32	50	72
Su hijo	0	18	40
Su nieto		0	22

De la tabla tenemos que

Edad real de Eduardo = 72
dice tener Eduardo = 60
entonces oculta = 12 años

Edad real de hijo = 40
dice tener el hijo = 38
entonces oculta = 2 años

∴ $12\times2=24$

Clave B

PROBLEMA N.° 27

Claudia comenta: *Hoy tengo 10 años menos de la edad que tenía mi padre cuando yo nací, además, las dos últimas cifras del año en que nació mi padre son iguales a las dos últimas cifras del año en que nos encontramos, pero en orden invertido* (año actual > 1990). Entonces, ¿en qué año su padre tuvo 23 años, si el próximo año ella cumplirá esa edad?

A) 1978
B) 1980
C) 1962
D) 1979
E) 1970

Resolución

Se pide el año en el que el padre tuvo 23 años.

Se sabe que:

año actual $\overline{19mn}>1990$

edad actual de Claudia: 22 años

Del dato:

- *Claudia comenta: hoy tengo 10 años menos de la edad que tenía mi padre cuando yo nací, ...*

Se deduce de las edades de Claudia

22

	Nació Claudia	Presente
Padre	32	54
Claudia	0	22

se halla a partir del tiempo transcurrido

Además, de

- *... las dos últimas cifras del año en que nació mi padre son iguales a las dos últimas cifras del año actual, pero en orden invertido,*

$$\boxed{\text{Año actual}-\text{Año nac.}=\text{Edad actual}}$$

$$\overline{\cancel{19}mn}-\overline{\cancel{19}nm}=54$$

Descomponemos los numerales

$10m+n-(10n+m)=54$

$9(m-n)=54$

$m-n=6$

$\downarrow\quad\downarrow$

$9\quad 3$

Entonces

Año de nacimiento :1939

Año actual :1993

Luego, año en que el padre tuvo 23 años

año pedido=año de nac.+23

año pedido=1939+23

$\therefore$ año pedido=1962

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

Los años bisiestos no tienen aniversarios anuales. El siguiente problema se planteó el 29 de febrero de 1896. Leyla dijo: *Mario, sabes bien que tú tenías el triple de mi edad cuando nos conocimos, y que yo tengo ahora, exactamente, la misma edad que tú tenías en ese entonces, y que cuando yo tenga tres veces mi edad actual, nuestros años juntos sumarán cien.* ¿Cuál será la edad de Mario el próximo 29 de febrero?

Obs.: Cada uno cumple años en enero.

A) 21
B) 24
C) 16
D) 33
E) 29

Resolución

Se pide la edad de Mario el próximo 29 de febrero.

Se sabe que: cada uno cumple años en enero; hoy es 29 de febrero de 1896.

Del enunciado:

- *Leyla dijo: Mario, ... tú tenías el triple de mi edad cuando nos conocimos, y que yo tengo ahora, la misma edad que tú tenías en ese entonces, ...*

	Tenías	Presente
Leyla	1×()	3×()
Mario	3×()	5×()

Se deduce por el criterio del aspa

- *... y que cuando yo tenga tres veces mi edad actual nuestros años sumarán cien.*

se deduce por el criterio del aspa

	Tenías	Presente	Tenga
Leyla	1×()	3×()	9×( )
Mario	3×()	5×()	11×( )

Suma: 9×( )+11×( )=100
(dato)

se verifica la igualdad con el 5

Reemplazamos y se obtiene:

	Tenías	Presente	Tenga
Leyla	5	15	45
Mario	15	25	55

La edad de Mario el próximo 29 de febrero; es decir, dentro de 8 años (1900 no es bisiesto) será

25+8=33 años

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

El promedio de edades de 4 personas es K años. ¿Cuál es la edad mínima que puede tener cualquiera de ellas, si ninguna de las personas tiene más de P años?

A) $4K-3P$ B) $3K-4P$ C) $\frac{2}{3}(K-P)$

D) $\frac{3}{2}(P-K)$ E) $8K-3P$

Resolución

Se pide la edad mínima de una de las 4 personas (x).

Se sabe que ninguna tiene más de P años.
Del dato

$$\frac{x+(\text{suma de edades de las otras 3 personas})}{4}=K(\text{promedio})$$

$$\overset{\text{mínimo valor}}{x}+\underbrace{(\text{suma de edades de las otras 3 personas})}_{\text{máxima posible (c/u } P \text{ años)}}=4K$$

$$x+3(P)=4K$$

$\therefore\ x=4K-3P$ años

Clave A

PROBLEMA N.° 30

Mi abuelo nació en el siglo XIX y, en 1887, cumplió tantos años como la suma de las cifras del año de su nacimiento. Yo nací exactamente 100 años después del año de su nacimiento. ¿Cuántos años cumpliré este año 1995?

A) 20 B) 30 C) 29
D) 25 E) 18

Resolución

Se pide la cantidad de años que tendré en 1995.

Datos:

- Nací 100 años después del nacimiento de mi abuelo.
- Mi abuelo nació en el siglo XIX : $\overline{18ab}$

Se sabe que

$$\text{año de nacimiento}+\text{edad actual}=\text{año actual}$$

Entonces, para el abuelo

$$\overline{18ab}+(1+8+a+b)=1887$$

$$\cancel{1800}+10a+b+9+a+b=1887$$

$$\underset{\underset{6}{\downarrow}}{11a}+\underset{\underset{6}{\downarrow}}{2b}=78\quad\text{(única solución)}$$

Año de nacimiento del abuelo$=1866$

Luego, año de mi nacimiento será

$1866+100=1966$

En 1995 tendré

$$\overset{\text{A. actual}}{1995}-\overset{\text{A. nac.}}{1966}=29\text{ años}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 31

Una persona nació en $\overline{19ab}$ y en $\overline{19ba}$ cumplió b^2-a^2 años. Halle su edad actual, si es mayor de 70 años y menor de 80 años.
(Año actual: 1997)

A) 71 B) 42 C) 79
D) 60 E) 52

Resolución

Se pide la edad actual de una persona: x.

$70 < x < 80$

Se sabe que año actual: 1997.

Del dato

$$\overline{19ab}+(b^2-a^2)=\overline{19ba}$$

$$\cancel{1900}+10a+b+b^2-a^2=\cancel{1900}+10b+a$$

$$9a-9b=a^2-b^2$$

$$9\cancel{(a-b)}=(a+b)\cancel{(a-b)}$$

$$\rightarrow\ a+b=9 \qquad\qquad (\text{I})$$

Como $70 < x < 80$, entonces, $\overline{19ab} < \underbrace{19\underline{27}}_{1997-70}$

$$\text{En (I)}\quad \begin{array}{ccc} a & + & b=9 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 8 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Año de nacimiento}=1918 \\ \underline{\text{Año actual}\qquad\quad =1997}(\text{dato}) \end{array}\right)-$$

$\therefore\ x=79$ años

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

En el mes de julio de 1993 se le pidió a 12 alumnos que sumen los años que tienen a los años en los cuales nacieron y dicho resultado fue 23 908. ¿Cuántos alumnos todavía no cumplían años en ese momento?

A) 6 B) 8 C) 4

D) 17 E) 21

Resolución

Se pide la cantidad de alumnos que aún no cumplen años: x

Recuerda

- Si la persona ya cumplió años

$$\left(\begin{array}{c}\text{Año de}\\ \text{nacimiento}\end{array}+\begin{array}{c}\text{Edad}\\ \text{actual}\end{array}=\begin{array}{c}\text{Año}\\ \text{actual}\end{array}\right)$$

- Si la persona aún no cumple años

$$\left(\begin{array}{c}\text{Año de}\\ \text{nacimiento}\end{array}+\begin{array}{c}\text{Edad}\\ \text{actual}\end{array}=\begin{array}{c}\text{Año anterior}\\ \text{al actual}\end{array}\right)$$

En el problema, en el mes de julio de 1993

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^{\text{er}}\text{ alum.} & \text{año de nac.+edad actual}=1992 \\ 2.^{\circ}\text{ alum.} & \text{año de nac.+edad actual}=1992 \\ \vdots & \qquad\vdots \\ & \text{año de nac.+edad actual}=1992 \end{array}\right\}\begin{array}{c} x \\ \left(\begin{array}{c}\text{aún no}\\ \text{cumple años}\end{array}\right)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{año de nac.+edad actual}=1993 \\ & \text{año de nac.+edad actual}=1993 \\ \vdots & \qquad\vdots \\ 12.^{\circ}\text{ alum.} & \text{año de nac.+edad actual}=1993 \end{array}\right\}\begin{array}{c} 12-x \\ \left(\begin{array}{c}\text{ya cumplie-}\\ \text{ron años}\end{array}\right)\end{array}$$

Al sumar, se tiene

$$1992x+1993(12-x)=23\,908$$

$$1992x+23916-1993x=23\,908$$

$\therefore\ x=8$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

Jorge sumó: un año, más dos años, más tres años, y así sucesivamente, hasta la edad actual que tiene, dando como resultado un número de tres cifras iguales. ¿Cuál es la edad de Jorge?

A) 36 B) 41 C) 42

D) 51 E) 54

Resolución

Se pide la edad de Jorge: x años.

Del dato:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+x}=\overline{aaa}$$

$$\frac{x(x+1)}{2}=\overline{aaa}$$

$$x(x+1)=2\times\overline{aaa}$$

$$x(x+1)=2\times a\times 111$$

$$x(x+1)=2\times a\times 3\times 37$$

$$\underbrace{x(x+1)}_{\text{consecutivos}}=6\times 37\times\underset{\overset{\downarrow}{6}}{a}$$

Entonces

$$\underbrace{x(x+1)=36\times 37}$$

$\therefore\ x=36$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

Juan nació en la primera mitad del siglo XIX, 19 años antes de que naciera José; en el año x^2, Juan cumplió una edad igual a la raíz cuadrada de ese año. ¿En qué año José cumplió 15 años?

A) 1847
B) 1850
C) 1843
D) 1840
E) 1839

Resolución

Se pide el año en que José cumplió 15 años.

Se sabe que Juan nació en la primera mitad del siglo XIX

Del dato

- *... en el año x^2, Juan cumplió una edad igual a la raíz cuadrada de ese año.*

$$\text{año de nac. de Juan}+\sqrt{1849}=\underset{\nwarrow\ \text{único año del s. XIX con }\sqrt{\ }\text{ exacta}}{1849}$$

año de nacimiento de Juan $=1806$

Además

- *Juan nació 19 años antes que José*

$\rightarrow$ año de nacimiento de José $=1806+19=1825$

José cumplió 15 años en $1825+15=1840$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

Si Aurora tuviera n años menos, tendría $n+5$ años, y si Paola tuviera $n+1$ años más, tendría $2n+8$. Si las edades actuales de ambas suman 42 años, ¿cuál es la edad de Teresa, quien nació cuando Aurora tenía 5 años?

A) 19	B) 20	C) 22
D) 25		E) 27

Resolución

Se pide la edad de Teresa.

Dato: Teresa nació cuando Aurora tenía 5 años.

Del problema, calculamos las edades actuales de

$$E_{\text{Aurora}}-n=n+5\ \rightarrow\ E_{\text{Aurora}}=2n+5$$

$$E_{\text{Paola}}+(n+1)=2n+8\ \rightarrow\ E_{\text{Paola}}=n+7$$

Se sabe que

$$E_{\text{Aurora}}+E_{\text{Paola}}=42$$
$$(2n+5)+(n+7)=42$$
$$3n+12=42$$
$$3n=30$$
$$n=10$$

Finalmente, del dato

$$E_{\text{Teresa}}=E_{\text{Aurora}}-5$$
$$E_{\text{Teresa}}=2(10)+5-5$$
$$\therefore\ E_{\text{Teresa}}=20 \text{ años}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

En un grupo de seis personas, ninguna de ellas es menor de 15 años. Si el promedio aritmético de las edades es 18 años, ¿cuál es la máxima edad que puede tener una de ellas?

A) 30 B) 33 C) 42
D) 51 E) 15

Resolución

Se pide la máxima edad de una de las 6 personas.

Dato:

- Ninguna persona es menor de 15 años.
- Promedio de las edades de 6 personas es 18 años.

De los datos, se tiene que:

$$\frac{\overset{\text{máxima}}{E_1}+\overbrace{E_2+E_3+E_4+E_5+E_6}^{\text{mínimas (15 años)}}}{6}=18$$

Entonces

$$\frac{E_{\text{máx}}+\overbrace{15+15+\ldots+15}^{5\text{ veces}}}{6}=18$$

$$E_{\text{máx}}+75=6(18)$$
$$E_{\text{máx}}=108-75$$
$$\therefore\ E_{\text{máx}}=33 \text{ años}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 37

Las edades de 3 hermanos (niños) están representadas por números enteros positivos, tal que si a 100 veces la edad del 1.° se le suma 10 veces la edad que tenía el 2.° hace 4 años y luego se le añade la edad que tendrá el 3.° dentro de 7 años, se obtendrá 953. Halle la edad que tendrá el menor cuando el mayor tenga tantas veces su edad actual como los años que el segundo aventaja al menor.

A) 11 B) 13 C) 15
D) 14 E) 19

Resolución

Sea

- Edad del mayor de los hermanos : a
- Edad del segundo de los hermanos : b
- Edad del menor de los hermanos : c

Se sabe que

$$100a+10(b-4)+(c+7)=953$$
$$100a+10b-40+c+7=953$$
$$\underbrace{100a+10b+c}=986$$
$$\overline{abc}=986$$
$$\rightarrow\ a=9;\ b=8 \wedge c=6$$

Luego, se pide:

- *... la edad que tendrá el menor (x) cuando el mayor tenga tantas veces su edad actual como los años que el segundo aventaja al menor.*

2 veces su edad actual

	Presente	Futuro
Mayor	9	18
Segundo	8	
Menor	6	x

2 años más que el menor

Por el criterio del aspa

$$x+9=18+6$$

$\therefore\ x=15$ años

Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

La diferencia de los cuadrados de las edades de 2 personas es 189. Halle las edades que tendrán cuando la edad del mayor sea el doble de la del menor. Considere que sus edades actuales suman 21.

A) 28 y 14
B) 15 y 8
C) 24 y 12
D) 18 y 9
E) 26 y 13

Resolución

Se pide la edad de las personas cuando la edad de una sea el doble de la otra.

Sea

Edad actual del mayor: x
Edad actual del menor: y

Del problema, se cumple que

$$x^2-y^2=189 \text{ (diferencia de cuadrados)}$$

$$\underbrace{(x+y)}_{21\text{ (dato)}}(x-y)=189$$

$$\begin{aligned} \rightarrow\ & x-y=9 \\ \text{ahora con }\ & \underline{x+y=21} \quad (+) \\ & 2x=30 \\ \rightarrow\ & x=15 \\ & y=6 \end{aligned}$$

Finalmente, por condición en lo pedido

	Presente	Futuro
Mayor	15	2×( )
Menor	6	1×( )

Diferencia vertical (cte.): $15-6 = 2\times(\ )-1\times(\ )=9$

El 9 verifica la igualdad

Reemplazando, se obtiene

	Presente	Futuro
Mayor	15	18
Menor	6	9

Por lo tanto, ellos tendrán 18 y 9 años.

Clave **D**

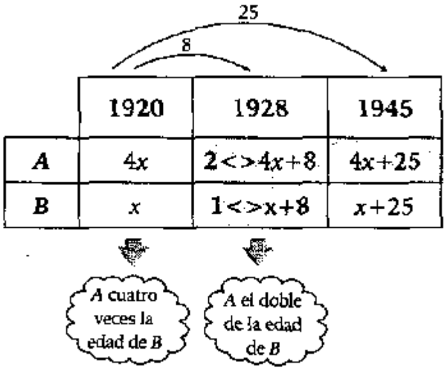
PROBLEMA N.° 39

En 1920, la edad de A era cuatro veces la edad de B; en 1928, la edad de A fue el doble de la edad de B. ¿Cuál fue la edad de A en 1945?

A) 60 B) 41 C) 42
D) 43 E) 64

Resolución

Se pide la edad de A en 1945.
Ordenamos los datos en una tabla, y se obtiene



	1920	1928	1945
A	$4x$	2<>4x+8	$4x+25$
B	x	1<>x+8	$x+25$

De la relación en el año 1928

$$\frac{4x+8}{2}=\frac{x+8}{1}$$

$$2x+4=x+8$$

$$x=4$$

Luego, edad de A en 1945

$4x+25=41$ años

Clave **B**

PROBLEMA N.° 40

La edad de Nora es un número de dos cifras que es igual a x veces la suma de sus cifras. Al invertir el orden de las cifras de su edad, esta sería la suma de las cifras multiplicada por

A) x B) $x+1$ C) $x-1$
D) $11-x$ E) $11+x$

Resolución

Sea la edad de Nora: $\overline{ab}$

Por dato

$$\overline{ab}=(a+b)x \qquad \text{(I)}$$

Además, si se invierte el orden de las cifras de la edad de Nora

$$\overline{ba}=(a+b)\underset{\text{se pide su valor}}{y} \qquad \text{(II)}$$

Luego, (I) + (II)

$$\overline{ab}+\overline{ba}=(a+b)x+(a+b)y$$

Descomponemos el primer miembro

$$10a+b+10b+a=(a+b)x+(a+b)y$$

$$11a+11b=(a+b)x+(a+b)y$$

Factorizamos

$$11\cancel{(a+b)}=\cancel{(a+b)}(x+y)$$

$$x+y=11$$

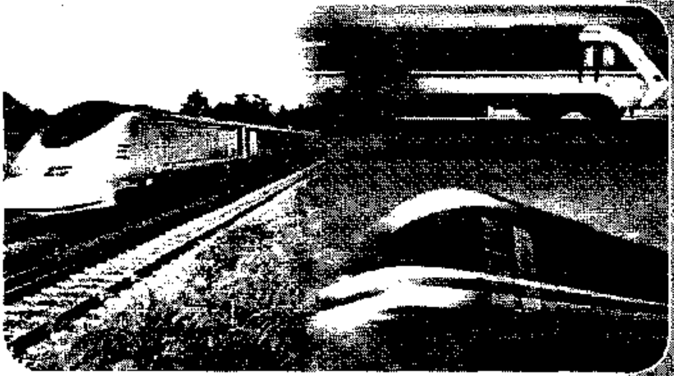
$$\therefore\ y=11-x$$

Clave **D**

Capítulo

7

Problemas sobre móviles



En algunos casos, seguramente, nos hemos puesto a pensar en cómo los objetos se encuentran en movimiento. Cuando entramos a una tienda comercial, observamos una gran cantidad de personas desplazándose de un punto a otro, y cuando estamos echados sobre nuestra cama podemos quedarnos "sin movernos". Pero, ¿qué tendrían en común estas dos situaciones? Aunque superficialmente creamos que son situaciones diferentes, tienen en común el movimiento. Si bien es cierto, en el primer caso se concibe el movimiento como cambio de posición visible de los cuerpos; en el segundo caso, también existe movimiento, a pesar del aparente "reposo", ya que nuestro cuerpo realiza un desplazamiento asociado al movimiento permanente de la Tierra. En este capítulo trataremos problemas asociados a la rapidez constante de móviles y a la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado para dicho recorrido.

Capítulo 7

Problemas sobre móviles

PROBLEMA N.° 1

La rapidez respectiva de dos móviles está en la relación de 3 a 4. ¿Dentro de cuánto tiempo estarán separados una distancia de 60 km, si partieron juntos en el mismo sentido, sabiendo, además, que la diferencia de la rapidez de ambos es de 10 km/h?

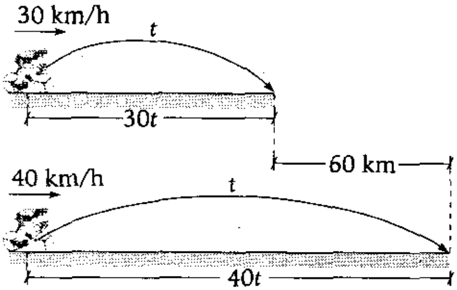
A) 4 h
B) 7 h
C) 5 h
D) 8 h
E) 6 h

Resolución

Piden ¿dentro de cuánto tiempo los dos móviles estarán separados una distancia de 60 km?
Datos: la relación de la rapidez de los dos móviles es de 3 a 4 y además la diferencia de estas es 10 km/h

De lo anterior la rapidez de los móviles es 30 km/h y 40 km/h

Graficamos



Del gráfico, tenemos

$$40t-30t=60 \rightarrow t=6\text{ h}$$

Por lo tanto, dentro de 6h los móviles estarán separados 60 km.

Clave E

PROBLEMA N.° 2

Un ciclista viaja, desde *A* hacia *B*, a 80 km/h y retorna por el mismo camino a 70 km/h. Si hace el recorrido en forma continua y en un tiempo total de 6 horas, determine la distancia de *A* hasta *B*

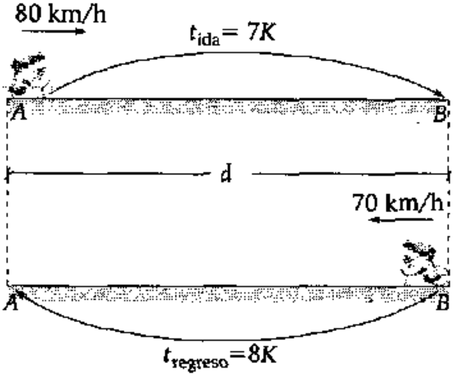
A) 214 km B) 218 km C) 220 km D) 224 km E) 216 km

Resolución

Piden determinar la distancia de *A* hasta *B*.

Ya que tanto el camino de ida como el de vuelta se recorren una misma distancia, el tiempo empleado es inversamente proporcional a la rapidez, entonces

$$v \text{ IP } t \rightarrow \frac{t_{\text{ida}}}{t_{\text{regreso}}}=\frac{70\text{ km/h}}{80\text{ km/h}} \rightarrow \begin{matrix} t_{\text{ida}}=7K \\ t_{\text{regreso}}=8K \end{matrix}$$



Además, se sabe que

$$\underbrace{\text{tiempo total}}_{7K+8K}=6\text{ h}$$

$$K=\frac{2}{5}$$

Por definición

$$d=80(7K)=70(8K)$$

$$d=560K=560\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$d=224\text{ km}$$

Por lo tanto, la distancia entre A y B es 224 km.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

Un carro sale, desde A hacia B, a 80 km/h y regresa a 50 km/h después de 16 horas. Si el carro se detuvo en B por 2 horas y luego se detuvo una hora en el camino de regreso, determine la distancia AB

A) 450 km
B) 600 km
C) 400 km
D) 550 km
E) 480 km

Resolución

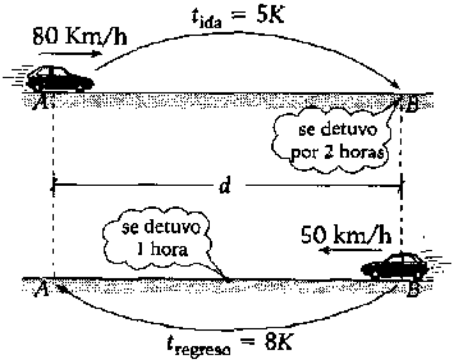
Piden determinar la distancia de A hasta B

Datos: un carro sale de A hacia B a 80 km/h y regresa a 50 km/h después de 16 h.

Considerando la distancia constante de ida y vuelta, entonces, la rapidez es inversamente proporcional con el tiempo empleado.

$$v \text{ IP } t \rightarrow \frac{t_{\text{ida}}}{t_{\text{regreso}}}=\frac{50\text{ km/h}}{80\text{ km/h}} \rightarrow \begin{matrix} t_{\text{ida}}=5K \\ t_{\text{regreso}}=8K \end{matrix}$$

Graficando tenemos



Además, se sabe que

tiempo total $= 16$ h

Analizamos el tiempo hábil de recorrido

$$16\text{ h} - \underbrace{3\text{ h}}_{\text{detenido}} = 13\text{ h}$$

$$\underbrace{\text{tiempo total recorrido}} = 13\text{ h}$$

$$5K + 8K = 13$$

$$K = 1$$

Por definición

$$d = 80(5K) = 50(8K)$$

$$d = 400K = 400(1)$$

$$d = 400\text{ km}$$

Por lo tanto, la distancia de A hasta B es 400 km.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

Juana se dirige, desde su casa a la academia, en bicicleta, empleando un tiempo de 30 minutos; para volver, aumenta su rapidez inicial en 4 m/min, demorándose esta vez 6 minutos menos. ¿Cuál es el espacio que recorrió en total?

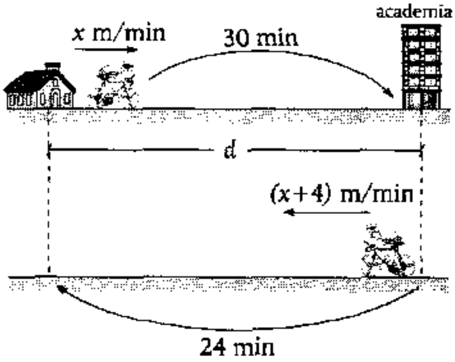
A) 960 m
B) 920 m
C) 860 m
D) 880 m
E) 940 m

Resolución

Piden el espacio recorrido en total.

Datos: Juana se dirige desde su casa a la academia, en bicicleta, empleando un tiempo de 30 minutos.
Al volver, aumenta su rapidez inicial en 4 m/min, demorándose 6 minutos menos.

Graficamos



Para distancia constante, tenemos:

$$v \text{ IP } t \rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{24}{30}$$

$$\rightarrow x = 16$$

Por definición

$$d = 30x = 24(x+4)$$

$$d = 30(16) = 480\text{ m}$$

Por lo tanto, el espacio recorrido (ida y vuelta) es

$$2d = 960\text{ m}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 5

Para ir de A a B, un móvil emplea 20 horas. Si quisiera hacerlo en 25 horas, tendría que disminuir su rapidez en 8 km/h. ¿Cuánto mide el tramo AB?

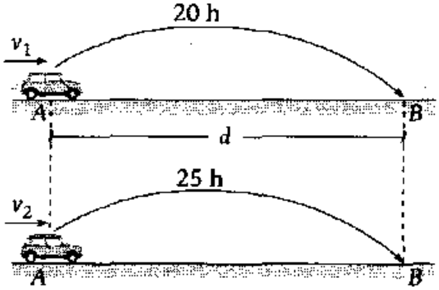
A) 720 km
B) 820 km
C) 400 km
D) 600 km
E) 800 km

Resolución

Piden: ¿cuánto mide el tramo AB?

Datos: para ir de A a B el móvil emplea 20 horas; si quisiera hacerlo en 25 horas, tendría que disminuir su rapidez en 8 km/h.

Graficamos



Para distancia constante, tenemos:

$$v \text{ IP } t \rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\frac{25}{20} \rightarrow \begin{matrix} v_1=5K \\ v_2=4K \end{matrix}$$

Por dato

$v_1-v_2=8$

$5K-4K=8$

$K=8$

Por definición

$d=20v_1=25v_2$

$d=20(5K)=25(4K)$

$d= 100K=100(8)$

$d=800$

Por lo tanto, el tramo AB mide de 800 km.

Clave E

PROBLEMA N.° 6

Al ir de mi casa a la academia me doy cuenta de que si voy a 40 km/h demoro 20 minutos más que si fuera a 60 km/h. ¿Cuál es la distancia entre mi casa y la academia?

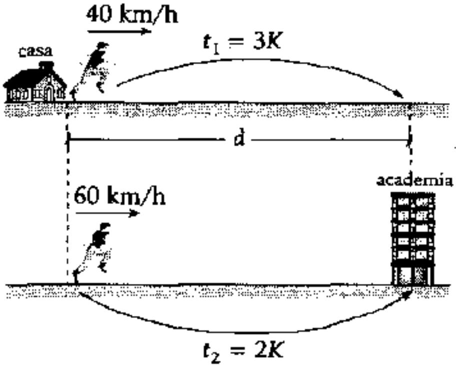
A) 42 km
B) 40 km
C) 52 km
D) 48 km
E) 47 km

Resolución

Piden: ¿cuál es la distancia entre mi casa y la academia?

Datos: si voy a 40 km/h demoro 20 minutos más que si fuera a 60 km/h.

Graficamos



Del gráfico (d=constante)

$$v \;\; \text{IP} \;\; t \;\rightarrow\; \frac{40}{60}=\frac{t_2}{t_1} \;\rightarrow\; \begin{matrix} t_1=3K \\ t_2=2K \end{matrix}$$

Por dato: 20 minutos $<>$ $\frac{1}{3}$ hora

$$t_1-t_2=\frac{1}{3}\,\text{h}$$

$$3K-2K=\frac{1}{3}\,\text{h}$$

$$K=\frac{1}{3}\,\text{h}$$

Por definición

$$d=40(3K)=60(2K)$$

$$d=120K$$

$$d=120\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$d=40 \text{ km}$$

Por lo tanto, la distancia entre mi casa y la academia es 40 km.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 7

Un motociclista observa que 1/5 de lo que ha recorrido equivale a los 3/5 de lo que falta recorrer. ¿Cuántas horas habrá empleado hasta el momento, si todo el viaje lo hace en 12 horas?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución

Piden: ¿cuántas horas habrá empleado hasta el momento, si todo el viaje lo hace en 12 horas?

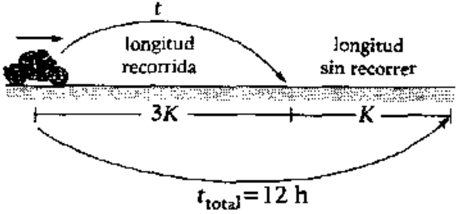
Datos: un motociclista observa que 1/5 de lo que ha recorrido equivale a los 3/5 de lo que falta recorrer.

Entonces

$$\frac{1}{\cancel{5}}\begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{recorrida}\end{pmatrix}=\frac{3}{\cancel{5}}\begin{pmatrix}\text{longitud}\\ \text{sin recorrer}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \;\; \begin{matrix}\text{longitud}\\ \text{recorrida}\end{matrix}=3K \;\;\; y \;\;\; \begin{matrix}\text{longitud}\\ \text{sin recorrer}\end{matrix}=K$$

Gráficamente:



Consideramos la rapidez constante: t DP d

$$\frac{t}{12}=\frac{3K}{4K}$$

$$\rightarrow \;\; t=9 \text{ h}$$

Por lo tanto, hasta ese momento habrá empleado 9 h.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 8

Dos móviles distan 200 km, salen al encuentro, desde dos puntos *A* y *B*, con una rapidez de 60 km/h y 40 km/h, respectivamente.
¿En qué tiempo se encontrarán y a qué distancia de *A*?

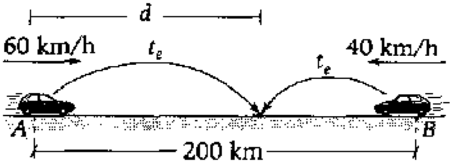
A) 4 h y 30 km
B) 1 h y 1 km
C) 6 h y 100 km
D) 2 h y 120 km
E) 10h y 120 km

Resolución

Piden: ¿en qué tiempo se encontrarán y a qué distancia de *A*?

Datos: dos móviles distan 200 km salen al encuentro desde dos puntos *A* y *B*, con una rapidez de 60 km/h y 40 km/h.

Graficamos



Aplicamos tiempo de encuentro

$$t_e=\frac{200}{60+40}=2\text{ h}$$

Luego, la distancia respecto al punto *A* desde el punto de encuentro, es:

$$d=60\times t_e=60\times(2)$$

$$\rightarrow\ d=120\text{ km}$$

Por lo tanto, se encontrarán en 2 h y a 120 km del punto *A*.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

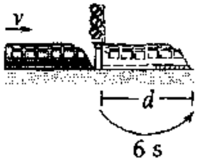
Un tren tardó 6 segundos en pasar por un semáforo y 24 segundos en atravesar un túnel de 240 metros de longitud. ¿Cuánto tardará en cruzar una estación de 160 m de longitud?

A) 30 s
B) 20 s
C) 18 s
D) 24 s
E) 16 s

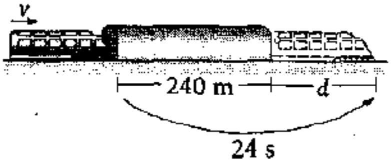
Resolución

Piden: ¿cuánto tardará en cruzar una estación de 160 m de longitud?

Datos: un tren tardó 6 segundos en pasar un semáforo y 24 segundos en atravesar un túnel de 240 metros de longitud.



$$\rightarrow\quad v=\frac{d}{6}\qquad\text{(I)}$$



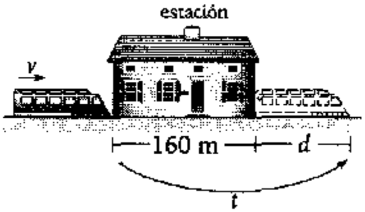
$$\rightarrow\quad v=\frac{d+240}{24}\qquad\text{(II)}$$

De (I) = (II)

$$\frac{d}{6}=\frac{d+240}{24}$$

$$\rightarrow \; d=80 \text{ m} \quad \text{y} \quad v=\frac{40}{3} \text{ m/s}$$

En lo pedido



Reemplazamos

$$\rightarrow \quad t=\frac{d+160}{v}$$

$$t=\frac{80+160}{\frac{40}{3}}$$

$t=18$ segundos

Por lo tanto, tardará en cruzar la estación 18 segundos.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Un tren, en cruzar un túnel de 120 m de longitud, tarda 60 s, y en pasar delante de un observador, emplea 20 s. ¿Cuál es la longitud del tren?

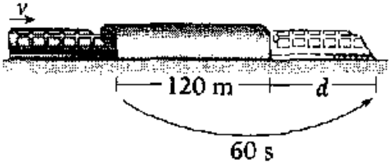
A) 80 m
B) 100 m
C) 120 m
D) 60 m
E) 50 m

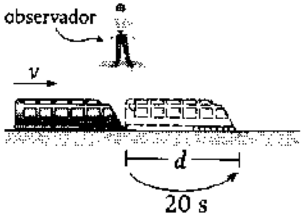
Resolución

Piden: ¿cuál es la longitud del tren?

Datos: un tren, en cruzar un túnel de 120 m, tarda 60 s y en pasar delante de un observador emplea 20 s.

Analizamos las 2 situaciones.





Para rapidez constante

$$d \;\text{DP}\; t \;\rightarrow\; \frac{120+d}{d}=\frac{60}{20}$$

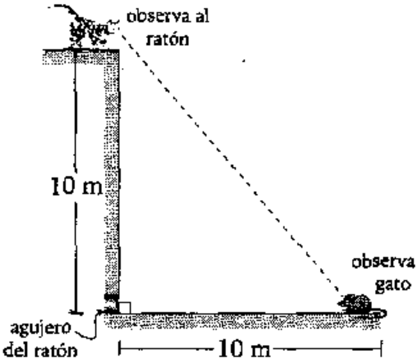
$$\rightarrow \; d=60 \text{ m}$$

Por lo tanto, la longitud del tren es 60 m.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 11

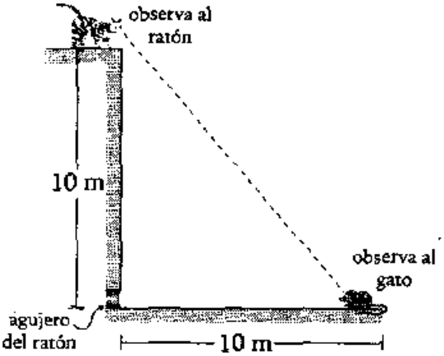
Un gato observa a un ratón que se dirigía a su guarida (ver gráfico), de pronto el ratón emprende veloz huida hacia su agujero; en forma simultánea, el gato va a la caza del ratón, con la misma rapidez de este. ¿Atrapará el felino al pobre roedor?



A) sí
B) no
C) falta más información
D) absurdo
E) el gato no come ratones

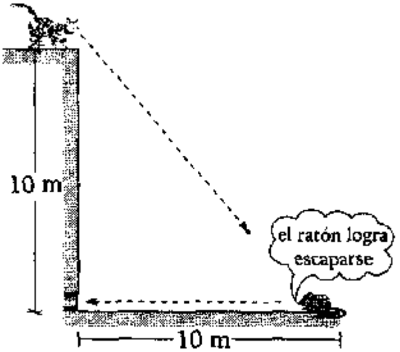
Resolución

Piden: ¿atrapará el felino al pobre roedor?
Dato: en el gráfico se considera que el gato y el ratón tienen igual rapidez y parten simultáneamente.



Consideramos que los dos animales se desplazarán en función de sus instintos, el ratón se moverá en línea recta al agujero y, en su lugar, el gato se desplazará en línea recta a la posición inicial del ratón.

Representamos gráficamente



Por lo tanto, el felino NO atrapará al roedor.

Clave B

PROBLEMA N.° 12

¿Cuántas horas emplea un tren, que viaja a una rapidez de 40 km/h entre dos paradas, para recorrer a kilómetros, si hace n paradas de m minutos cada una?

A) $\frac{3a+2mn}{120}$

B) $3a+mn$

C) $\frac{3a}{40}$

D) $\frac{a+m}{n}$

E) $a+mn$

Resolución

Piden el tiempo empleado (en horas) por el tren.
Datos: el tren viaja a 40 km/h, una distancia de a kilómetros, con n paradas de m minutos cada una.

Calculamos

$$\begin{matrix}\text{tiempo}\\\text{total}\end{matrix}=\underbrace{\overset{\text{(en horas)}}{\text{tiempo en recorrido}}}_{\frac{a}{40}}+\underbrace{\overset{\text{(en horas)}}{\text{paradas}}}_{\frac{mn}{60}}$$

$$\begin{matrix}\text{tiempo}\\\text{total}\end{matrix}=\frac{3a+2mn}{120}\text{ horas}$$

Por lo tanto, el tren demorará $\frac{3a+2mn}{120}$ horas en realizar dicho recorrido.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 13

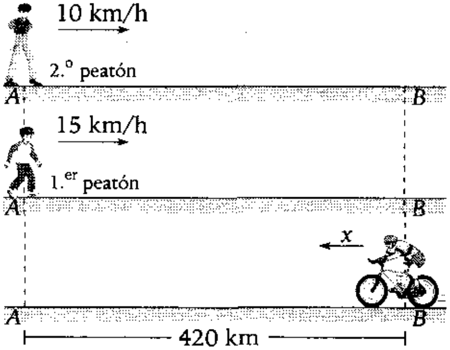
Desde A parten dos peatones con rapidez de 10 y 15 km/h, con dirección a B. Al mismo tiempo, un ciclista parte de B hacia A, con rapidez constante. Si este se cruza con uno de los peatones 2 horas después que se cruzó con el otro, halle la rapidez del ciclista si $AB=420$ km.

A) 20 km/h
B) 30 km/h
C) 40 km/h
D) 10 km/h
E) 50 km/h

Resolución

Piden hallar la rapidez del ciclista.

Datos:
Desde A parten 2 peatones con rapidez de 10 y 15 km/h, con dirección a B. Al mismo tiempo, un ciclista parte de B hacia A con rapidez constante.



Calculamos el tiempo de encuentro del ciclista con los 2 peatones.

$$\left.\begin{array}{l}\underset{(1.^{\text{er}}\text{ peatón})}{t_e}=\dfrac{420}{x+15}\\[2ex]\underset{(2.^{\circ}\text{ peatón})}{t_e}=\dfrac{420}{x+10}\end{array}\right\}$$

Por dato, el ciclista se cruza con un peatón 2 horas después que con el otro peatón.

Entonces

$$\frac{420}{x+10}-\frac{420}{x+15}=2$$

$$\rightarrow\ x=20$$

Por lo tanto, la rapidez del ciclista es 20 km/h.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

Dos viajeros parten al mismo tiempo de A y B, el uno hacia el otro. Al encontrarse, el primero ha recorrido 16 km más que el segundo; pero, a partir de este momento, el segundo cuadruplica su rapidez, llegando ambos al mismo tiempo. ¿Cuál es la relación de la rapidez del 2.° al 1.er viajero?

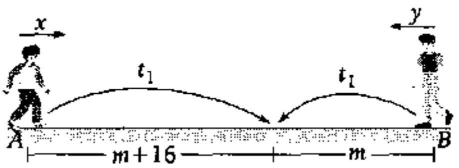
A) 1/5
B) 1/2
C) 3/2
D) 5/8
E) 3/4

Resolución

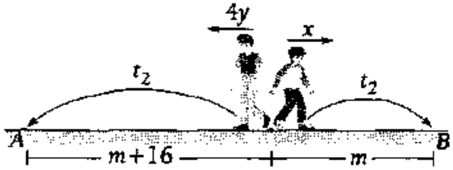
Piden: ¿cuál es la relación de la rapidez del segundo al primer viajero?

Datos:

Dos viajeros parten de A hacia B y viceversa uno al encuentro del otro.



- El primero ha recorrido 16 km más que el segundo.
  Luego



- El segundo cuadruplica su rapidez llegando ambos al mismo tiempo.

En ambos casos el tiempo es constante, entonces v DP d.

$$\frac{x}{y}=\frac{m+16}{m} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{4y}{x}=\frac{m+16}{m} \qquad \text{(II)}$$

De (I)=(II):

$$\frac{x}{y}=\frac{4y}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{y}{x}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la relación de rapidez del segundo al primer viajero es $\frac{1}{2}$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

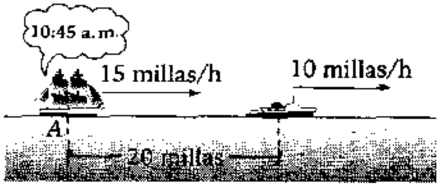
Un corsario descubre un barco mercante a 20 millas de Sotavento, a las 10:45 a. m.; con una buena brisa se dirige hacia él, a una rapidez de 15 millas por hora, mientras que el mercante trata de escapar a 10 millas por hora. Después de 3 horas, el barco del corsario aumenta su rapidez en 5 millas por hora. ¿A qué hora alcanzará el corsario al mercante?

A) 13:45 h
B) 14:45 h
C) 15:15 h
D) 14:15 h
E) 14:00 h

Resolución

Piden: ¿a qué hora alcanzará el corsario al mercante?

Representamos gráficamente los datos:



Luego de 3 horas, el corsario aumenta su rapidez en 5 millas por hora.

Aplicando el tiempo de alcance:

$$t_a=\frac{5}{20-10}=\frac{1}{2}\text{ h}$$

$$t_a=\frac{1}{2}\text{ h}$$

Por lo tanto, el corsario alcanzará al mercante a las 1:45 p.m.$+\frac{1}{2}$ hora=2:15 p.m. < > 14:15 h.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

Dos autos parten de un mismo lugar en direcciones opuestas, el primero viaja a 5 km/h más que el segundo. Después de 8 horas se encuentran separados 360 km, el uno del otro. ¿Cuál es la rapidez del primer vehículo?

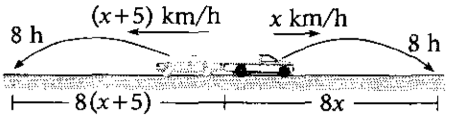
A) 16 km/h B) 18 km/h C) 20 km/h
D) 25 km/h E) 30 km/h

Resolución

Piden ¿cuál es la rapidez del primer vehículo?

Dato: dos autos parten del mismo lugar con direcciones opuestas, el primero viaja a 5 km/h más que el segundo.

Graficamos



Por dato:
Después de 8 horas se encuentran separados 360 km

Entonces

$$8(x+5)+8x=360$$

$$16x=320$$

$$\rightarrow\ x=20$$

Por lo tanto la rapidez del primer vehículo es

$$x+5=25\text{ km/h.}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 17

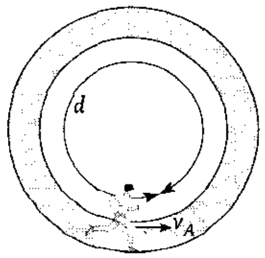
Un corredor da una vuelta completa a una pista circular cada 40 s. Otro corredor que parte del mismo punto que el primero, recorre la pista, en sentido contrario, y se cruza con él cada 15 s. ¿Qué tiempo emplea el segundo corredor en dar una vuelta completa?

A) 15 s B) 18 s C) 20 s
D) 24 s E) 26 s

Resolución

Piden ¿qué tiempo emplea el segundo corredor en dar una vuelta completa?

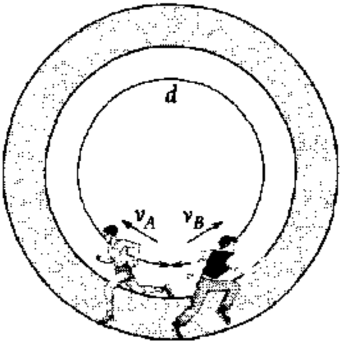
Dato:
Un corredor da una vuelta completa a una pista circular cada 40 s.



Rapidez del corredor (v_A)

$$v_A=\frac{d}{40} \qquad \text{(I)}$$

Otro corredor que parte del mismo punto que el primero, recorre la pista en sentido contrario y se cruza con él cada 15 s.



$$t_e=\frac{d}{v_A+v_B}=15 \qquad \text{(II)}$$

De (I) en (II):

$$\frac{d}{\frac{d}{40}+v_B}=15$$

$$v_B=\frac{d}{24}$$

Lo pedido, el segundo corredor da una vuelta completa en

$$t=\frac{d}{\frac{d}{24}}=24\text{ s}$$

Por lo tanto, el segundo corredor emplea 24 s.

Clave **D**

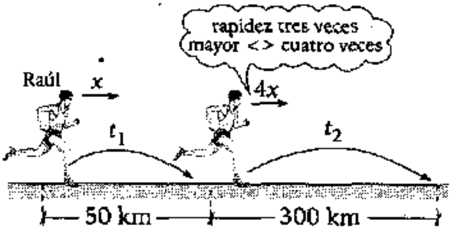
PROBLEMA N.° 18

Raúl recorrió una distancia de 50 km a una cierta rapidez y, seguidamente, recorre 300 km a una rapidez tres veces mayor que la anterior. Calcule la relación del tiempo empleado en el segundo tramo, respecto al primero.

A) 2/3 B) 3/2 C) 3/4
D) 4/3 E) 1/2

Resolución

Piden la relación del tiempo empleado en el segundo tramo, respecto al primero.
Representamos gráficamente los datos:



Por definición, tenemos

$$t_1=\frac{50}{x}; \quad t_2=\frac{300}{4x}$$

Lo pedido es

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{300}{4x}}{\frac{50}{x}}=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la relación entre el tiempo empleado en el segundo tramo respecto al primer tramo es $\frac{3}{2}$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

Un bote tarda 4 minutos en recorrer, ida y vuelta, un espacio de 640 m en un río, cuya rapidez de la corriente es la tercera parte de la rapidez del bote. Calcule la rapidez del bote en aguas tranquilas.

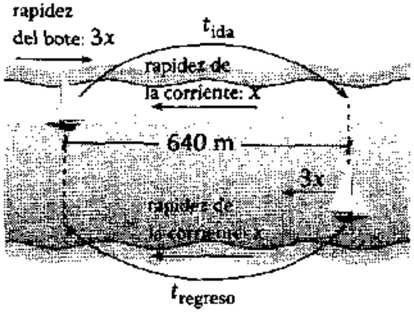
A) 6 m/s
B) 8 m/s
C) 10 m/s
D) 12 m/s
E) 14 m/s

Resolución

Piden la rapidez del bote en aguas tranquilas.

Datos: un bote tarda 4 minutos en recorrer, ida y vuelta un espacio de 640 m en un río, cuya rapidez de la corriente es la tercera parte de la rapidez del bote.

Graficamos



Por dato:

$$\underbrace{t_{ida}}_{} + \underbrace{t_{regreso}}_{} = 4\times 60$$

$$\frac{640}{3x-x}+\frac{640}{3x+x}=240$$

$$\rightarrow \; x=2$$

Por lo tanto, la rapidez del bote en aguas tranquilas es $3x=6$ m/s

Clave $\boxed{A}$

PROBLEMA N.° 20

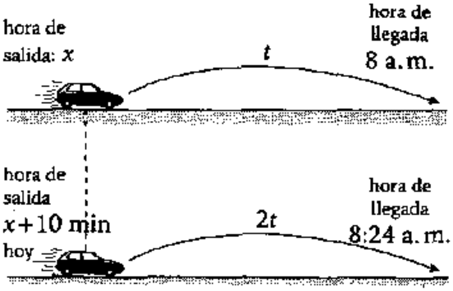
Un estudiante aborda todos los días un microbús para llegar a su clase a las 8:00 a.m.; pero hoy perdió el microbús y abordó otro que pasó 10 minutos después del primero, por lo cual arribó en el doble del tiempo normal, llegando a las 8:24 a.m. ¿A qué hora partió?

A) 7:48 a.m.
B) 7:26 a.m.
C) 7:56 a.m.
D) 7:52 a.m.
E) 7:58 a.m.

Resolución

Piden la hora de partida del estudiante

Comparamos las 2 situaciones señaladas:



Se observa que en la segunda situación planteada el tiempo empleado en el recorrido es 14 minutos más que en la primera situación (sale 10 minutos después y llega 24 minutos después del tiempo normal)

Por dato:

$$2t-t=14 \text{ min}$$

$$t=14 \text{ min}$$

Hoy partió $\underbrace{2t}_{28}$ minutos antes de las 8:24 a. m.

Por lo tanto, la hora de partida (hoy) es 7:56 a. m.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 21

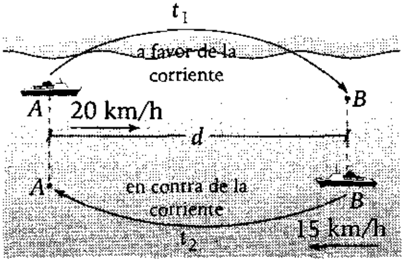
Navegando a favor de la corriente, un barco a vapor desarrolla una rapidez de 20 km por hora; navegando en contra, solo 15 km por hora. En ir desde el embarcadero de la ciudad *A*, hasta el embarcadero de la ciudad de *B*, tarda 5 horas menos que en el viaje de regreso. ¿Qué distancia hay entre estas dos ciudades?

- A) 280 km
- B) 300 km
- C) 320 km
- D) 340 km
- E) 360 km

Resolución

Piden ¿qué distancia hay entre las dos ciudades?

Dato:
Navegando a favor de la corriente, un barco desarrolla una rapidez de 20 km/h y navegando en contra de la corriente, 15 km/h.
Analizamos el recorrido entre la ciudad *A* y *B*



Consideramos la distáncia constante: v IP t

$$\frac{20}{15}=\frac{t_2}{t_1} \rightarrow t_1=3K \text{ y } t_2=4K$$

Por dato: $t_2-t_1=5$ h

$$4K-3K=5$$

$$\rightarrow K=5$$

Por definición

$$d=20t_1=15t_2$$

$$d=20(3K)=60K$$

$$d=300$$

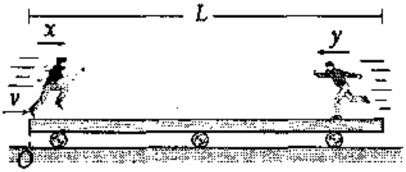
Por lo tanto, la distancia entre las ciudades *A* y *B* es 300 km.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

Una plataforma de longitud *L* parte de *O* (inicialmente, el extremo izquierdo coincide con *O*) con una rapidez de *v*; en el mismo instante, parten de ambos extremos dos hombres con una rapidez de *x* e *y*, respectivamente (rapidez constante). Halle a qué distancia de *O* se encuentran ambos hombres.

Obs.: *x* e *y*, con respecto a la plataforma.



A) $\dfrac{L(v-x)}{x+y}$

B) $\dfrac{L}{x+y}$

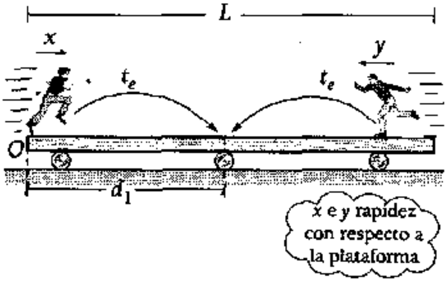
C) $\dfrac{v(x+y)}{L+y}$

D) $\dfrac{L(v+x)}{x+y}$

E) $\dfrac{L(y+v)}{x+y}$

Resolución

Piden: ¿a qué distancia del punto O se encuentran los 2 hombres?



x e y rapidez con respecto a la plataforma

Analizamos el tiempo de encuentro:

$$t_e = \frac{L}{x+y}$$

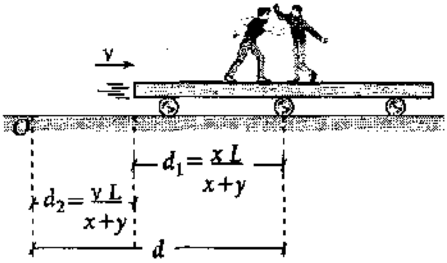
Con respecto al punto de encuentro, la distancia al punto O es

$$d_1 = \frac{xL}{x+y}$$

Pero, la plataforma se desplaza con rapidez v; en el tiempo señalado recorrerá

$$d_2 = \frac{vL}{x+y}$$

Analizamos ambas distancias recorridas:



La distancia desde el punto de encuentro hasta el punto O es

$$d = \frac{xL}{x+y} + \frac{vL}{x+y}$$

$$d = \frac{L(v+x)}{x+y}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.º 23

Por debajo de un poste, cuyo foco está a una altura H, pasa caminando un hombre de estatura h, con rapidez v. Si el hombre camina por un llano, ¿cuál es la rapidez de la sombra?

A) $\dfrac{vh}{H+h}$ B) $\dfrac{vH}{Hv+h}$ C) $\dfrac{vH}{H-h}$

D) $\dfrac{Hh}{H-h}$ E) $\dfrac{vHh}{H+v}$

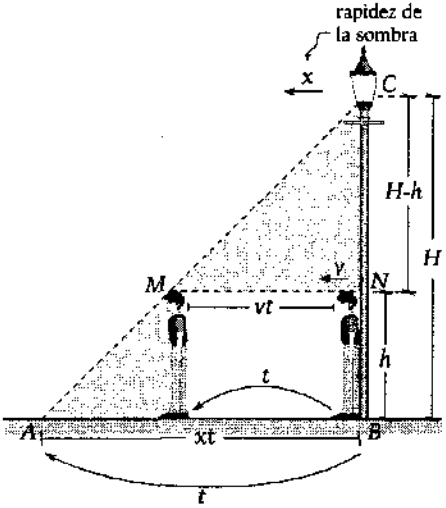
Resolución

Piden la rapidez de la sombra.

Datos:

- Altura del poste: H
- Altura del hombre: h
- Rapidez del hombre: v

Graficamos



Analizamos $\triangle ABC \sim \triangle MNC$

$$\frac{H-h}{vt}=\frac{H}{xt}$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{Hv}{H-h}$$

Por lo tanto, la rapidez de la sombra es

$$\frac{vH}{H-h}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 24

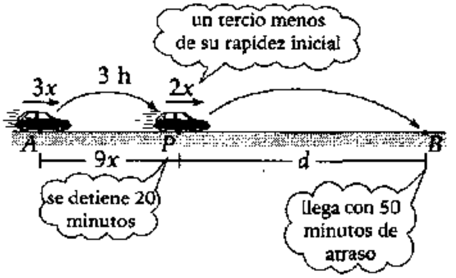
Un automóvil se desplaza, con rapidez constante de la ciudad *A* a la ciudad *B*. Luego de 3 h de viaje se detiene en *P*, durante 20 minutos, y continúa con 1/3 menos de su rapidez inicial, llegando a *B* con un retraso de 50 minutos. Se sabe que si se hubiera detenido 10 km más adelante de *P*, solo se hubiera retrasado 45 min. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

A) 250 km B) 120 km C) 140 km
D) 240 km E) 200 km

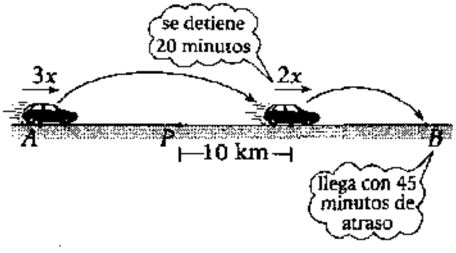
Resolución

Piden: ¿cuál es la distancia entre las dos ciudades?

Analizamos el desplazamiento del móvil entre la ciudad *A* y *B*.

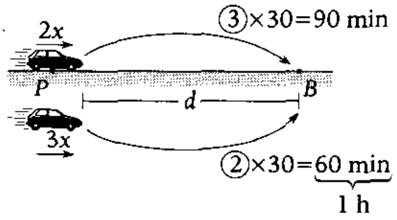


En el caso supuesto



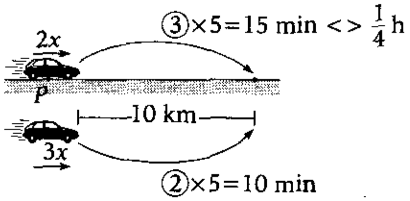
Analizamos la primera situación en el tramo final.

Si no hubiera disminuido la rapidez, hubiera empleado 30 minutos menos en recorrer el tramo *d*.



Comparamos ambos casos en el tramo de 10 km señalado.

Si no hubiera disminuido la rapidez, hubiera llegado 5 minutos antes *A* que *B*.



→ $x=20$

Por lo tanto, la distancia entre *A* y *B* es

$$\underbrace{9x+3x}_{12x} = 240 \text{ km}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 25

Una persona camina a razón de 7 leguas en 5 h; 8 horas después sale, de la misma ciudad, otra persona que recorre 5 leguas en 3 horas. ¿Cuánto habrá recorrido desde su partida la primera, al ser alcanzada por la segunda?

A) 70 leguas
B) 110 leguas
C) 120 leguas
D) 60 leguas
E) 50 leguas

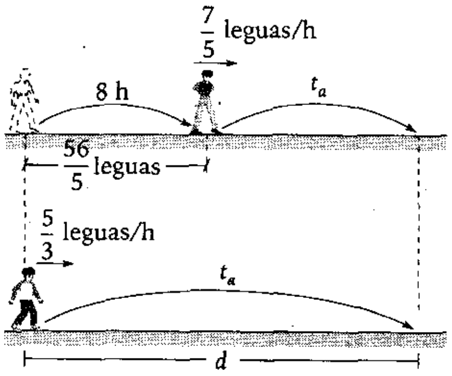
Resolución

Piden: ¿cuánto habrá recorrido desde su partida la primera persona al ser alcanzada por la segunda persona?

Dato:

- La primera persona camina 7 leguas en 5 h.
- La segunda persona camina 5 leguas en 3 h.
- La segunda persona sale 8 horas después de la primera persona.

Graficamos



Aplicamos tiempo de alcance

$$t_a = \frac{\frac{56}{5}}{\frac{5}{3} - \frac{7}{5}} = 42 \text{ h}$$

Calculamos

$$d=\left(\frac{5}{3}\right)(42)=70\text{ leguas}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida en total por la primera persona es 70 leguas.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

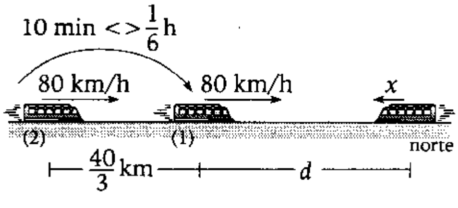
Hacia el norte salen 2 trenes con una rapidez de 80 km/h, cada uno, desfasados en 10 min. ¿Con qué rapidez venía otro tren desde el norte, si, después de 4 minutos de cruzar con el primero, lo hace con el segundo?

A) 120 km/h
B) 132 km/h
C) 145 km/h
D) 135 km/h
E) 138 km/h

Resolución

Piden: ¿con qué rapidez venía el tercer tren desde el norte?

Analizamos el gráfico



Por dato:

Después de 4 minutos de cruzar con el primer tren, se encuentra con el segundo tren.

Analizando la diferencia de tiempo de encuentros:

$$t_{e(\text{mayor})}-t_{e(\text{menor})}=4\text{ min}<>\frac{1}{15}\text{ h}$$

$$\frac{d+\frac{40}{3}}{x+80}-\frac{d}{x+80}=\frac{1}{15}$$

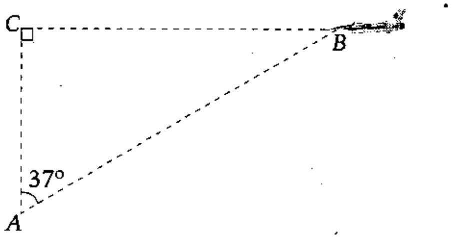
$$\rightarrow\ x=120$$

Por lo tanto, la rapidez del tercer tren es 120 km/h.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 27

Un avión se dirige de *B* hacia *C*; el ruido del motor emitido en *B* alcanza al observador en *A* en el instante en que el avión llega a *C*. Sabiendo que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s, halle la rapidez del avión.

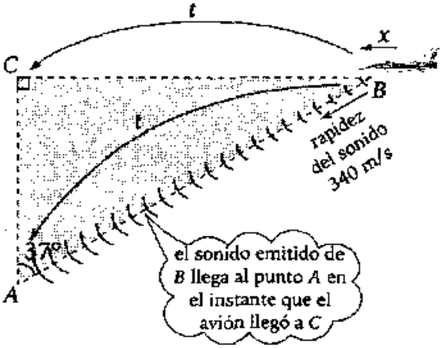


A) 270 m/s
B) 204 m/s
C) 275 m/s
D) 272 m/s
E) 280 m/s

Resolución

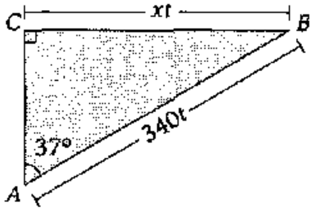
Piden la rapidez del avión.

Analizamos el gráfico



el sonido emitido de *B* llega al punto *A* en el instante que el avión llegó a *C*

En el ⊿*ACB*, notable de 37° y 53°



$$\frac{340t}{xt}=\frac{5}{3}$$

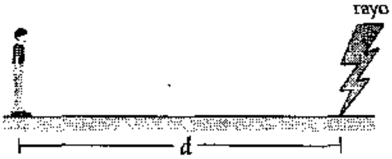
$$x=204$$

Por lo tanto, la rapidez del avión es 204 m/s.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Un hombre observa el relámpago y, después de un tiempo t, escucha el trueno, siendo c la rapidez de la luz y v la del sonido. ¿A qué distancia del hombre se produjo el rayo?



A) $\dfrac{tvc}{v+c}$

B) $\dfrac{tvc}{c-v}$

C) $t\left(\dfrac{c-v}{vc}\right)$

D) $t\left(\dfrac{v-c}{v+c}\right)$

E) $\dfrac{v-c}{tvc}$

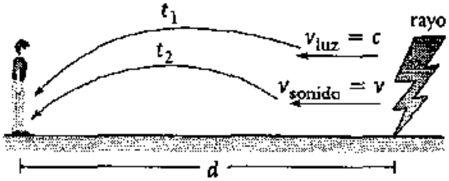
Resolución

Piden: ¿a qué distancia del hombre se produjo el rayo?

Datos:

- Rapidez de la luz$=c$
- Rapidez del sonido$=v$
- La diferencia entre el tiempo que percibe el relámpago (la luz) y el trueno (sonido) es t.

Del gráfico



$$t_{1\,(\text{luz})}=\frac{d}{c}\ ;\quad t_{2\,(\text{sonido})}=\frac{d}{v}$$

Por dato:

$$\frac{d}{v}-\frac{d}{c}=t$$

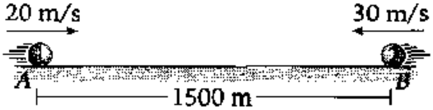
$$d=\frac{tvc}{c-v}$$

Por lo tanto, el rayo se produce a una distancia de $\frac{tvc}{c-v}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 29

Los móviles mostrados se mueven, respectivamente, con una rapidez constante. ¿Después de qué tiempo 1 dista de *B*, lo mismo que 2 dista de *A*?

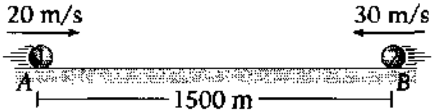


A) 60 s
B) 50 s
C) 40 s
D) 55 s
E) 45 s

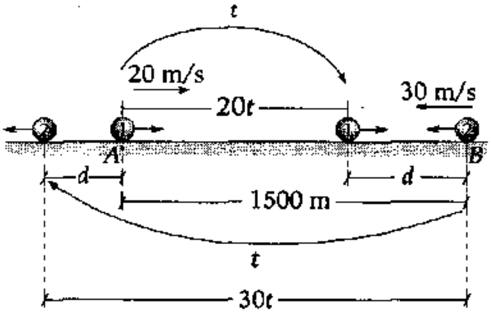
Resolución

Piden: ¿después de qué tiempo el móvil 1 dista de *B*, lo mismo que el móvil 2 dista de *A*?

Del gráfico



La única posibilidad que se genere la situación planteada es



Del móvil 1:

$d=1500-20t$ (I)

Del móvil 2:

$d=30t-1500$ (II)

De (I) = (II):

$1500-20t=30t-1500$

$t=60$

Por lo tanto, el tiempo que debe transcurrir es 60 segundos.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 30

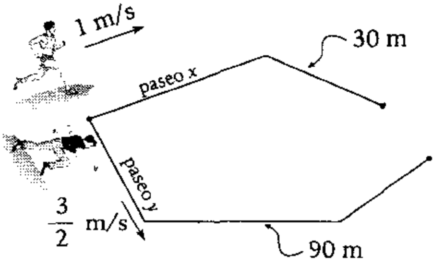
Dos amigos salieron a pasear y partieron a la vez del punto de bifurcación de dos paseos, *x* e *y*, de longitud 30 y 90 metros, respectivamente. Uno de los amigos eligió el paseo *x*, andando un metro por segundo, y el otro recorrió el *y*, a razón de 1 1/2 metros por segundo.

Acordaron estos amigos, no dejar el paseo hasta volver a encontrarse en el punto de partida. Averigüe la distancia recorrida por cada uno cuando cumplieron lo acordado.

A) 120 m y 120 m
B) 120 m y 180 m
C) 90 m y 180 m
D) 60 m y 90 m
E) 60 m y 120 m

Resolución

Piden la distancia recorrida por cada amigo cuando se encontraron simultáneamente en el punto de partida.
De los datos se desprende el siguiente gráfico:



Analizando:

- La primera persona recorrerá el tramo del paseo x (ida y vuelta) cada $\frac{60}{1}=60$ s.
- La segunda persona recorrerá el tramo del paseo y (ida y vuelta) cada $\frac{180}{\frac{3}{2}}=120$ s.

Entonces, el menor tiempo necesario para que los 2 amigos coincidan en el punto de partida es MCM (60 – 120) = 120 s

Por lo tanto, la primera persona habrá recorrido 2 veces (ida y vuelta) el tramo del paseo *x*, es decir, **120 m**; y la segunda persona habrá recorrido una vez (ida y vuelta) el tramo del paseo *y*, es decir, **180 m**.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 31

Un camión normal con seis llantas, emplea, además de sus llantas normales, sus ocho llantas de repuesto para recorrer una distancia de 2800 km. Halle el recorrido promedio de cada llanta.

A) 200 km
B) 1400 km
C) 1200 km
D) 2000 km
E) 1000 km

Resolución

Piden el recorrido promedio de cada llanta.

Datos:
Un camión con 6 llantas en uso y 8 llantas de repuesto recorre una distancia de 2800 km.

Para calcular el recorrido promedio de cada llanta se considera:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Recorrido}\\ \text{promedio}\\ \text{por llanta}\end{array} = \frac{\begin{array}{c}\text{Recorrido total}\\ \text{de las llantas}\end{array}}{\text{número de llantas}}}$$

Reemplazamos

$$\begin{array}{l}\text{Recorrido}\\ \text{promedio}\\ \text{por llanta}\end{array}=\frac{6\times 2800}{14}=1200\text{ km}$$

Por lo tanto, el recorrido promedio de cada llanta es 1200 km.

Clave C

PROBLEMA N.° 32

Un remero navega sobre un río hacia un objeto que está a 72 km del punto de partida, realizando el viaje de ida y vuelta en 14 horas. Si el tiempo que tarda en remar 4 km a favor de la corriente es el mismo tiempo que se tarda en remar 3 km en contra de la corriente, halle la rapidez del remero.

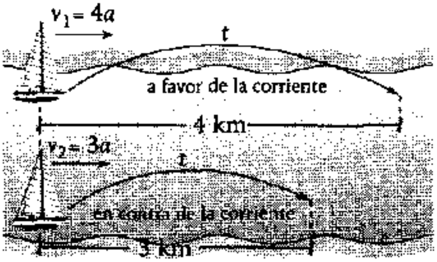
A) 10,5 km/h
B) 8,5 km/h
C) 9 km/h
D) 11 km/h
E) 12 km/h

Resolución

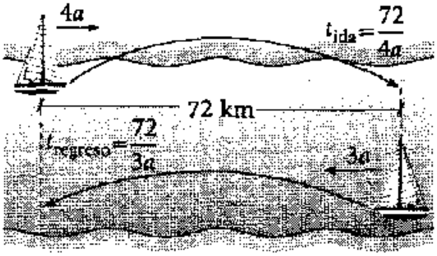
Piden hallar la rapidez del remero.
Según el gráfico, para tiempo constante

$$v \text{ DP } d \rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\frac{4\text{ km}}{3\text{ km}}$$

$v_1=4a;\ v_2=3a$



Además



Por dato:

$$\frac{72}{4a}+\frac{72}{3a}=14 \quad\rightarrow\quad a=3$$

Entonces

- Rapidez a favor de la corriente:

$$v_{\text{remero}}+v_{\text{corriente}}=12$$

- Rapidez en contra de la corriente:

$$v_{\text{remero}}-v_{\text{corriente}}=9$$

$\rightarrow\ v_{\text{remero}}=10{,}5\text{ km/h}$

$\rightarrow\ v_{\text{corriente}}=1{,}5\text{ km/h}$

Por lo tanto, la rapidez del remero es 10,5 km/h.

Clave A

PROBLEMA N.° 33

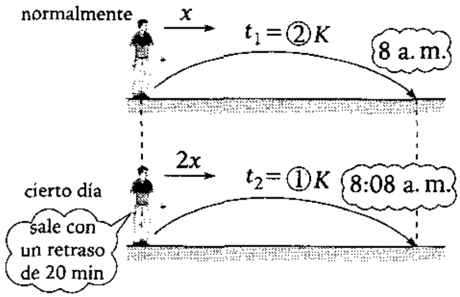
Pipo sale de su casa todos los días a la misma hora y llega a su centro de trabajo a las 8:00 a. m. Un día salió con un retraso de 20 minutos, y duplicó su rapidez, llegando aún así 8 minutos tarde. ¿Cuánto tiempo emplea normalmente en llegar a su centro de trabajo?

A) 26 min
B) 12 min
C) 8 min
D) 28 min
E) 24 min

Resolución

Piden: ¿cuánto tiempo emplea normalmente en llegar a su centro de trabajo?

De los datos se desprende el siguiente gráfico:



Analizando los gráficos, entre ambos tiempos empleados existe una diferencia de 12 minutos, entonces:

$t_1-t_2=12$ minutos

$2K-K=12$

$\rightarrow\ K=12$

Por lo tanto, normalmente emplea 24 minutos para llegar a su centro de trabajo.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 34

La rapidez de un móvil A es a la rapidez de un móvil B, como 13 es a 10. ¿Cuál es la rapidez del lento si se sabe que la respectiva diferencia de rapidez es 9 km/h?

A) 3 km/h
B) 20 km/h
C) 30 km/h
D) 12 km/h
E) 13 km/h

Resolución

Piden la rapidez del móvil más lento.

Dato:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{13}{10}\ \rightarrow\ \begin{aligned} v_A&=13K\\ v_B&=10K\end{aligned}$$

Además

$v_A-v_B=9$ km/h

$13K-10K=9$

$\rightarrow\ K=3$

Por lo tanto, la rapidez del móvil más lento es

$10K=30$ km/h.

Clave **C**

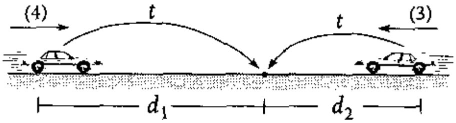
PROBLEMA N.° 35

Dos automóviles parten simultáneamente al encuentro, el uno del otro, con una rapidez que está en la relación de 4 a 3 y se encuentran cuando el más rápido ha recorrido 60 km más que el otro. Calcule el espacio recorrido por el lento hasta el momento del encuentro.

A) 60 km
B) 120 km
C) 180 km
D) 240 km
E) 360 km

Resolución

Piden el espacio recorrido por el lento hasta el momento del encuentro.
Del gráfico:



Para t constante:

$$v \ \text{DP} \ d \ \rightarrow \ \frac{d_1}{d_2}=\frac{4}{3}$$

$$d_1=4K \quad , \quad d_2=3K$$

Por dato: el más rápido ha recorrido 60 km más que el otro.

$$d_1-d_2=60$$

$$4K-3K=60$$

$$\rightarrow \ K=60$$

Por lo tanto, el espacio recorrido por el lento es

$$d_2=3(60)=180 \text{ km.}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 36

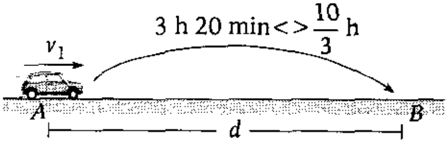
La distancia entre dos ciudades A y B es un número entero de kilómetros comprendido entre 180 y 218. Un bus recorre dicha distancia en 3 h 20 min, marchando con una rapidez expresada por un número entero de km/h, y otro bus recorre dicha distancia en 4 horas, con una rapidez expresada como la anterior. ¿Cuál es la distancia entre dichas ciudades?

A) 196 km
B) 195 km
C) 186 km
D) 217 km
E) 200 km

Resolución

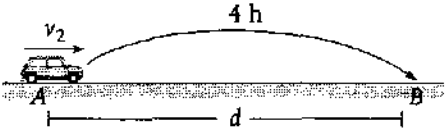
Piden la distancia entre dichas ciudades.

Dato: la distancia entre las ciudades A y B es un número entero de kilómetros comprendido entre 180 y 218.
Además



$$v_1=\frac{d}{\frac{10}{3}}=\frac{3d}{10} \leftarrow \text{cantidad entera}$$

$$\rightarrow \ d=\overset{o}{10} \qquad \text{(I)}$$



$$v_2=\frac{d}{4} \leftarrow \text{cantidad entera}$$

$$\rightarrow\ d=\overset{\circ}{4} \qquad\qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II):

$$d=\overset{\circ}{20}$$

$$d=20K;\ K\in\mathbb{Z}^+$$

Se sabe que

$$180<d<218$$

$$180<\underbrace{20K}_{200}<218$$

Por lo tanto, la distancia entre las ciudades de *A* y *B* es 200 km.

Clave C

PROBLEMA N.° 37

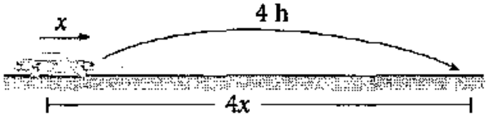
Un automóvil debe hacer un cierto recorrido en 4 horas. Una hora después de la partida, el piloto aumenta la rapidez a fin de llegar media hora antes y hace, entonces, 16 km más por hora. ¿Cuál fue la distancia recorrida?

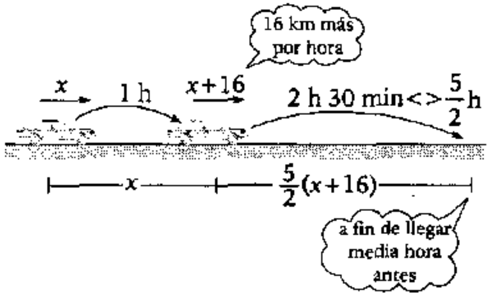
A) 290 km B) 300 km C) 310 km
D) 320 km E) 350 km

Resolución

Piden la distancia recorrida.

Analizando los datos gráficamente:





Igualamos la distancia total

$$4x=x+\frac{5}{2}(x+16) \quad\rightarrow\quad x=80$$

Por lo tanto, la distancia recorrida es
$4x=320$ km

Clave D

PROBLEMA N.° 38

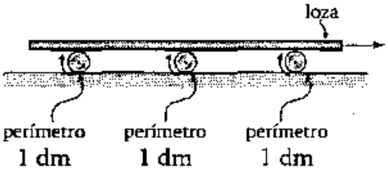
Si la circunferencia de cada uno de los rodillos de la figura mostrada es de un decímetro, ¿cuánto habrá avanzado la loza cuando los rodillos hayan dado una vuelta?

A) 3 decímetros
B) 2,5 decímetros
C) 2 decímetros
D) 3,5 decímetros
E) 1,5 decímetros

Resolución

Piden: ¿cuánto habrá avanzado la loza cuando los rodillos hayan dado una vuelta?

Del gráfico:



El desplazamiento se da en función al desplazamiento de los rodillos de sus extremos (2 dm).

Por lo tanto, al dar una vuelta cada rodillo, la loza avanzará 2 dm.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

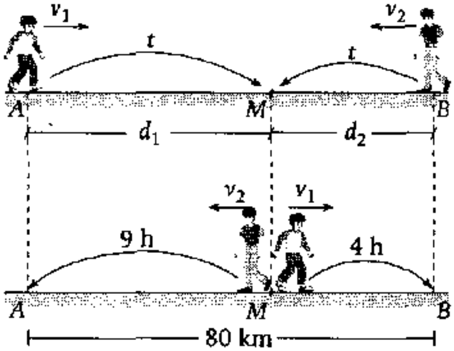
Un peatón pasa por *A* al encuentro de otro que sale simultáneamente de *B*, distante 80 km de *A*. Se cruzan en *M*, después de cruzarse, el primero tarda 4 horas en llegar a *B* y el segundo tarda 9 horas en llegar a *A*. ¿A qué distancia de *B* se produjo el encuentro?

A) 24 km
B) 32 km
C) 38 km
D) 40 km
E) 36 km

Resolución

Piden: ¿a qué distancia de *B* se produjo el encuentro?

Dato: los puntos *A* y *B* distan 80 km.
Además



Para distancia constante v IP t

Con respecto a d_1

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{9}{t} \qquad \text{(I)}$$

Con respecto a d_2

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{t}{4} \qquad \text{(II)}$$

De (I) = (II):

$$\frac{9}{t}=\frac{t}{4} \rightarrow t=6$$

Analizamos al peatón que parte del punto *B*

tiempo		distancia
$t+9=15$ h	→	80 km
$t=6$ h	→	d_2

$\rightarrow d_2=32$ km

Por lo tanto, el encuentro se produjo a 32 km del punto *B*.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 40

Un móvil recorre 315 km en 5 h y otro hace un recorrido doble en 7 h. Suponiendo que los dos marchan durante 9 h, calcule la diferencia de los recorridos.

A) 210 km
B) 280 km
C) 243 km
D) 312 km
E) 260 km

Resolución

Piden calcular diferencia de recorridos.
Datos: un móvil recorre 315 km en 5 h y otro móvil recorre el doble (630 km) en 7 h.

De lo anterior se deduce que:

$v_1=63$ km/h

$v_2=90$ km/h

Suponemos que los dos marchan por 9 h

$d_1=63\times 9$

$\rightarrow d_1=567$ km

$d_2=90\times 9$

$\rightarrow d_2=810$ km

Por lo tanto, la diferencia de los recorridos sería

$810-567=243$ km.

Clave C

Capítulo

8

Cronometría

De manera didáctica, para efectos de un mejor estudio y comprensión del tema, y para tener orden en su tratamiento, se ha dividido este capítulo en cuatro subgrupos de problemas: Sobre campanadas, sobre tiempo transcurrido y tiempo por transcurrir; adelantos y atrasos y relojes con manecillas.

Cada uno de ellos, por su particularidad y diferencia respecto del otro, desarrolla métodos que, acompañados con un adecuado razonamiento, ayudarán a la resolución sencilla de los problemas.

En los problemas sobre campanadas, es importante que se comprenda la relación directamente proporcional que existe entre el número de intervalos y el tiempo. En los problemas de tiempo transcurrido y tiempo por transcurrir, es necesario entender a qué se refiere cada una de estas expresiones. Por otro lado, en la parte de adelantos y atrasos, y en la de relojes con manecillas, presentaremos algunas relaciones que se deben conocer para la resolución correcta de los problemas.

Capítulo 8

Cronometría

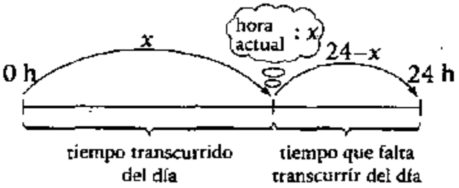
PROBLEMA N.° 1

Si el duplo de las horas transcurridas en un día es igual al cuádruplo de las que faltan para terminar el día, ¿qué hora será dentro de 4 horas?

A) 8:00 p.m.
B) 6:00 p.m.
C) 7:20 p.m.
D) 4:00 p.m.
E) 9:00 p.m.

Resolución

Se pide la hora dentro de 4 horas.
Del problema se tiene lo siguiente:



Por condición

$$\cancel{2}x = \overset{2}{\cancel{4}}(24-x)$$

$x=48-2x$

$3x=48$

$x=16$

Luego, dentro de 4 horas

$x+4=20$ h <> 8 p.m.

Clave A

PROBLEMA N.° 2

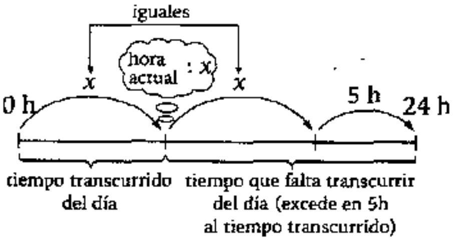
¿Qué hora será dentro de 5 1/4 h, si se sabe que en estos momentos el tiempo transcurrido es excedido en 5 horas por lo que falta transcurrir del día?

A) 2:20 p.m.
B) 1:45 p.m.
C) 3:25 p.m.
D) 2:45 p.m.
E) 3:20 p.m.

Resolución

Se pide la hora dentro de 5 1/4 h <> 5:15 h.

Del dato: ... *el tiempo transcurrido es excedido en 5 horas por lo que falta transcurrir del día.*



Del gráfico

$2x+5=24$

$2x=19$ h

$x=9:30$ h

Finalmente, dentro de 5:15 h serán

9:30+5:15=14:45 h <> 2:45 p.m.

Clave D

PROBLEMA N.° 3

Son más de las 2, sin ser las 3 de esta madrugada; pero dentro de 40 minutos faltará, para las 4, el mismo tiempo que faltaba desde la 1 hasta hace 40 minutos. ¿Qué ángulo forman las agujas en este preciso instante?

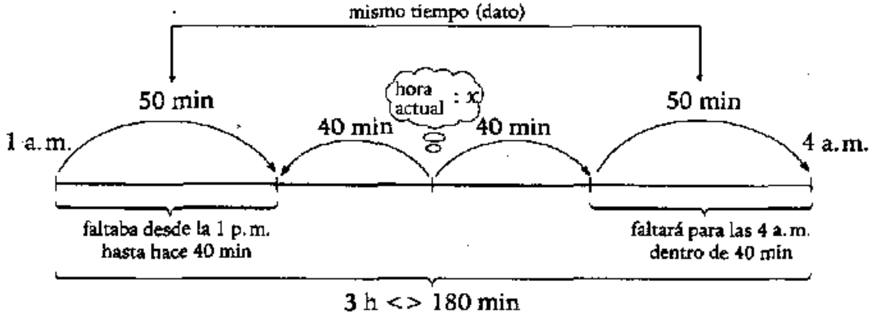
A) 85° B) 120° C) 95° D) 100° E) 105°

Resolución

Se pide la medida del ángulo formado por las agujas del reloj en este instante.

Del dato:

... dentro de 40 min faltará, para las 4 a. m., el mismo tiempo que faltaba desde la 1 a. m. hasta hace 40 min..., graficamos así



Del gráfico

$x=1$ a.m. $+90$ min.

$x=2{:}30$ a.m.

Finalmente, para hallar la medida del ángulo que forman las agujas del reloj, usaremos la fórmula general:

$$\boxed{\alpha=+\frac{11}{2}M-30H}$$

Ya que a las 2:30 el minutero ha pasado al horario.

Reemplazamos

$$x=\frac{11}{2}(30)-30(2)$$

$\therefore\ x=105°$

Clave E

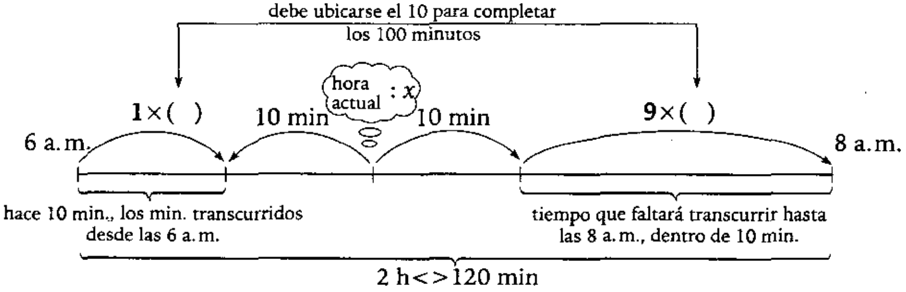
PROBLEMA N.° 4

Son más de las seis, sin ser las ocho de esta mañana, y hace diez minutos los minutos que habían transcurrido desde las seis eran iguales a 1/9 del tiempo que faltará transcurrir hasta las ocho, dentro de diez minutos. ¿Qué hora es?

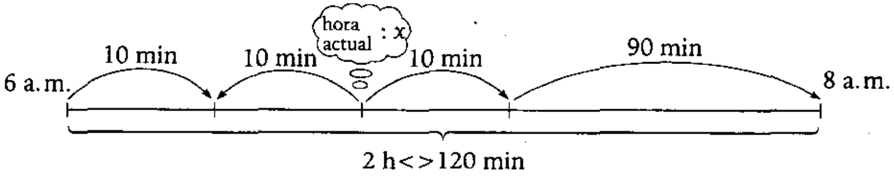
A) 6:30 a.m.
B) 7:20 a.m.
C) 5:45 a.m.
D) 8:10 a.m.
E) 6:20 a.m.

Resolución

Se pide la hora actual (x).
Graficamos según los datos del problema, teniendo lo siguiente:



Reemplazando obtenemos que



la hora actual es $x=6$ a.m.+20 min.

$\therefore$ $x=$6:20 a.m.

Clave E

PROBLEMA N.° 5

Son más de las 4, pero aún no son las 6 de la tarde. Si el tiempo que había transcurrido, desde las 4 hasta hace 15 minutos, es igual a 1/5 del tiempo que faltará transcurrir hasta las 6, pero dentro de 15 minutos, ¿qué hora es en este instante?

A) 4:20 p.m.
B) 4:30 p.m.
C) 5:10 p.m.
D) 3:20 p.m.
E) 3:40 p.m.

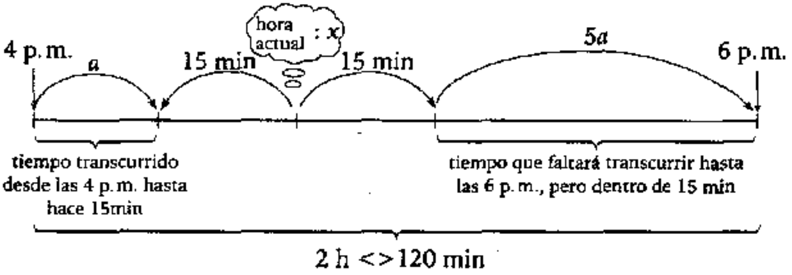
Resolución

Se pide la hora actual (x).

De la condición del problema graficamos

De donde:

$$6a+30=120\text{ min}$$
$$6a=90\text{ min}$$
$$\rightarrow\ a=15\text{ min}$$



Luego, la hora actual

$$x=4\text{ p.m.}+(a+15)$$
$$\therefore\ x=4{:}30\text{ p.m.}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

Si fuera 3 horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día los 5/7 de lo que faltaría si es que fuera 3 horas más temprano. ¿Qué hora es?

A) 7:00 a.m. B) 6:20 a.m. C) 6:00 a.m. D) 8:00 a.m. E) 7:14 a.m.

Resolución

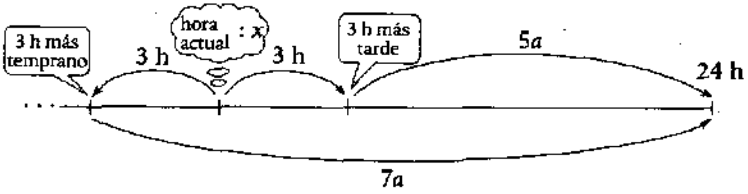
Se pide la hora actual (x).

De la condición:

- *Si fuera 3 horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día los 5/7 de lo que faltaría si fuera 3 horas más temprano.*

Del gráfico

$$7a=6+5a$$
$$2a=6$$
$$\rightarrow\ a=3\text{ h}$$



Luego, la hora actual es

$$x=24-(3+5a)$$
$$\therefore\ x=6\text{ h} <> 6\text{ a.m.}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

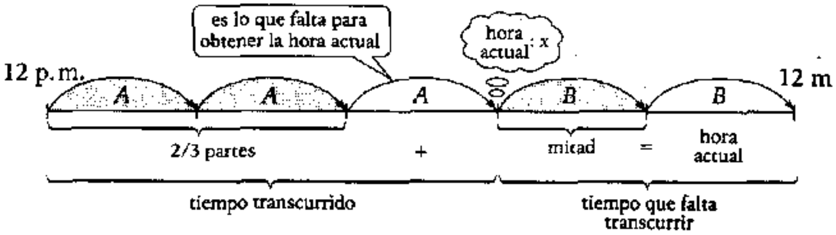
¿Qué hora es?; para saberlo, basta con sumar la mitad del tiempo que falta para las doce del mediodía, más los 2/3 del tiempo transcurrido desde las doce de la noche.

A) 7:12 a.m. B) 5:30 a.m. C) 9:10 a.m. D) 10:30 a.m. E) 7:20 a.m.

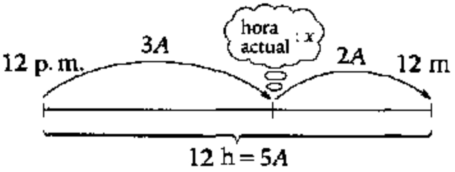
Resolución

Se pide la hora actual (x).
Se sabe por dato que la hora actual se obtiene:

- *... al sumar la mitad del tiempo que falta para las doce del mediodía, con los 2/3 del tiempo transcurrido desde las 12 de la noche.*



Del gráfico se deduce que $A=B$, entonces



$$\rightarrow \quad A=\frac{12}{5}\text{ h}$$

Finalmente, la hora actual es

$$x=3A=3\left(\frac{12}{5}\text{ h}\right)$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{36}{5}=7\frac{1}{5}\text{ h}$$

$\therefore \; x=7{:}12$ a.m.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 5:00 a.m. demora 6 segundos, ¿cuánto demorará para indicar las 12 m?

A) 15 s B) 12 s C) 33/2 s
D) 14 s E) 16 s

Resolución

Se pide el tiempo que demora para indicar las 12 m.

Dato: demora 6 s para indicar las 5 a.m.

Recuerda

DP

N.° de campanadas	N.° de intervalos	Tiempo
n	$n-1$	t

$$\rightarrow \boxed{\frac{n-1}{t}=K\ (\text{cte.})}$$

En el problema

DP

Hora	N.° de camp.	N.° de intervalos	Tiempos (en segundos)
5 a.m. →	5	4	6 (dato)
12 m. →	12	11	x

De donde

$$\cancel{4}x=\cancel{6}(11)$$

$$2x=3(11)$$

$$\therefore\ x=\frac{33}{2}\text{ s}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

Una campana toca 3 campanadas en 7 segundos. ¿Cuántos segundos tardará en tocar 7 campanadas?

A) 20 s
B) 18 s
C) 21 s
D) 19 s
E) 22 s

Resolución

Se pide la cantidad de segundos que tarda en tocar 7 campanadas (x).

Dato: toca 3 campanadas en 7 segundos.

Del dato:

N.° de campanadas	N.° de intervalos	DP	Tiempos (en segundos)
3 →	2		7
7 →	×3 6		x ×3

$\therefore\ x=21$ s

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

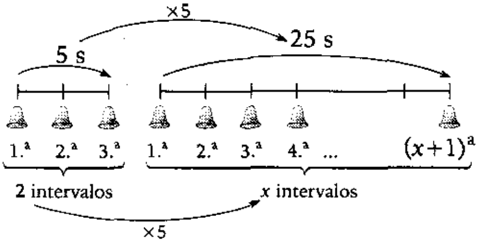
La campana de un campanario tarda 5 segundos en tocar 3 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en un tiempo de 25 segundos?

A) 12 B) 13 C) 14
D) 10 E) 11

Resolución

Se pide la cantidad de campanas en 25 s

Graficamos según el dato del problema.



Del gráfico

$x=2\times5=10$ intervalos

$\therefore\ x+1=11$ campanadas

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Un reloj indica la hora que es con igual número de campanadas. Para indicar que son las 5 emplea 8 s. Pepito se acuesta a una hora en que el reloj emplea 20 s en indicarla y se levanta al día siguiente, a una hora en que el reloj emplea 10 s para indicarla. ¿Cuántas horas duerme Pepito?

A) 8 h B) 6 1/2 h C) 6 h
D) 7 h E) 7 1/2 h

Resolución

Se pide el número de horas que duerme Pepito.
Dato: para indicar las 5 h emplea 8 s.
De los datos se tiene:

	hora		N.° de camp.		N.° de interv.		tiempos
dato	5 h	→	5	$\longrightarrow$	4	$\xleftarrow{\div 2}$	8
se levanta	x h	←	x	$\xleftarrow{+1}$	10	$\xleftarrow{\div 2}$	20
se acuesta	y h	←	y	$\xleftarrow{+1}$	5	$\xleftarrow{\div 2}$	10

De donde:

- $x=11$ campanadas
  $\rightarrow\ x=11$ p. m. (se acuesta)
- $y=6$ campanadas
  $\rightarrow\ y=6$ a. m. (se levanta)

Finalmente, duerme desde la 11 p. m. hasta las 6 a. m.
Por lo tanto, duerme 7 horas.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

La campana de un reloj indica las horas con igual número de campanadas. Para indicar las n horas tarda 4 segundos. ¿Cuántas horas habrán transcurrido desde el instante en que empleó n segundos para indicarla, hasta el instante en que utilizó $2n$ segundos para indicar la hora?

A) $\frac{n^2+n}{2}$ B) $\frac{n^2-n}{4}$ C) $\frac{n^2-n}{2}$

D) $\frac{n^2+1}{4}$ E) $\frac{n^2+n-1}{4}$

Resolución

Se pide las horas transcurridas desde que empleó n hasta $2n$ segundos en indicar la hora.

Datos:

- La campana del reloj tarda 4 s en indicar las n horas.
- Indica la hora con un número de campanadas igual a las horas que indica.

Hallamos la hora donde emplea n segundos en indicarla: x horas

N.° de campanadas		N.° de intervalos	DP	Tiempos (en segundos)
n	→	$n-1$		4
x	→	$x-1$		n

$$\rightarrow\ x-1=\frac{n(n-1)}{4}$$

$$x=\frac{n^2-n}{4}+1$$

Ahora, la hora donde empleamos $2n$ segundos en indicarla: y horas

N.° de campanadas		N.° de intervalos	DP	Tiempos (en segundos)
n	→	$n-1$		4
y	→	$y-1$		$2n$

$$\rightarrow\ y-1=\frac{\cancel{2}n(n-1)}{\cancel{4}_2}$$

$$y=\frac{n^2-n}{2}+1$$

Luego, lo pedido se calcula con

$$y-x=\frac{n^2-n}{2}+\cancel{1}-\left(\frac{n^2-n}{4}+\cancel{1}\right)$$

$$y-x=\frac{2n^2-2n-n^2+n}{4}$$

$$\therefore\ y-x=\frac{n^2-n}{4}\text{ horas}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 13

El campanario de una iglesia estuvo tocando durante 21 segundos. Si se escucharon tantas campanadas como 10 veces el tiempo que hay entre campanada y campanada, ¿cuánto tiempo empleará este campanario para tocar 7 campanadas?

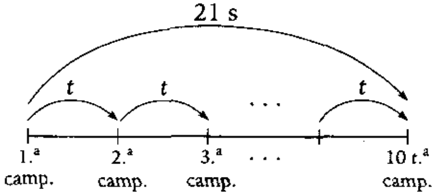
A) 9 s B) 8 s C) 6 s
D) 10 s E) 7 s

Resolución

Se pide el tiempo que emplea un campanario para tocar 7 campanadas.

Del dato:

- *... durante 21* s *se escucharon tantas campanadas como 10 veces el tiempo que hay entre campanada y campanada,* graficamos



t: tiempo entre campanadas

de donde

$$(10t-1)t=21$$

$$10t^2-t-21=0$$

$5t \quad +7 \ \rightarrow\ t=-7/5$ (se descarta por ser negativo)

$2t \quad -3 \ \rightarrow\ t=3/2$

$$\therefore\ t_{7\text{camp.}}=6t=9\text{ s}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

En un paradero de microbuses hay un reloj que cada 3 minutos da 3 campanadas para indicar que el microbús siguiente debe partir a recorrer su ruta. Hace un minuto partió el primer microbús del día. ¿Dentro de cuántos minutos saldrá un microbús con el cual el número de campanadas dadas por el reloj, hasta ese momento inclusive, sea un total de 90?

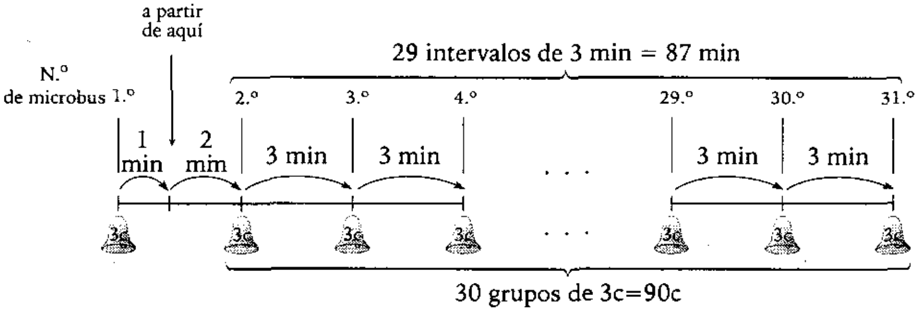
A) 85 min B) 92 min C) 88 min
D) 87 min E) 89 min

Resolución

Se sabe que:

- Cada 3 minutos da 3 campanadas el reloj del paradero.
- Hace un minuto partió el primer microbús del día.

Veamos el siguiente gráfico.



Luego, para acumular un total de 90c deben pasar

2 min+87 min= 89 min

Clave E

PROBLEMA N.° 15

Un reloj se adelanta un minuto cada 900 segundos. Si ahora marca las 4:20 y hace 8 horas que se adelanta, ¿cuál es la hora correcta?

A) 3:42 B) 4:12 C) 3:16 D) 3:48 E) 3:30

Resolución

Se pide la hora correcta.

Dato: el reloj se adelanta un minuto cada 900 s <> 15 min.

Calculamos primero el adelanto acumulado en 8 horas.

	En	Adelanta
(dato)	×4 15 min	1 min ×4
	60 min <> 1 h	4 min ×8
	$\boxed{8\text{ h}}$	$\boxed{32\text{ min}}$

Luego, para un reloj que se adelanta

$$\boxed{\text{Hora correcta}=\text{Hora marca}-\text{adelanto}}$$

Hora correcta=4:20−32 min

∴ Hora correcta=3:48

Clave D

PROBLEMA N.° 16

Un reloj se atrasa 4 minutos por día. Si el reloj marca las 6 a. m. (hora exacta) el 1 de febrero, ¿qué hora marcará al mediodía del 6 de febrero?

A) 11:39 a. m.   B) 11:20 a. m.   C) 11:42 a. m.   D) 10:48 a. m.   E) 12:18 a. m.

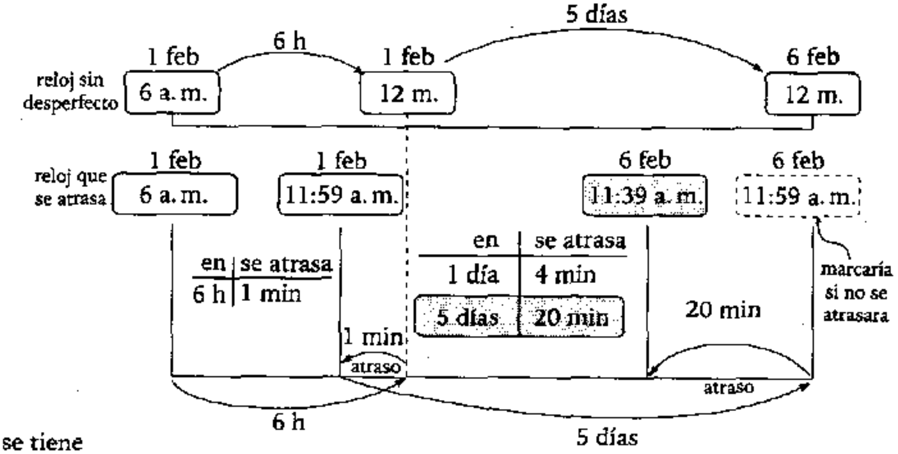
Resolución

Se pide la hora que marcará al mediodía del 6 de febrero.

Dato: El reloj se atrasa 4 min por día <> 24 h, entonces

	En	Atrasa	
÷4	24 h	4 min	÷4
	6 h	1 min	

Comparamos un reloj sin desperfecto (que marca siempre la hora correcta) y el reloj que se atrasa (con desperfecto).



Del gráfico, se tiene

Hora que marca: → –11:39 a. m.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

Un reloj que se atrasa 5 minutos en cada hora, es sincronizado hoy al mediodía (12 m). ¿Qué tiempo, como mínimo, deberá transcurrir para que vuelva a marcar la hora correcta?

A) 6 días   B) 9 días   C) 7 días   D) 8 días   E) 10 días

Resolución

Se pide el tiempo mínimo que debe transcurrir para marcar la hora correcta (x).

Recuerda

Para que un reloj que se ADELANTA o ATRASA vuelva a marcar la hora correcta, tiene que ADELANTARSE o ATRASARSE respectivamente 12 horas ó 720 minutos.

En el problema

$$\begin{array}{lr|l} & \text{En} & \text{Se atrasa} \\ \hline \text{(dato)} & \times 144\left(\begin{array}{r} 1\text{ h} \\ x\text{ h} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 5\text{ min} \\ 720\text{ min} \end{array}\right)\times 144 \end{array}$$

$$\rightarrow\ x=144\,\cancel{h}\times\left(\frac{1\text{ día}}{24\,\cancel{h}}\right)$$

$\therefore\ x=6$ días

Clave **A**

PROBLEMA N.° 18

Dos relojes se sincronizan a las 8 a. m.; uno de ellos se adelanta 15 segundos cada cuarto de hora y el otro se atrasa 45 segundos cada hora. ¿Cuántos minutos estarán separados a las 8:00 p. m. los minuteros de los dos relojes?

A) 23 minutos B) 42 minutos C) 18 minutos D) 32 minutos E) 21 minutos

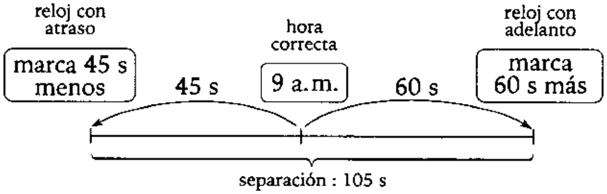
Resolución

Se pide la cantidad de minutos que están separados dos relojes (con desperfecto) a las 8:00 p. m.

Datos:

- Un reloj se adelanta 15 s cada 15 min.
- Otro reloj se atrasa 45 s cada hora.

Se sabe que los dos relojes se sincronizan a las 8 a. m., luego de una hora ocurrirá lo siguiente:



	En	Se adelanta
(dato)	15 min	15 s
	1 h <> 60 min	60 s

Del esquema se observa que

dentro de 12 h serán las 8 p. m.

en	se separan
1 h	105 s
12 h	x

$$x=\frac{(12\,\cancel{h})(105\,\cancel{s})}{1\,\cancel{h}}\times\left(\frac{1\text{ min}}{60\,\cancel{s}}\right)$$

(convirtiendo a min)

$\therefore\ x=21$ min

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Dos relojes marcan la hora exacta a las 8:00 a.m. y, a partir de ese instante, uno comienza a adelantarse dos minutos por cada hora; y el segundo, a atrasarse en el mismo ritmo. Luego de cuántas horas volverán a marcar la hora correctamente.

A) 300 h
B) 240 h
C) 350 h
D) 410 h
E) 360 h

Resolución

Se pide el número de horas en que volverán a marcar la hora correcta los dos relojes (t).

Datos:
- Un reloj se adelanta dos minutos por hora.
- Otro reloj se atrasa dos minutos por hora.

Para hallar el tiempo que debe transcurrir para que vuelvan a marcar la hora correcta simultáneamente, calcularemos por separado el tiempo necesario de cada reloj y luego haremos que ambos coincidan.

De los datos:

- Uno de los rejojes

$$\times 360\left(\begin{array}{c|c} \textbf{En} & \textbf{Se adelanta} \\ \hline 1\text{ h} & 2\text{ min} \\ \boxed{360\text{ h}} & 720\text{ min} \end{array}\right)\times 360$$

- El otro reloj

$$\times 360\left(\begin{array}{c|c} \textbf{En} & \textbf{Se atrasa} \\ \hline 1\text{ h} & 2\text{ min} \\ \boxed{360\text{ h}} & 720\text{ min} \end{array}\right)\times 360$$

Como la cantidad de minutos que se adelantan y atrasan los relojes son iguales en un mismo intervalo de tiempo, el número de horas que ha de transcurrir para que marquen la hora correcta simultáneamente también resulta el mismo.

$\therefore\ t=360$ h

Clave E

PROBLEMA N.° 20

En el instante de comenzar un año no bisiesto, un reloj señala las 11 h 6 min 40 s a.m. Se supone que va adelantado. Este reloj se atrasa: el primer día 4 segundos; el segundo día, 12 segundos; el tercer día, 20 segundos; y así sucesivamente. Al comenzar un día del año, el reloj marcará la hora exacta. ¿Cuál es ese día?

A) 11 abril B) 10 abril C) 21 marzo
D) 04 abril E) 11 mayo

Resolución

Se pide el día en el que el reloj marcará la hora exacta.

Dato: el reloj tiene un adelanto de 11 h 6 min 40 s al iniciar el año.

Para que marque la hora correcta, el reloj tendrá que atrasarse todo el tiempo que se encuentra adelantado, es decir

total atraso=total adelanto

Se sabe que

$$\left.\begin{array}{lcl} & & \text{Se atrasa} \\ 1.^{\circ}\text{ día} & \longrightarrow & 4\text{ s}=4\times 1 \\ 2.^{\circ}\text{ día} & \longrightarrow & 12\text{ s}=4\times 3 \\ 3.^{\circ}\text{ día} & \longrightarrow & 20\text{ s}=4\times 5 \\ \vdots & & \vdots \\ n.^{\circ}\text{ día} & \longrightarrow & =4\times(2n-1) \end{array}\right\}+$$

$$\underbrace{4\times 1+4\times 3+4\times 5+\cdots+4\times(2n-1)}_{n\text{ sumandos}}=11\text{ h }6\text{ min }40\text{ s}$$

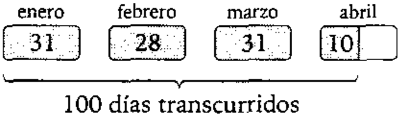
Factorizamos el primer miembro y convertimos a segundos el otro, obteniendo

$$4(1+3+5+...+(2n-1))=11(3600\text{ s})+6(60\text{ s})+40\text{ s}$$

$$\div 4\quad \underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}=11(900)+6(15)+10$$

$$n^2=9900+90+10$$
$$n^2=10\,000$$
$$n=100\text{ días}$$

Luego de 100 días de iniciado el año marcará la hora correcta; como el año no es bisiesto, la fecha será



Por lo tanto, marcará la hora exacta al inicio del 11 de abril.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 21

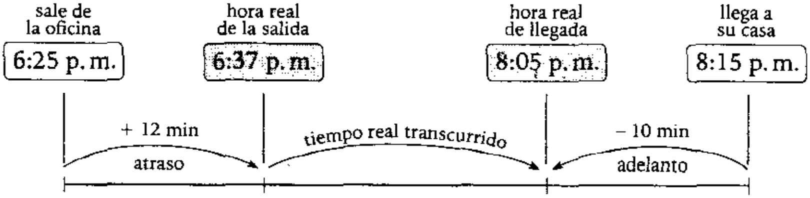
Carlos sale de la oficina y al marcar su tarjeta de salida ve que son las 6:25 p. m. Al llegar a su casa ve que en su reloj son las 8:15 p. m. Luego se entera de que el reloj de su oficina estaba atrasado 12 min y de que su reloj estaba adelantado 10 min. ¿Cuánto tiempo demoró de la oficina a su casa?

A) 1 h 30 min B) 1 h 14 min C) 1 h 28 min D) 2 h 28 min E) 2 h 01 min

Resolución

Se pide el tiempo que demoró de la oficina a su casa (t).

De los datos, obtenemos el siguiente esquema:



Entonces, $t=8{:}05-6{:}37$

$\therefore\ t=1\text{ h }28\text{ min}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

Un reloj se adelanta 3 minutos por cada hora que transcurre. ¿A qué hora comenzó a adelantarse si dentro de 2 horas tendrá un adelanto de una hora y estará marcando las 10:37 p.m.?

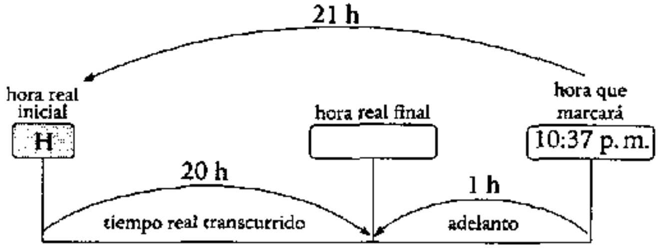
A) 1:37 a.m. B) 1:35 a.m. C) 1:43 a.m. D) 1:33 a.m. E) 1:40 a.m.

Resolución

Se pide la hora en que el reloj comenzó a adelantarse (H).
Dato: el reloj se adelanta 3 minutos por cada hora que transcurre.
Para que acumule una hora de adelanto tiene que transcurrir

	En	Se adelanta	
×20	1 h	3 min	×20
	20 h	1 h <> 60 min	

Entonces, veamos el siguiente esquema:



De donde

$$H = \overset{22h}{10}:37 \text{ p.m.} - 21 \text{ h}$$

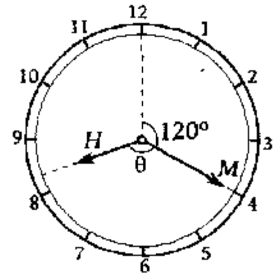
$$\therefore \quad H = 1:37 \text{ a.m.}$$

Clave A

PROBLEMA N.° 23

Halle θ en el gráfico.

A) 120°
B) 110°
C) 130°
D) 142°
E) 135°



Resolución

Se pide el valor de θ.

Recuerda

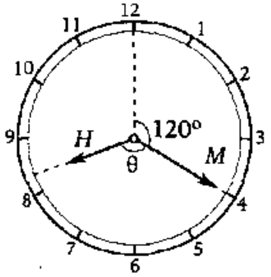
Para calcular la medida del ángulo que forman las agujas (horario y minutero) en una cierta hora se puede utilizar la fórmula siguiente:

$$\boxed{\theta = \pm\frac{11}{2}M \mp 30H}$$

M: cantidad de minutos
H: cantidad de horas ($H < 12$)

donde:
+ – : cuando el minutero pasó al horario.
– + : cuando el minutero no ha pasado al horario.

En el gráfico del problema, se observa que el minutero no ha pasado al horario, entonces



$$\theta=-\frac{11}{2}M+30\,H$$

Reemplazamos $H=8$ y $M=20$

$$\theta=-\frac{11}{2}(20)+30(8)$$

$\therefore\ \theta=130°$

Clave C

PROBLEMA N.° 24

¿Qué ángulo forman las agujas del reloj en cada caso?

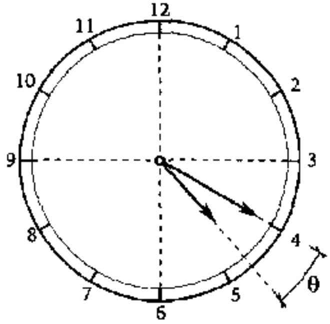
I. 4:20
II. 6:18
III. 12:01
IV. 7:17
V. 2:18'40"

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
A)	10°	81°	6,5°	116,5°	42,7°
B)	12°	81°	5,5°	118,5°	42,7°
C)	12°	80°	5,5°	116,8°	42,7°
D)	10°	81°	5,5°	116,5°	42,7°
E)	10°	81°	5°	116,5°	42°

Resolución

Se pide la medida del ángulo que forman las agujas del reloj en cada caso.

I. $\underline{\overset{H}{4}:\overset{M}{20}}$

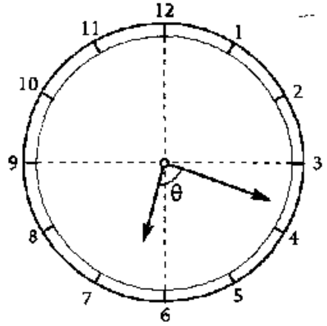


El minutero no ha pasado al horario, entonces

$$\theta=-\frac{11}{2}(20)+30(4)$$

$\therefore\ \theta=10°$

II. $\underline{\overset{H}{6}:\overset{M}{18}}$



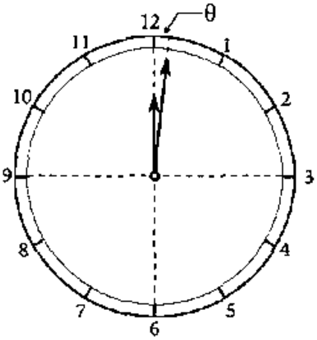
El minutero no ha pasado al horario, entonces

$$\theta=-\frac{11}{2}(18)+30(6)$$

$\therefore\ \theta=81°$

III. $\underline{\overset{H}{12}:\overset{M}{01}}$

Recordemos que $H < 12$, para el uso de la fórmula, pero si H es 12 se reemplaza por $H=0$

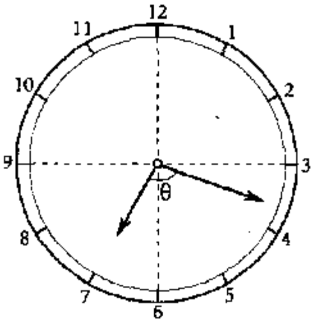


Se observa en el gráfico que el minutero ha pasado al horario, entonces

$$\theta=+\frac{11}{2}(01)-30(0)$$

$\therefore\ \theta=5{,}5°$

IV. $\underline{\overset{H}{7}:\overset{M}{17}}$



En el gráfico, observamos que el minutero no ha pasado al horario, entonces

$$\theta=-\frac{11}{2}(17)+30(7)$$

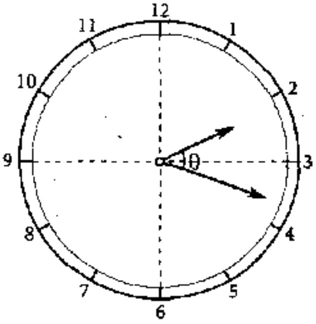
$\therefore\ \theta=116{,}5°$

V. $\underline{2{:}18'40''}$

En la fórmula para el cálculo de la medida del ángulo, solo se considera las agujas horario y minutero (los valores que ellas indican), entonces, convertiremos los 40 s a minutos.

$$40\ \text{s}\times\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}=\frac{2}{3}\ \text{min}$$

$$\rightarrow\ 2:18\frac{2}{3}<>\overset{H}{2}:\overset{M}{\underline{56}}\atop{\ \ \ \ \ \ \ 3}$$



En este caso, el minutero ya pasó al horario, entonces

$$\theta=+\frac{11}{2}\left(\frac{56}{3}\right)-30(2)$$

$\therefore\ \theta=\frac{128}{3}=42{,}7°$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 25

Una persona, al ver la hora, confunde el horario con el minutero y viceversa, y dice: *Son las 4:42*. ¿Qué hora era realmente?

A) 8:24
B) 8:22
C) 8:27
D) 8:25
E) 8:26

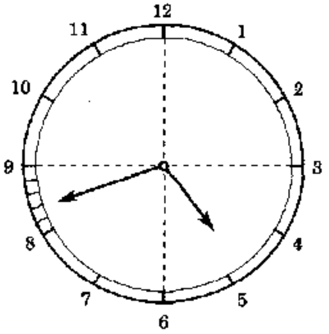
Resolución

Se pide la hora real del reloj

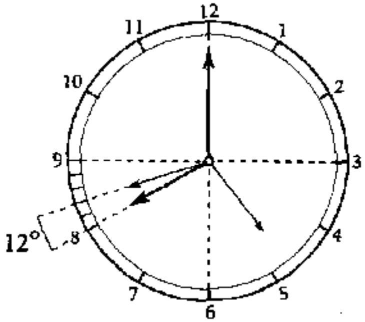
Dato: la persona confunde el horario con el minutero y el minutero con el horario.

Graficamos la situación planteada en el problema:

Hora supuesta: 4:42



Hora real: 8:M



De la relación

$$\frac{\text{Recorrido del minutero (min)}}{\sphericalangle \text{ barrido por horario (°)}}=\frac{2}{1}$$

Reemplazamos

$$\frac{M}{12}=\frac{2}{1}$$

$$\rightarrow\ M=24$$

$\therefore$ Hora real=8:24

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

¿A qué hora, inmediatamente después de las 2:00 p. m., el minutero adelanta al horario, tanto como el horario adelanta a la marca de las 12?

A) 2:32 p. m.
B) 2:28 p. m.
C) 2:35 p. m.
D) 2:24 p. m.
E) 2:40 p. m.

Resolución

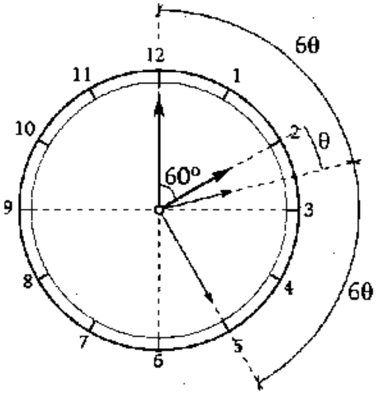
Graficamos según el dato:

- *... después de las 2:00 p. m., el minutero adelanta al horario, tanto como el horario adelanta a la marca de las 12.*

Hora: 2:2θ p. m.

$$\boxed{\frac{\text{Recorrido del minutero}}{\sphericalangle \text{ barrido por horario}}=\frac{2}{1}}$$

De la relación $\frac{H}{M}=\frac{1}{12}$



Del gráfico

$5\theta=60$

$\theta=12$

$\therefore$ Hora=2:24 p.m.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 27

¿A qué hora, después de las 3 a.m., el número de minutos transcurridos a partir de las 3 a.m. es igual al número de grados sexagesimales que adelanta el minutero al horario?

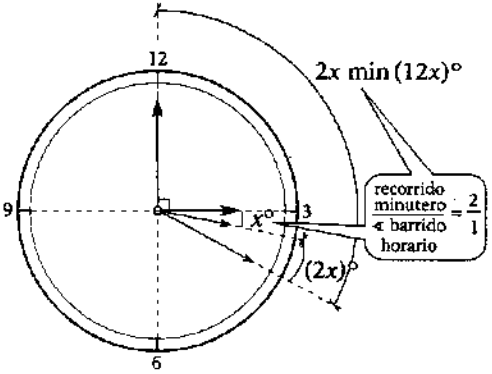
A) 3:20 a.m. B) 3:18 a.m. C) 3:48 a.m.
D) 3:19 a.m. E) 3:28 a.m.

Resolución

Graficamos a partir del dato:

- *... después de las 3 a.m., el número de minutos transcurridos es igual al número de grados sexagesimales que adelanta el minutero al horario.*

Se tiene



Son las 3:2x a.m., del gráfico

$12x-3x=90$

$9x=90$

$x=10$

$\therefore$ Hora: 3:20 a.m.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 28

Son las 12 del mediodía. Indique el menor tiempo al cabo del cual el segundero será bisectriz del ángulo que las otras dos agujas forman.

A) 32,5 s
B) 30 s
C) 31,20 s
D) 30,27 s
E) 30,5 s

Resolución

Se pide el menor tiempo a partir de las 12 m para que el segundero sea bisectriz del ángulo que forman las otras dos agujas (t s).

Recuerda

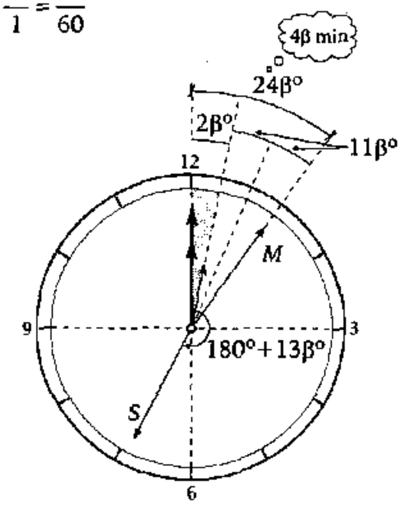
La relación entre los recorridos de las 3 agujas del reloj en un mismo tiempo es

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\frac{M}{1}=\frac{S}{60}} \\
\boxed{\frac{H}{1}=\frac{M}{12}=\frac{S}{720}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{\frac{H}{1}=\frac{M}{12}}
\end{tikzcd}$$

En el problema, sean las 12:4β p.m., donde 4β: el menor tiempo (en min).

De la relación entre los recorridos del

$$\frac{M}{1}=\frac{S}{60}$$



Reemplazamos del gráfico

$$\frac{24\beta}{1}=\frac{180+13\beta}{60}$$

$$60(24\beta)=180+13\beta$$

$$1440\beta=180+13\beta$$

$$\beta=\frac{180}{1427}$$

$$4\beta=\frac{720}{1427}\text{ min}$$

Convertimos a segundos, obteniendo

$$t=\frac{720}{1427}\times\left(\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}\right)$$

$\therefore\ t=30{,}27$ s

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

¿Cada cuánto tiempo las agujas del reloj se superponen?

A) 1 h 5 min 27 $\frac{3}{11}$ s

B) 1 h 4 min 13 $\frac{2}{11}$ s

C) 1 h 5 min 32 $\frac{3}{11}$ s

D) 1 h 5 min 38 $\frac{5}{11}$ s

E) 1 h 6 min 2 $\frac{3}{11}$ s

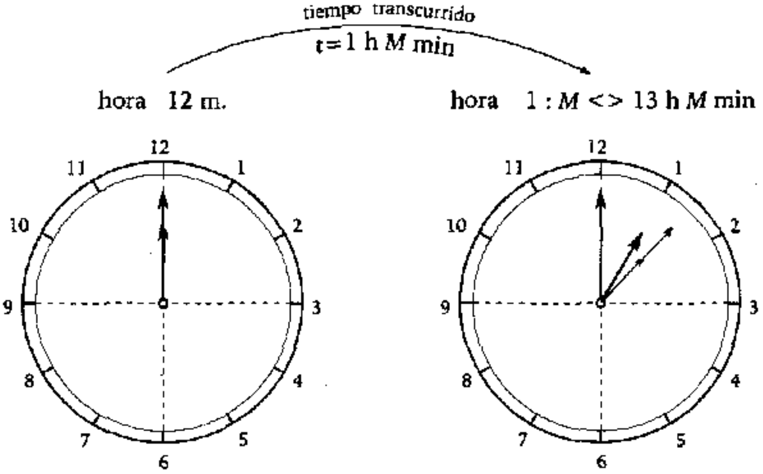
Resolución

Se pide: cada cuánto tiempo las agujas del reloj se superponen (t).

Ese tiempo pedido lo calcularemos con la diferencia de dos horas consecutivas cuyas agujas se superpongan.

Las agujas horario y minutero se superponen cuando la medida del ángulo que forman es 0°.

A las 12 h, en punto, las agujas se superponen, luego, volverá a ocurrir pasada la una, es decir



Del 2.° gráfico

$$0=+\frac{11}{2}M-30(1)$$

$$\frac{11}{2}M=30$$

$$M=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}\text{ min}$$

Pero

$$\frac{5}{11}\cancel{\text{min}}\times\left(\frac{60\text{ s}}{1\cancel{\text{min}}}\right)=27\frac{3}{11}\text{ s}$$

$$\therefore\ t=1\text{ h }5\text{ min }27\frac{3}{11}\text{ s}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 30

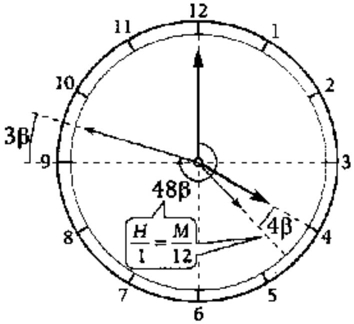
¿A qué hora, entre las 4 y las 5 p. m., el minutero adelanta a la marca de las 9 tantos grados como los 3/4 del ángulo barrido por el horario desde las 4 en punto?

A) 4:36 p. m.
B) 4:39 p. m.
C) 4:40 p. m.
D) 4:47 p. m.
E) 4:48 p. m.

Resolución

A partir del dato:

- *... entre las 4 y las 5 p. m., el minutero adelanta a la marca de las 9 tantos grados como los 3/4 del ángulo barrido por el horario desde las 4 en punto,* Graficamos de la siguiente manera:



En el gráfico, son las **4:8β** p. m.; además,

$$48\beta-3\beta=270$$

$$45\beta=270$$

$$\beta=\frac{270}{45}=6$$

∴ Hora=4:48 p. m.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 31

Al mirar mi reloj confundí el minutero por el horario y viceversa, por lo cual tuve un adelanto de 55 minutos a mi cita. Si en la hora correcta el horario estuvo entre las 2 y las 3, ¿cuál era la hora incorrecta considerada?

A) 3 h 11 min 21 $\frac{9}{11}$ s

B) 3 h 12 min 21 $\frac{9}{11}$ s

C) 3 h 13 min 2 s

D) 1 h 11 min 23 s

E) 4 h 14 min 21 s

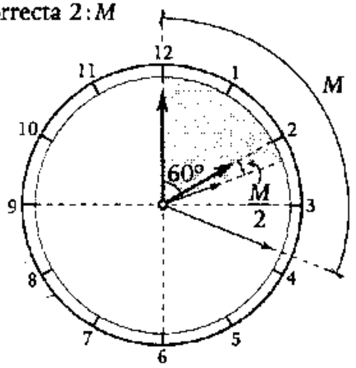
Resolución

Se pide la hora incorrecta considerada.

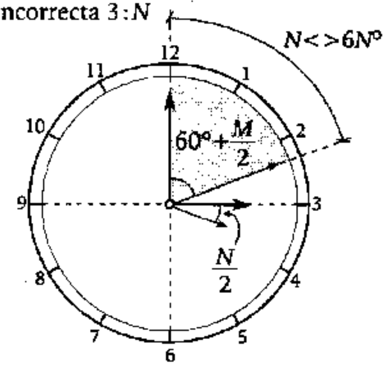
Dato: al confundir el minutero por el horario y viceversa, tuvo un adelanto de 55 minutos.

Graficamos las dos situaciones planteadas, teniendo en cuenta que como la diferencia es casi una hora (55 min), el horario en la hora incorrecta estará entre las 3 y las 4.

hora correcta 2:M



hora incorrecta 3:N



Del gráfico

$$60+\frac{M}{2}=6\,N \qquad \text{(I)}$$

Del adelanto de 55 minutos tenemos que

$$3\text{ h }N\text{ min}-2\text{ h }M\text{ min}=55$$

Convertimos a minutos.

$$3(60)+N-(2(60)+M)=55$$

$$60+N-M=55$$

$$M=N+5 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$60+\frac{N+5}{2}=6N$$

$$125+N=12N$$

$$N=\frac{125}{11}=11\frac{4}{11}\text{ min}$$

Pero

$$\frac{4}{11}\text{min}\times\left(\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}}\right)=\frac{240}{11}=21\frac{9}{11}\text{ s}$$

$\therefore$ Hora incorrecta=3 h 11 min $21\frac{9}{11}$ s

Clave **A**

PROBLEMA N.° 32

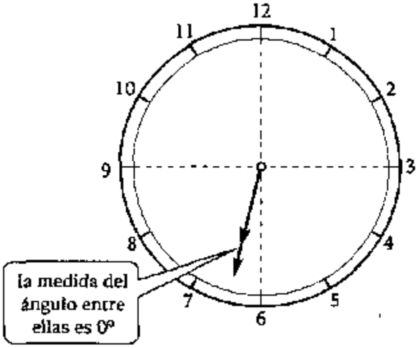
Rosa sale de su casa cuando, entre las 6 y las 7 de la noche, se superponen las agujas del reloj; y regresa cuando, entre las 10 y las 11 de esa misma noche, las agujas del reloj forman un ángulo recto por segunda vez. ¿Cuánto tiempo estuvo ausente aproximadamente?

A) 3 h 23 min
B) 4 h 32 min
C) 4 h 6 min
D) 4 h 42 min
E) 3 h 48 min

Resolución

Se pide el tiempo que estuvo ausente aproximadamente (t).
De los datos se tiene que en una misma noche:

- Sale de casa entre las 6 y 7 p. m.



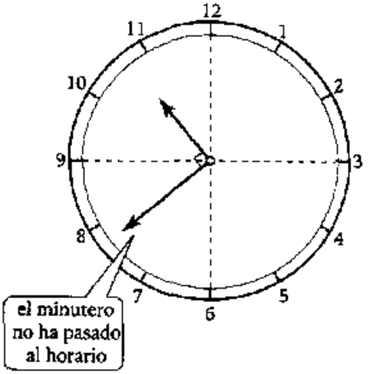
Hora que marca: 6 h M min

Por fórmula: $0=\frac{11}{2}M-30(6)$

$$\frac{11}{2}M=180$$

$$M=\frac{360}{11}\text{min}\rightarrow\underset{\text{de casa}}{\text{salió}}:6\text{ h }\frac{360}{11}\text{min}$$

- Regresa a casa entre las 10 y 11 p. m.



Hora que marca: 10 h N min

Por fórmula: $90=-\frac{11}{2}N+30(10)$

$$\frac{11}{2}N=210$$

$$N=\frac{420}{11}\text{min}\rightarrow\underset{\text{a casa}}{\text{regresó}}:10\text{ h }\frac{420}{11}\text{min}$$

Entonces

$$t = 10\ h\ \frac{420}{11}\text{min} - 6\ \text{h}\ \frac{360}{11}\text{min}$$

$$t = 4\ h\ \frac{60}{11}\text{min} = 4\ \text{h}\ 5\ \text{min}\ 27\frac{3}{11}\text{s}$$

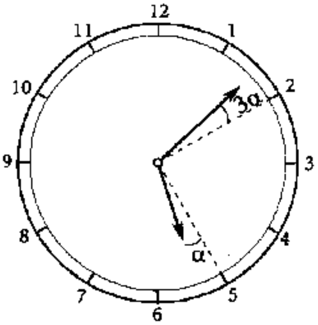
$\therefore\ t_{\text{aproximado}} = 4\ \text{h}\ 6\ \text{min}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 33

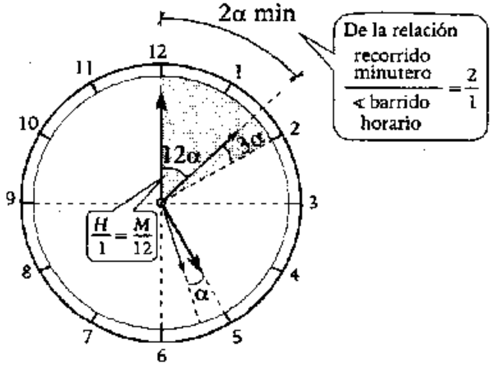
¿Qué hora es, según el gráfico?

A) 5 h 12'
B) 5 h 09'
C) 5 h 06'
D) 5 h 07'
E) 5 h 08'



Resolución

Se pide la hora que indica el gráfico.
Tomamos como referencia una hora exacta, en este caso las 5 en punto, para indicar los minutos recorridos, es decir



De la relación

$$\frac{\text{recorrido minutero}}{\sphericalangle\ \text{barrido horario}} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{H}{1} = \frac{M}{12}$$

Del gráfico, la hora que indica el reloj es

5 h 2α min

Además

$12\alpha + 3\alpha = 60$

$15\alpha = 60$

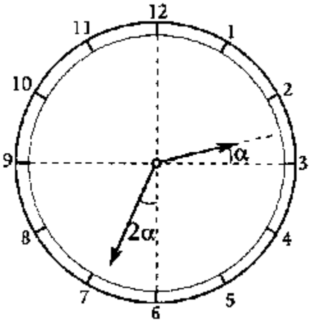
$\alpha = 4$

$\therefore$ Hora indicada: 5 h 08 min.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 34

¿Qué hora indica el reloj del gráfico?



A) $2\ \text{h}\ 33\ \frac{2}{5}\ \text{min}$

B) $2\ \text{h}\ 34\ \frac{2}{7}\ \text{min}$

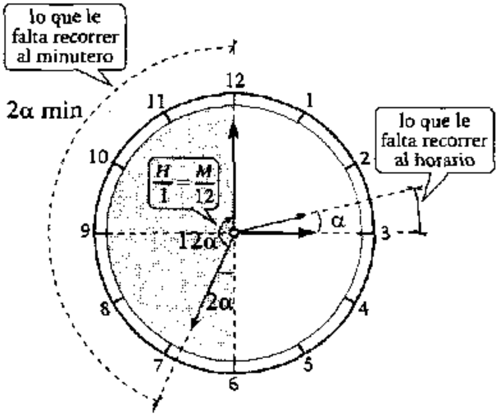
C) $2\ \text{h}\ 34\ \frac{1}{5}\ \text{min}$

D) $2\ \text{h}\ 33\ \frac{2}{7}\ \text{min}$

E) $2\ \text{h}\ 35\ \frac{1}{7}\ \text{min}$

Resolución

Se pide la hora que indica el gráfico.
En este caso, consideramos como referencia lo que falta para llegar a la siguiente hora (3 h).



En el gráfico se observa que faltan 2α min para las 3, además:

$$12\alpha+2\alpha=180$$

$$14\alpha=180$$

$$(\div 7)\quad 2\alpha=\frac{180}{7}\text{ min}$$

La hora que indica el reloj es

$$3\text{ h}-2\alpha\text{ min}=3\text{ h}-\frac{180}{7}\text{min}$$

Hacemos

$$=\underbrace{2\text{ h}+60\text{ min}}_{3\text{ h}}-\frac{180}{7}\text{ min}$$

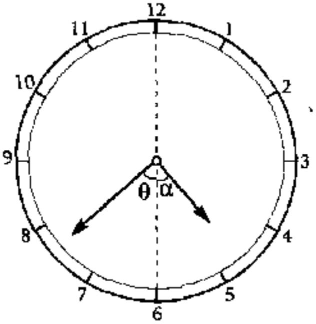
$$=2\text{ h}\frac{240}{7}\text{min}$$

$$\therefore\ \text{Hora indicada}=2\text{ h }34\frac{2}{7}\text{ min}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 35

¿Qué hora marca el reloj del gráfico mostrado, sabiendo que θ−α=3,75°?



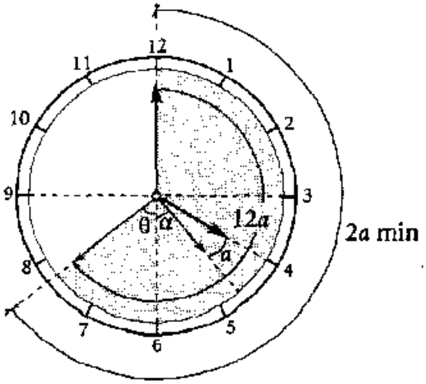
A) 4 h 37 min
B) 4 h 36 min 25 s
C) 4 h 37 min 30 s
D) 4 h 38 min
E) 4 h 37 min 16 s

Resolución

Se pide la hora que marca el reloj en el gráfico.

Dato: θ−α=3,75°

Tomamos como referencia partir de las 4 h, ya que en el gráfico se indica más de las 4; pero sin llegar a las 5 h. Con ello solo bastará saber el recorrido del minutero para conocer la hora que marca el reloj.



Según el gráfico, son: 4 h 2*a* min

Además

$$12a-\theta=180 \qquad \text{(I)}$$

$$a+\alpha=60 \qquad \text{(II)}$$

(I) + (II):

$$13a-\theta+\alpha=240$$

$$13a=240+\underbrace{(\theta-\alpha)}_{3,75}$$

$$13a=243,75$$

Multiplicando por $\frac{2}{13}$

$$2a=\frac{487,5}{13}\text{min}$$

$$2a=37\frac{1}{2}\text{min} \quad \rightarrow \quad 2a=37 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$\therefore$ Hora indicada = 4 h 37 min 30 s

Clave **C**

PROBLEMA N.° 36

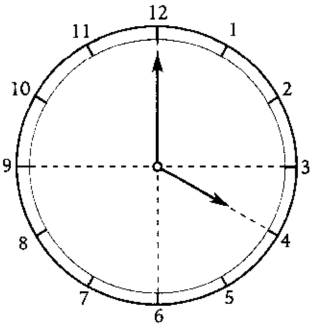
Un reloj, en vez de tener 12 divisiones, tiene 9, y cada día la aguja que marca las horas solo gira una vez en sentido horario alrededor de su eje. ¿Qué hora estará indicando este reloj cuando sean exactamente las 4:00 p. m.?

A) 7:00 B) 8:20 C) 6:30 D) 5:00 E) 6:00

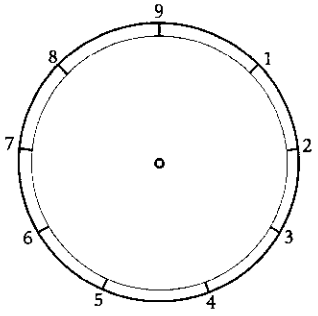
Resolución

Se pide la hora que indica el reloj extraño cuando son las 4:00 p. m. (x).
Comparemos un reloj común con el reloj extraño, teniendo en cuenta que este tiene 9 divisiones horarias y su horario gira una vez al día en el sentido de las agujas del reloj común.

reloj común



reloj extraño



Un día: 24 h ⟶ 9 h

Hora que marca: 4 p.m. <> 16 h ⟶ x h

De donde:

$$x=\frac{16\times 9}{24}=6 \qquad \therefore \; x=6:00 \text{ h}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 37

Se construye un nuevo reloj cuya esfera se divide en 8 partes iguales. Cada "nueva hora" equivale a 40 "nuevos minutos"; y cada "nuevo minuto" equivale a 40 "nuevos segundos". Cuando sean realmente las 3:27 min, ¿qué hora marcará el nuevo reloj?

A) 2 h 18 min B) 2 h 23 min C) 2 h 12 min D) 3 h 14 min E) 2 h 32 min

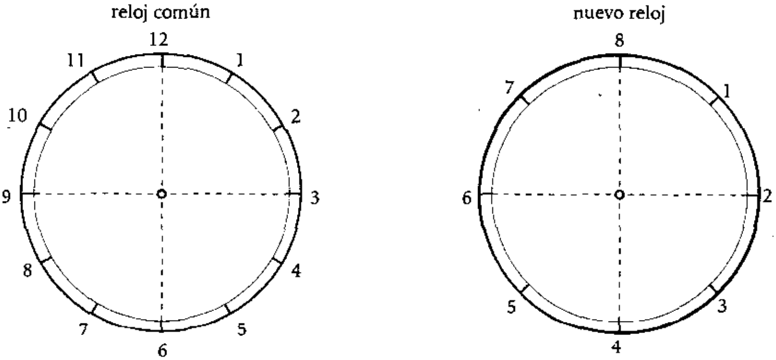
Resolución

Se pide la hora que marca el nuevo reloj cuando son las 3:27 (x).

Datos:

- Una nueva hora <> 40 nuevos minutos.
- Un nuevo minuto <> 40 nuevos segundos.

Se sabe que el nuevo reloj tiene solo 8 divisiones horarias y su horario da dos vueltas completas en un día, en sentido horario. Entonces, realicemos la comparación.



Un día:	24 h	⟶	16 h
Hora que marca:	3 h 27 min	⟶	x h

Primero, se convierten los 27 min a horas

$$27\text{ min}\times\frac{1\text{ h}}{60\text{ min}}=\frac{9}{20}\text{ h}$$

$$\rightarrow\quad \text{Hora}=3\frac{9}{20}=\frac{69}{20}\text{ h}$$

Luego, el nuevo reloj marca las

$$x=\frac{69}{20}\times\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{24}}}=\frac{23}{10}\text{ h}\quad\rightarrow\quad x=2\frac{3}{10}\text{ h}$$

Pero

$$\frac{3}{10}\cancel{h}\times\left(\frac{\overset{\text{dato}}{40\text{ min}}}{1\cancel{h}}\right)=12\text{ min}$$

$\therefore\ x=2$ h 12 min

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

En una tarde soleada, un poste de 8 m de longitud proyecta una sombra de 6 m de largo. ¿Qué hora es en ese preciso instante?

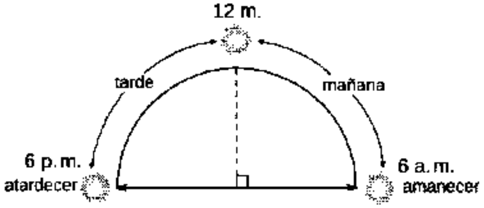
A) 2:14 p.m. B) 2:19 p.m. C) 2:30 p.m. D) 2:28 p.m. E) 3:05 p.m.

Resolución

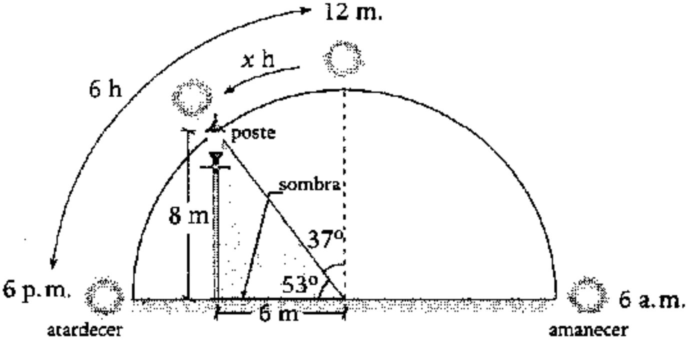
Se pide la hora en que un poste de 8 m proyecta una sombra de 6 m.
Dato: Es una tarde soleada.

Recuerda

Para este tipo de problemas se debe considerar lo siguiente:



En el problema, como se trata de una tarde, graficamos el poste así



Del gráfico

$$\left.\begin{array}{l} 6\text{ h} \longrightarrow 90^\circ \\ x\text{ h} \longrightarrow 37^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Recorrido}\\ \text{del sol}\end{array}$$

$$x=\frac{37\times 6}{90}=2\frac{7}{15}\text{ h}$$

Pero

$$\frac{7}{15}\text{ h}\times\frac{60\text{ min}}{1\text{ h}}=28\text{ min}$$

$\therefore$ x=2:28 p.m.

Clave D

PROBLEMA N.° 39

Salí de mi casa, en la mañana, cuando las manecillas de un reloj, que da las horas con una campanada, formaba un ángulo de 180° y daba una campanada. ¿Cuántas campanadas sonaron en mi ausencia, si cuando volví en la noche del mismo día escuché una campanada y el ángulo que formaban las manecillas del reloj era de 90°?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

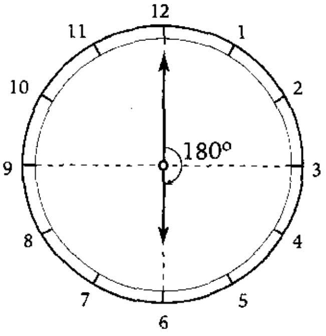
Resolución

Se pide la cantidad de campanadas que sonaron en su ausencia.

Dato:
El reloj señala las horas con una campanada.

Para calcular lo que se pide, hallaremos la hora en que salió de casa y la hora en que llegó. Por diferencia de ambos resultados, encontramos la cantidad de horas ausentes y, de esto, la cantidad de campanadas que sonaron.

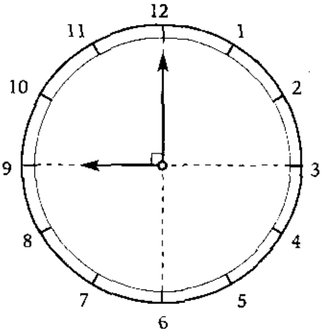
salió de la casa
(en la mañana)



→ 6 a.m.

única hora exacta en la mañana cuyas agujas forman 180°

llegó a la casa
(en la noche)



→ 9 p.m.

única hora exacta de la noche cuyas agujas forman 90°

Como ya tocó la campanada a las 6 a.m. y a las 9 p.m., las campanadas que sonaron en su ausencia son de las

7 a.m.; 8 a.m.; 9 a.m.; ... y 8 p.m.

→ 14 horas exactas

Por lo tanto, sonaron 14 campanadas.

Clave C

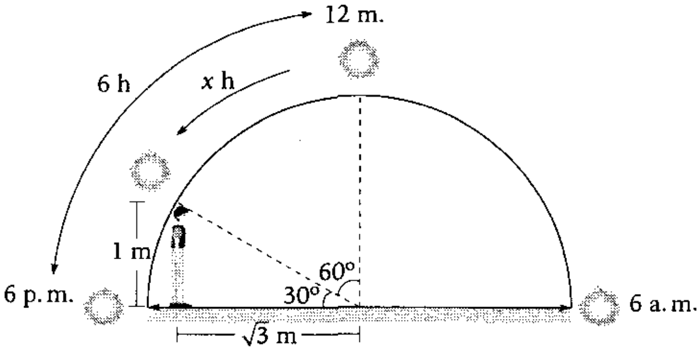
PROBLEMA N.° 40

En la tarde de un determinado día, un niño de 1 m de estatura proyectó una sombra de $\sqrt{3}$ m. En ese instante, ¿cuál es la medida del ángulo que forman las agujas del reloj?

A) 100° B) 140° C) 120° D) 60° E) 80°

Resolución

Se pide la medida del ángulo que forman las agujas del reloj en una tarde.
Dato: un niño de un metro de estatura proyecta $\sqrt{3}$ m de sombra.



Del gráfico:

$$\frac{x}{60}=\frac{6}{90}$$

$x=4$

Como es una tarde soleada

$x=4$ p. m.

Luego, para el cálculo de la medida del ángulo a esa hora, empleamos la fórmula

$$\boxed{\theta=-\frac{11}{2}M+30H}$$

$\underline{\text{Hora}}=\overset{H}{4}:\overset{M}{00}$ (el minutero no ha pasado al horario)

$$\rightarrow\ \theta=-\frac{11}{2}(0)+30(4)$$

$\therefore\ \theta=120°$

Clave C

Capítulo

9

Fracciones

El término fracciones está asociado a la idea de partición, pero muchas veces las fracciones son concebidas erróneamente como la división entre dos cantidades cualesquiera. La noción de fracción es muy antigua y ha permanecido durante la evolución de la humanidad, cuando el hombre cazaba una presa en colectivo y luego realizaba la respectiva repartición en partes iguales, o las mediciones y reparticiones de los terrenos, etc.

El presente capítulo tiene como finalidad esencial afianzar la interpretación de textos y ahondar en la definición de fracciones, su clasificación y sus aplicaciones ligadas al uso comercial.

Capítulo **9**

Fracciones

PROBLEMA N.° 1

Simplifique

$$E=\left[2\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{7}{3\frac{4}{5}}-\frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{2}}\right]\div 1\frac{77}{228}$$

A) $\frac{15}{19}$ B) $\frac{31}{19}$ C) 3

D) $\frac{85}{19}$ E) $\frac{3}{5}$

Resolución

Piden simplificar

$$E=\left[2\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{7}{3\frac{4}{5}}-\frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{2}}\right]\div 1\frac{77}{228}$$

Recuerda

$$a\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$$

Aplicamos la observación

$$E=\left[\frac{11}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{7}{\frac{19}{5}}-\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}}\right]\div\frac{305}{228}$$

Recuerda

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Resolvemos

$$E=\left[\frac{11}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{35}{19}-\frac{2}{3}\right]\div\frac{305}{228}$$

$$E=\left[\frac{11\times19\times3+2\times3\times5\times35-4\times19\times2}{4\times19\times3}\right]\div\frac{305}{228}$$

$$E=\frac{85}{19}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Si la fracción $\frac{1}{AL}$ genera el decimal $0,0\widehat{(A-1)L}$, calcule el valor de

$$\left(\frac{\overline{AL}+\overline{LA}}{\underbrace{\overline{AL}+\overline{AL}+\ldots+\overline{AL}}_{(A+L+1)\text{ veces}}}\right)^{-1}$$

A) 73 B) 7,3 C) 38

D) 3,7 E) 78

Resolución

Piden calcular el valor de

$$\left(\frac{\overline{AL}+\overline{LA}}{\underbrace{\overline{AL}+\overline{AL}+\ldots+\overline{AL}}_{(A+L+1)\text{ veces}}}\right)^{-1}$$

Dato:

$$\frac{1}{\overline{AL}}=0,\widehat{0(A-1)L}$$

$$\frac{1}{\overline{AL}}=\frac{\overline{(A-1)L}}{999}\ \rightarrow\ \underbrace{\overline{(A-1)L}}_{27}\times\underbrace{\overline{AL}}_{37}=999$$

$$\rightarrow A=3\ \wedge\ L=7$$

Reemplazamos

$$\left(\frac{37+73}{\underbrace{37+37+\ldots+37}_{11\text{ veces}}}\right)^{-1}=\left(\frac{110}{37\times 11}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{10}{37}\right)^{-1}=\frac{37}{10}=3,7$$

Clave **D**

Un caso particular de esta ecuación es:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

Pero esta solución queda descartada ya que

$x\neq y\neq z$

Entonces, realicemos unas variantes, por lo menos, en dos de las fracciones

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}=1$$

$$\underbrace{\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}=1$$

$$\underbrace{\frac{4}{6}}+\frac{1}{3}=1$$

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{1}{3}=1$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1$$

$$\rightarrow x=2,\ y=3\wedge z=6$$

Por lo tanto

$x+y+z=11$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 3

Si: $x, y, z\in\mathbb{N}$, halle $x+y+z$.

Además $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1;\ x\neq y\neq z$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 37 E) 14

Resolución

Piden hallar el valor de $x+y+z$

Dato: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1;\ x\neq y\neq z$

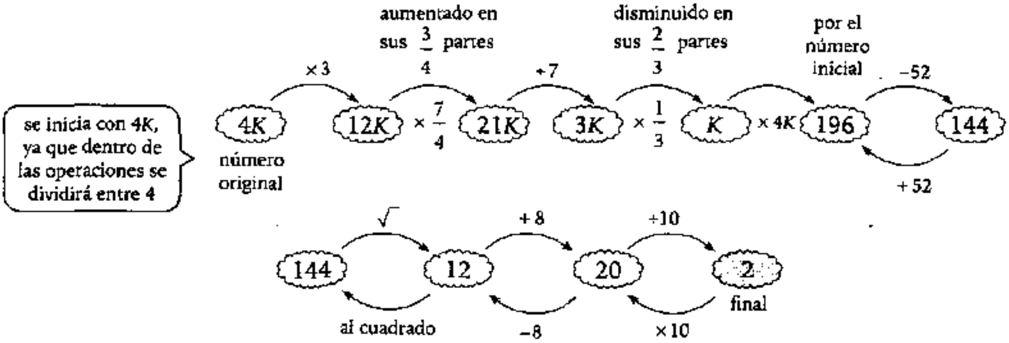
PROBLEMA N.° 4

"Amable y querida Lilavati de dulces ojos, dime cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado en las tres cuartas partes del producto anterior, dividido por 7, disminuido en dos tercios del cociente anterior, multiplicado por el número inicial disminuido en 52 y después de la extracción de la raíz cuadrada, adicionado en 8 y dividido por 10, dé como resultado final 2".

A) 4 B) 14 C) 84
D) 28 E) 21

Resolución

Piden determinar el número original.
Los datos del problema se plantean en el siguiente esquema.



De lo que

$\rightarrow\ K\times 4K=196\ \rightarrow\ K^2=49\ \therefore\ K=7$

Por lo tanto, el número inicial es $4K=28$

Clave D

PROBLEMA N.° 5

Un número racional irreductible $x=\frac{p}{q}$ tiene las siguientes propiedades:

I. $\frac{3}{5}<x<\frac{4}{5}$

II. Si se divide el intervalo $\left[\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right]$ en 5 partes iguales, el número x está en el punto medio del tercer intervalo.

Halle $p+q$.

A) 85 B) 51 C) 34
D) 68 E) 17

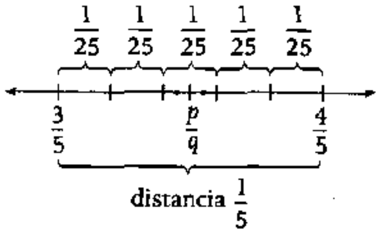
Resolución

Piden hallar $p+q$, si p/q es un número irreductible.

Evaluamos las siguientes proporciones:

I. $\frac{3}{5}<\frac{p}{q}<\frac{4}{5}$

II.



Del gráfico

$$\frac{p}{q}=\frac{3}{5}+\frac{2}{25}+\frac{1}{50}\ \rightarrow\ \frac{p}{q}=\frac{35}{50}=\frac{7}{10}$$

Por lo tanto, $p+q=17$

Clave E

PROBLEMA N.° 6

¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 900 existen?

A) 30 B) 320 C) 240 D) 120 E) 560

Resolución

Piden el número de fracciones propias e irreductibles de denominador 900.

Sea $f = \dfrac{N}{900} \rightarrow \overset{\circ}{3}; \overset{\circ}{2} \text{ y } \overset{\circ}{5}$

Verifiquemos las condiciones:

- Fracciones propias

  $0 < N < 900$

- Fracciones irreductibles

  $N \neq \left\{ \overset{\circ}{3}, \overset{\circ}{2} \text{ y } \overset{\circ}{5} \right\}$

Analizando los posibles 900 valores iniciales de N, se deben eliminar los $\overset{\circ}{2}$ (la mitad), $\overset{\circ}{3}$ (tercera parte) y los $\overset{\circ}{5}$ (quinta parte) así:

$$\text{Valores de } N = \underbrace{900}_{\substack{\text{cantidad}\\ \text{inicial}}} \times \underset{\substack{\text{queda la}\\ \text{otra mitad}}}{\overset{\substack{\text{se quita}\\ \text{la mitad}}}{\frac{1}{2}}} \times \underset{\substack{\text{quedan las}\\ \text{2/3 partes}}}{\overset{\substack{\text{se quita la}\\ \text{tercera parte}}}{\frac{2}{3}}} \times \underset{\substack{\text{quedan las}\\ \text{4/5 partes}}}{\overset{\substack{\text{se quita la}\\ \text{quinta parte}}}{\frac{4}{5}}}$$

Simplificamos

$$\text{Valores de } N = 900 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 240$$

Por lo tanto, solo existe 240 fracciones propias e irreductibles de denominador 900.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Halle la fracción propia e irreductible $\frac{m}{n}$, sabiendo que la fracción equivalente a $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ tiene como producto de términos a 840.

A) 7/9 B) 4/5 C) 3/10
D) 3/7 E) 4/7

Resolución

Piden la fracción propia e irreductible $\frac{m}{n}$.

Dato:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{(m+n)K}{mnK}\Bigg\}\text{Producto de los términos de la fracción equivalente es 840.}$$

$$\rightarrow (m+n)K\times mnK=840$$

$$(m+n)\times mn\times K^2=210\times 4=10\times 21\times 2^2$$

$$\rightarrow m=3 \wedge n=7$$

Por lo tanto

$$\frac{m}{n}=\frac{3}{7}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 8

Si a los dos términos de una fracción ordinaria irreductible, se le suma el cuádruple del denominador, a cuyo resultado se le resta la fracción original, entonces se obtiene la misma fracción. Halle la fracción.

A) 9/13 B) 3/4 C) 2/3
D) 1/3 E) 4/9

Resolución

Piden hallar la fracción original.

Sea la fracción ordinaria irreductible $\frac{a}{b}$

Por los datos del problema

$$\rightarrow \frac{a+4b}{b+4b}-\underbrace{\frac{a}{b}}_{\substack{\text{Fracción}\\\text{original}}}=\underbrace{\frac{a}{b}}_{\substack{\text{La misma}\\\text{fracción}}}$$

Desarrollamos

$$\frac{a+4b}{5b}=\frac{2a}{b} \rightarrow \begin{array}{l}4b=9a\\ a=4 \wedge b=9\end{array}$$

Por lo tanto, la fracción original irreductible es $\frac{4}{9}$.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 9

El número de alumnos de un aula es menor que 240 y mayor que 100. Se observa que los 2/7 del total usan anteojos y los 5/13 son alumnos de ciencia. Si los conjuntos de alumnos mencionados son disjuntos, ¿cuál es la suma de los alumnos que usan anteojos con los de la especialidad de ciencias?

A) 50 B) 72 C) 110
D) 122 E) 182

Resolución

Piden la cantidad de alumnos que usan anteojos más la cantidad de alumnos de la especialidad de ciencias.

Sea N el número de alumnos, por el dato inicial del problema

$$100 < N < 240$$

Además

- $\frac{2}{7}$ del total usan anteojos.
- $\frac{5}{13}$ del total son alumnos de ciencia.

} conjunto disjuntos

Analizando estos últimos datos, N debe ser $\overset{o}{7}$ y $\overset{o}{13}$ entonces $N=91K$; $K \in \mathbb{Z}^+$

Reemplazamos

$$100 < 91\underset{\substack{\downarrow\\ 2}}{K} < 240$$

Entonces el total de alumnos es 182, el número de ellos que usan anteojos es $\frac{2}{7}(182)=52$ y el número de alumnos de ciencia es $\frac{5}{13}(182)=70$.

Por lo tanto, lo pedido es

$$52+70=122$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Los 2/3 más de la edad de Alfredo es igual a los 3/5 menos de la edad de Sonia. ¿Qué fracción representa la edad de Sonia respecto de la edad de Alfredo?

A) 10/9
B) 25/6
C) 3/5
D) 9/10
E) 25/3

Resolución

Piden: ¿qué fracción representa la edad de Sonia respecto de la edad de Alfredo?

Recuerda

- $\frac{2}{3}$ partes más <> $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$
- $\frac{3}{5}$ partes menos <> $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

Sean A la edad de Alfredo y S la edad de Sonia, se plantea

$$\underbrace{\frac{5}{3}}_{\frac{2}{3}\text{ más}} \times A = \underbrace{\frac{2}{5}}_{\frac{3}{5}\text{ menos}} \times S$$

De donde

$$\frac{A}{S}=\frac{6}{25} \rightarrow A=6K \text{ y } S=25K$$

Piden

$$\frac{\text{Edad de Sonia}}{\text{Edad de Alfredo}}=\frac{25K}{6K}=\frac{25}{6}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

¿Cuál es la fracción irreductible que dividida entre su recíproco da como resultado el decimal 0,751111... ?

A) 11/15
B) 26/14
C) 2/7
D) 13/20
E) 13/15

Resolución

Sea la fracción irreductible $\frac{a}{b}$

Al dividir entre su recíproca resulta $0{,}75\widehat{1}$

$$\rightarrow \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}}=0{,}75\widehat{1}$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{751-75}{900}=\frac{676}{900}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{26}{30}=\frac{13}{15}$$

Por lo tanto, la fracción irreductible $\frac{a}{b}$ es $\frac{13}{15}$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

Determine la última cifra del período de cada fracción y luego suma estas cifras.

$$\frac{1}{7};\frac{1}{17};\frac{1}{27};\ldots;\frac{1}{187}$$

A) 135 B) 157 C) 140
D) 133 E) 121

Resolución

Piden determinar la última cifra del periodo en cada caso.

- $\frac{1}{7}=0,\widehat{\ldots x} \rightarrow \frac{1}{7}=\frac{\overline{\ldots x}}{99\ldots 9}$

  $99\ldots 9=7\times(\overline{\ldots x})$

  $\rightarrow x=7$

- $\frac{1}{17}=0,\widehat{\ldots y} \rightarrow \frac{1}{17}=\frac{\overline{\ldots y}}{99\ldots 9}$

  $99\ldots 9=17\times(\overline{\ldots y})$

  $\rightarrow y=7$

Se observa que todas las fracciones generan decimales periódicos puros, ya que sus denominadores no presentan múltiplos de 2 ni de 5.

Además, todos los decimales periódicos puros tienen como últimas cifras al 7.

Entonces, la suma de la última cifra de las 19 fracciones es

$7\times 19=133$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 13

Si la siguiente fracción irreductible cumple

$$\frac{a}{\overline{mn}}=0,\overline{(2n)\frac{n}{2}(\widehat{3n})}$$

Calcule el valor de $a+m+n$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución

Piden calcular el valor de $a+m+n$
Dato: se tiene la siguiente fracción irreductible

$$\frac{a}{\overline{mn}}=0,\overline{(2n)\left(\frac{n}{2}\right)(\widehat{3n})}$$

Analizando los dígitos del decimal periódico mixto, $(2n)$; $\left(\frac{n}{2}\right)$ y $(3n)$ deben ser cifras, se observa que ello solo se garantiza para $n=2$

Reemplazamos

$$\frac{a}{\overline{m2}}=0{,}41\bar{6}=\frac{416-41}{900}$$

$$\frac{a}{\overline{m2}}=\frac{375}{900}=\frac{5}{12}$$

Comparamos

$a=5 \wedge m=1$

Por lo tanto, $a+m+n=5+1+2=8$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

Determine las dos últimas cifras del periodo de la fracción $\frac{3}{151}$.
Dé como resultado la suma de las cifras.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

Resolución

Piden determinar las dos últimas cifras del periodo de la fracción $\frac{3}{151}$.
Como el denominador de la fracción $\frac{3}{151}$ no contiene $\overset{\circ}{2}$ ni $\overset{\circ}{5}$, entonces la fracción genera un decimal periódico puro, así:

$$\frac{3}{151}=0{,}\overset{\frown}{\ldots xy}$$

$$\frac{3}{151}=\frac{\overline{\ldots xy}}{99\ldots 9}$$

$$\rightarrow\ 299\ldots 97=151\times(\overline{\ldots xy})$$

Construyamos la operación

$$\begin{array}{r}
1\ \underline{5\ 1}\ \times\\
4\leftarrow\textcircled{x}\textcircled{y}\rightarrow 7\\
\hline
\ldots 0\,|\,5\,|\,7\\
\ldots 6\ 0\,|\,4\\
\iddots\ \iddots\ \iddots\\
\hline
2\ 9\cdots 9\ 9\ 7
\end{array}$$

Por lo tanto, $x+y=11$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 15

¿En cuánto excede la fracción decimal periódica pura 0,7777... a la fracción decimal periódica mixta 0,6111...?

A) 1/5 B) 5/6 C) 1/6
D) 2/3 E) 2/5

Resolución

Piden: ¿en cuánto excede la fracción decimal, periódica pura 0,777... a la fracción decimal periódica mixta 0,6111...?

Desarrollamos las fracciones generatriz:

- $0{,}777\ldots=0{,}\bar{7}=\frac{7}{9}$
- $0{,}6111\ldots=0{,}6\bar{1}=\frac{61-6}{90}=\frac{55}{90}=\frac{11}{18}$

Piden la diferencia entre ambas cantidades

$$\therefore\ \frac{7}{9}-\frac{11}{18}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 16

Halle el menor valor de *n* en

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)=0,\widehat{b}$$

Si se sabe que $b+n<10$

A) 3 B) 7 C) 9
D) 5 E) 2

Resolución

Piden calcular el menor valor de *n*.
Dato:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)=0,\hat{b};\, b+n<10$$

Desarrollando

$$\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n-1}{n}\right)=0,\bar{b}$$

Luego de reducir

$$\frac{2}{n}=0,\bar{b}=\frac{b}{9}$$

Entonces

$$\underset{\downarrow}{b}\times\underset{\downarrow}{n}=18$$

$$\left.\begin{array}{ll}\times\ \ 18\times 1 & \rightarrow\ b+n=19\\ \times\ \ \ 9\times 2 & \rightarrow\ b+n=11\end{array}\right\}\text{descartado}$$

$$\checkmark\ \ 6\times 3$$

Por lo tanto, el valor mínimo de *n* es 3.

Clave C

PROBLEMA N.° 17

Dos vehículos con idénticos depósitos de gasolina consumen a esta uniformemente en 4 y 5 horas respectivamente. ¿Después de cuánto tiempo el contenido del depósito de uno será la mitad del contenido del otro?

A) $2\frac{1}{3}$ h

B) $1\frac{2}{3}$ h

C) $3\frac{1}{3}$ h

D) $2\frac{2}{3}$ h

E) $3\frac{2}{3}$ h

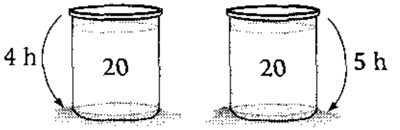
Resolución

Piden: ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el contenido del primer depósito sea la mitad del contenido del otro?

Dato: se tiene 2 depósitos idénticos de gasolina, una de ellas se consume en 4 h y la otra en 5 h.

Graficamos

Sea el volumen total como **20** (ya que es $\overset{\circ}{4}$ y $\overset{\circ}{5}$)

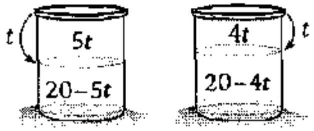


En 1 h: $\frac{1}{4}$ vol total. En 1 h: $\frac{1}{5}$ vol total.

En 1 h: $\frac{1}{4}(20)$ En 1 h: $\frac{1}{5}(20)$

En 1 h: 5 En 1 h: 4

Analizamos el consumo en un tiempo t



Por el dato

$$20-5t=\frac{1}{2}(20-4t)$$

$$\therefore \quad t=\frac{10}{3}\text{ h} <> 3\frac{1}{3}\text{ h}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

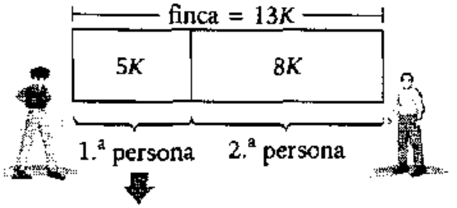
Dos personas arriendan una finca. El primero ocupa los 5/13 de la finca y paga 40 500 soles de alquiler al año. ¿Cuánto paga de alquiler semestral el segundo?

A) S/.32 400
B) S/.64 500
C) S/.16 125
D) S/.54 350
E) S/.24 230

Resolución

Piden: ¿cuánto paga de alquiler semestral la segunda persona?
Dato: la primera persona ocupa los 5/13 de la finca y paga S/40 500 anuales.

Sea la longitud de la finca=$13K$



S/. 40 500 anuales

Es decir S/. 20 250 semestrales

Comparamos costo (vs.) volumen de finca.

	Pago semestral		Volumen
1.ª persona	S/.20 250	→	5K
2.ª persona	S/.x	→	8K

$\rightarrow$ x=S/.32 400

Por lo tanto, la segunda persona paga semestralmente por su terreno S/.32 400.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 19

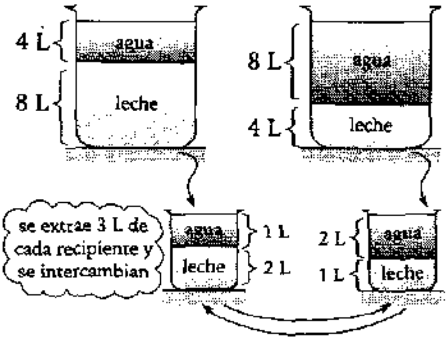
Se tienen 2 recipientes; el primero contiene 4 L de agua y 8 L de leche, el segundo contiene 8 L de agua y 4 L de leche. Si se extrae 3 L de cada uno simultáneamente para ser intercambiados, ¿qué cantidad de agua hay en el primer recipiente ahora?

A) 7
B) 6
C) 4
D) 3
E) 5

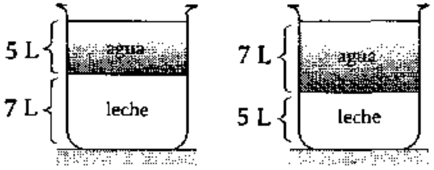
Resolución

Piden: ¿qué cantidad de agua hay en el primer recipiente finalmente?

Graficamos la información proporcionada



Resulta



Por lo tanto, en el primer recipiente ahora hay 5 litros de agua.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

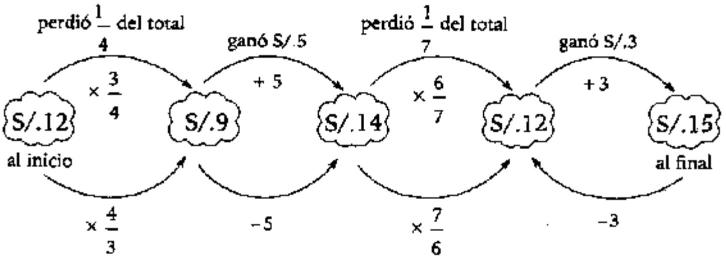
José empezó a jugar casino con cierta cantidad de dinero, en el primer juego perdió 1/4 de su dinero, en el segundo juego ganó S/.5, en el tercer juego perdió 1/7 de lo que tenía hasta ese momento y, en el último juego, gana S/.3, retirándose con S/.15. ¿Cuánto ganó o perdió José?, ¿qué fracción de lo que tenía al inicio representa la cantidad final?

A) perdió; 5/6   B) ganó; 5/2   C) ganó; 5/3   D) ganó; 5/4   E) perdió; 5/5

Resolución

Piden: ¿cuánto ganó o perdió José?

Analizando la variación que sufre el dinero de José



se observa que:

al final José, ganó S/.3; además, comparando, la cantidad final representa los

$\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$ de la cantidad inicial.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 21

Mientras que un estanque está vacío, se abren 2 llaves y un desagüe que lo llenan y vacían en 3, 6 y 4 horas, respectivamente. ¿En qué tiempo se llenará el estanque?

A) 7 h B) 2 h C) 4 h
D) 5 h E) 6 h

Resolución

Piden: ¿en qué tiempo se llenará el estanque?
Se sabe que

		Todo
	Caño A	3 h
	Caño B	6 h
(Desagüe)	**Caño C**	4 h

Analizamos el rendimiento de los caños por hora

	En 1 h
Caño A	1/3 total
Caño B	1/6 total
Caño C	1/4 total

Consideremos adecuadamente el volumen del estanque$=12K\left(\overset{\circ}{3};\ \overset{\circ}{6}\text{ y }\overset{\circ}{4}\right)$.

Reemplazamos

	En 1 h
Caño A	$(1/3)(12K)=+4K$
Caño B	$(1/6)(12K)=+2K$
Caño C	$1/4)(12K)=-3K$

El caño C es de desagüe, por ello, se considera su rendimiento negativo.

Si abrimos los 3 caños simultáneamente tenemos

A+B+C: En 1 h → $3K$

En x h → $12K$ (volumen total)

→ $x=4$

Por lo tanto, en total el recipiente se llenará en 4 horas.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

Un tanque puede ser llenado por una bomba en 5 horas y por una segunda bomba en 4 horas. Si una llave en el fondo lo puede vaciar en 10 horas, ¿en cuánto tiempo se llenaría el tanque con las 3 bombas funcionando a la vez?

A) 7 horas
B) 5 horas
C) 2 6/7 horas
D) 1 hora
E) 3 horas

Resolución

Piden: ¿en cuánto tiempo se llenaría el total del tanque?

Se sabe que

		Todo
	Caño A	5 h
	Caño B	4 h
(Desagüe)	**Caño C**	10 h

Analizando el rendimiento de los caños por hora.

	En 1 h
Caño A	1/5 total
Caño B	1/4 total
Caño C	1/10 total

Consideremos adecuadamente el volumen del tanque$=20K\left(\overset{\circ}{5};\overset{\circ}{4}\text{ y }\overset{\circ}{10}\right)$.

Reemplazamos

	En 1 h
Caño A	$(1/5)(20K)=+4K$
Caño B	$(1/4)(20K)=+5K$
Caño C	$(1/10)(20K)=-2K$

El caño C es de desagüe, por ello se considera su rendimiento negativo.

Si abrimos los 3 caños simultáneamente tenemos

A+B+C: En 1 h $\rightarrow$ 7 K

En x h $\rightarrow$ 20 K (volumen total)

$$x=\frac{20}{7}\text{h}<>2\,\frac{6}{7}\text{h}$$

Por lo tanto, en total el tanque se llenará en $2\,\frac{6}{7}$ h.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 23

Un caño vierte x L en y horas, y otro vierte también w L en z horas. Si al estar vacío un depósito y actuando los dos juntos lo llenan en T horas, calcule la capacidad del depósito.

A) $Txyz$

B) $\dfrac{zw}{xy}$

C) Twz

D) $\dfrac{w}{x+y+z+T}$

E) $\dfrac{T(xz+yw)}{yz}$

Resolución

Piden la capacidad total del depósito.
Se sabe que

Caño A

En y **h** $\xrightarrow{\text{vierte}}$ x litros

$$\boxed{\text{En 1 h} \xrightarrow{\text{vierte}} \frac{x}{y}\text{ litros}}$$

Caño B

En z **h** $\xrightarrow{\text{vierte}}$ w litros

$$\boxed{\text{En 1 h} \xrightarrow{\text{vierte}} \frac{w}{z}\text{ litros}}$$

Si abrimos los 2 caños simultáneamente, tenemos:

A+B:

En 1 hora $\xrightarrow{\text{vierte}}$ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{w}{z}$

En T hora $\xrightarrow{\text{vierte}}$ C (capacidad total)

Luego

$$C=T\left(\frac{x}{y}+\frac{w}{z}\right) \rightarrow C=T\left(\frac{xz+yw}{yz}\right)$$

Por lo tanto, la capacidad total del depósito es $T\left(\frac{xz+yw}{yz}\right)$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 24

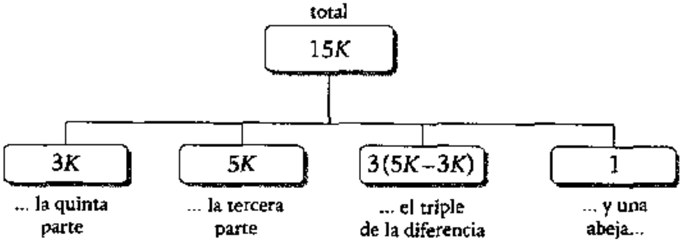
La quinta parte de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de crisantemo; la tercera parte, en una rosa. El triple de la diferencia entre estos dos números vuela sobre un clavel y una abeja vuela indecisa de una flor de pandamus a un oloroso jazmín. ¿Cuál es el número de abejas?

A) 26 B) 17 C) 15 D) 31 E) 20

Resolución

Piden determinar la cantidad de abejas.

Se sabe que



Igualamos el total de abejas

$$3K+5K+3(5K-3K)+1=15K$$

$$14K+1=15K$$

$$\rightarrow K=1$$

Observación

Se consideró adecuadamente $15K$ al total de abejas, ya que a dicha cantidad se le debía extraer la tercera parte y quinta parte.

Por lo tanto, la cantidad total de abejas es

$$15K=15$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

En una noche estrellada, pensaba:
Veo en el cielo azul y triste, tantas estrellas como el doble del inverso multiplicativo de $A_{(n)}$.
¿Cuántas estrellas he visto si $n=5$?

fig. 1

fig. 2

fig. 3

. . .

fig. n

Se sabe además que $A_{(K)}$ representa la fracción del área del menor triángulo respecto al área total en la figura $f_{(K)}$.

A) 2761 B) 1999 C) 2001
D) 1315 E) 2048

Resolución

Piden indicar el número de estrellas observadas si $n=5$.

Dato: *veo en el cielo azul y triste, tantas estrellas como el doble del inverso multiplicativo de* $A_{(n)}$.

Se define $A_{(n)}=$ fracción de área del menor triángulo respecto al área total en la figura $f_{(n)}$

fig. 1

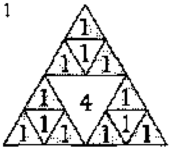


fig. 2

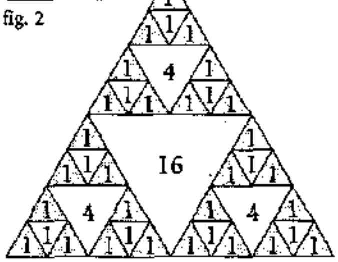


fig. 3

$$A_{(1)}=\frac{1}{4} \rightarrow A_{(1)}=\frac{1}{4^1}$$

$$A_{(2)}=\frac{1}{16} \rightarrow A_{(2)}=\frac{1}{4^2}$$

$$A_{(3)}=\frac{1}{64} \rightarrow A_{(3)}=\frac{1}{4^3}$$

Para $n=5 \rightarrow A_{(5)}=\frac{1}{4^5}=\frac{1}{1024}$

Además

El número de estrellas $=2\left(\frac{1}{\frac{1}{1024}}\right)=2048$

Por lo tanto, el número de estrellas, para $n=5$ es 2048.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 26

Se reparte una cantidad de dinero entre 2 personas; al primero le corresponde 1/3 de lo que no le corresponde, más la tercera parte de la diferencia entre lo que recibe el segundo y el primero. ¿Qué parte del total tiene el primero?

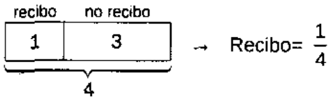
A) 7/20 B) 6/7 C) 5/12
D) 2/5 E) 6/13

Resolución

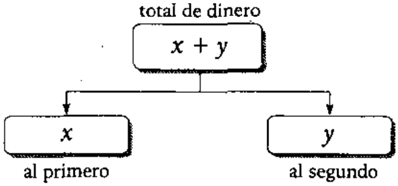
Piden: ¿qué parte del dinero total le corresponde a la primera persona?

Observación

Si yo recibo 1/3 de lo que no recibo, eso equivale a decir, yo recibo 1/4 del total, gráficamente:



Si se sabe que



Por dato: al primero le corresponde 1/4 del total, más la tercera parte de la diferencia entre lo que recibe el segundo y el primero, así:

$$x=\frac{1}{4}(x+y)+\frac{1}{3}(y-x)$$

Desarrollamos

$$13x=7y \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{7}{13}$$

$$\rightarrow x=7K$$

$$\rightarrow y=13K$$

Por lo tanto, al primero le corresponde los $\frac{x}{x+y} <> \frac{7}{20}$ del total.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 27

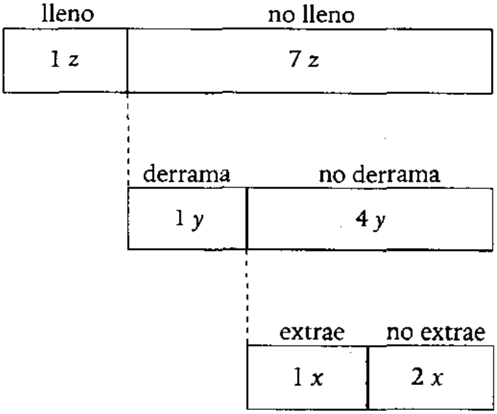
De un recipiente que está lleno 1/7 de lo que no está lleno, se derrama 1/4 de lo que no se derrama; luego de lo que queda se extrae la mitad de lo que no se extrae. ¿Qué parte del volumen total del recipiente queda con líquido?

A) 7/13 B) 2/7 C) 2/5 D) 6/11 E) 7/15

Resolución

Piden: ¿qué parte del volumen total del recipiente queda con líquido?
Se sabe que:

- Está lleno 1/7 de lo que no está lleno.
- Se derrama 1/4 de lo que no se derrama.
- Se extrae la mitad de lo que no se extrae.



De lo que

$$\begin{array}{l} \bullet\ 4y=3x \\ \bullet\ 5y=7z \end{array} \rightarrow \frac{x}{z}=\frac{28}{15}$$

Por lo tanto, el líquido que queda al final representa

$$\frac{2x}{8z} <> \frac{x}{4z} <> \left(\frac{28}{15}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{7}{15} \text{ del total.}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 28

Si se sabe que la edad actual de Yuli es $\overline{a(2a+7)}$ y la de Milagros es 12 años, y que cuando Milagros nació, Yuli tenía x años.
Determine la última cifra del periodo de cada fracción y luego sume estas cifras.

$$\underbrace{\frac{1}{x};\frac{1}{x+10};\frac{1}{x+20};\frac{1}{x+30};\ldots}_{\overline{ax}\text{ términos}}$$

A) 119
B) 106
C) 99
D) 101
E) 88

Resolución

Piden determinar la última cifra del periodo de cada fracción

$$\underbrace{\frac{1}{x};\frac{1}{x+10};\frac{1}{x+20};\frac{1}{x+30};\ldots}_{\overline{ax}\text{ términos}}$$

Se sabe que

	Presente
Edad de Yuli	$\overline{a(2a+7)}$
Edad de Milagros	12

Se observa que 2a+7 debe ser una cifra, entonces, $a=1$

Además la diferencia de edades es x años, entonces

$$\underbrace{\overline{a(2a+7)}}-12=x$$

$$19\quad -12=x$$

$$\rightarrow\ x=7$$

Analizando las fracciones, se tiene:

$$\underbrace{\frac{1}{7};\frac{1}{17};\frac{1}{27};\frac{1}{37};\ldots}_{17\text{ términos}}$$

Del problema N.° 12, deducimos que todas las fracciones tendrán como última cifra del periodo al número 7.

Por lo tanto, la suma de las últimas cifras de todos los periodos es $7\times17=119$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

Dos carpinteros, Pedro y Ángel, deben hacer una obra. Si trabajaran solos se demorarían 6 y 12 días, respectivamente. Calcule el tiempo que demorarían en hacer toda la obra si trabajaran juntos.

A) 2 días
B) 4 días
C) 6 días
D) 8 días
E) 10 días

Resolución

Piden el tiempo que demorarían los dos carpinteros en hacer la obra juntos.

Se sabe que:

	Todo
Pedro	6 días
Ángel	12 días

Por lo tanto

	En un día
Pedro	$\frac{1}{6}$ total
Ángel	$\frac{1}{12}$ total

Adecuadamente consideramos a la obra total $12K\left(\overset{\circ}{6} \text{ y } \overset{\circ}{\overline{12}}\right)$.

Reemplazamos

	En un día
Pedro	$\frac{1}{6}(12K)=2K$
Ángel	$\frac{1}{12}(12K)=K$

Si trabajan los dos carpinteros de manera simultánea, tenemos:

Pedro+Ángel: En un día $\rightarrow$ $3K$

En x días $\rightarrow$ $12K$ (total)

$\rightarrow x=4$

Por lo tanto, el tiempo total empleado por los 2 carpinteros es 4 días.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 30

Un ladrón acaba de robar la billetera de un hombre y luego de caminar 56 pasos, empezó a perseguirlo el dueño de la billetera. Si el ladrón da 9 pasos mientras el dueño da 7, pero 3 pasos de este equivalen a 5 del ladrón, ¿cuántos pasos dará el ladrón para ser alcanzado por la víctima?

A) 158
B) 132
C) 124
D) 189
E) 147

Resolución

Piden: ¿cuántos pasos dará el ladrón para ser alcanzado por la víctima?

Datos:

- En un mismo tiempo

Ladrón	**Víctima**
9 pasos	7 pasos

- En su desplazamiento
  3 pasos de la víctima=5 pasos del ladrón.

$$\begin{array}{l} 5K \leftarrow \\ 3K \leftarrow \end{array} \frac{\text{pasos de la víctima}}{\text{pasos del ladrón}}=\frac{5}{3}$$

Se concluye

- En un mismo tiempo

Ladrón	**Víctima**
$\underbrace{9(3K)}_{27K}$	$\underbrace{7(5K)}_{35K}$

Inicialmente, el ladrón llevaba una ventaja de 56 pasos $<>$ $56(3K)=168K$.
Si comparamos el desplazamiento de ambos en un mismo tiempo, la víctima se acerca $35K-27K=8K$; entonces, para alcanzarlo totalmente se debe repetir la secuencia $\frac{168K}{8K}=21$ veces.

Por lo tanto, el ladrón debe dar 9 pasos 21 veces, es decir, $9\times21=189$ pasos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

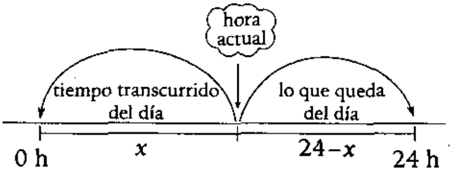
¿A qué hora los 2/3 de lo que queda del día es igual al tiempo transcurrido?

A) 9:30 a.m. B) 9:36 a.m.
C) 10:36 a.m.
D) 9:03 a.m. E) 10:36 a.m.

Resolución

Piden: ¿a qué hora los 2/3 de lo que queda del día es igual al tiempo transcurrido?

Analizamos el problema gráficamente



De lo pedido

$$\frac{2}{3}(24-x)=x$$

$$\rightarrow\ x=\frac{48}{5}$$

Por lo tanto, la hora pedida es

$$\frac{48}{5}h<>9\text{ h }36\text{ min}$$

Clave **B**

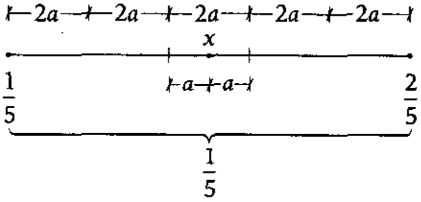
PROBLEMA N.° 32

El intervalo $\left[\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right]$ se divide en 5 partes iguales y x se encuentra en el punto medio del tercer intervalo.
Si x es una fracción irreductible, halle la suma de sus términos.

A) 13
B) 6
C) 7
D) 26
E) 8

Resolución

Piden hallar la suma de los términos de la fracción irreductible x.
Ubicamos el intervalo con sus 5 divisiones en partes iguales, teniendo



De lo que

$$10a=\frac{1}{5}\ \rightarrow\ a=\frac{1}{50}$$

Del gráfico

$$x=\frac{1}{5}+5a$$

$$x=\frac{1}{5}+5\left(\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

$$x=\frac{3}{10}$$

Por lo tanto, la suma de sus términos es 13.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 33

Dos hermanos deciden llenar con baldes de igual volumen 3 cilindros de 80, 90 y 120 litros.
Calcule el número mínimo de baldes con que llenaron los cilindros cada hermano, si el llenado de cada cilindro se realizó con un número entero de baldes.

A) 14 B) 15 C) 18
D) 29 E) 28

Resolución

Piden el menor número de baldes con que llenaron cada cilindro.
Si los cilindros tiene 80, 90 y 120 litros de capacidad, se debe emplear una unidad común (recipiente) para poder completarlos.
Ahora, para que la cantidad de recipientes empleados sea el menor, el volumen de la unidad común (recipiente) debe ser el mayor posible.
Se concluye que el volumen de la cantidad común es

$$\text{MCD}(80-90-120)=10 \text{ litros}$$

Por lo tanto, el número mínimo de baldes necesarios es

$$\frac{80}{10}=8;\ \frac{90}{10}=9 \text{ y } \frac{120}{10}=12$$

∴ Total de baldes=29

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

Los efectos que produjo un ciclón en los árboles de un bosque fueron devastadores, tanto es así que la cantidad de árboles sanos aumentada en 2/3 era igual a la mitad de los 3/5 de 1000. Se desea averiguar el número de árboles que había en el bosque antes del ciclón, sabiendo que los 2/7 de este número fueron arrancados a cuajo; que 1/12 quedaron destruidos, 1/4 descortezados y 1/6 quedaron sin ninguna hoja.

A) 840
B) 250
C) 360
D) 870
E) 980

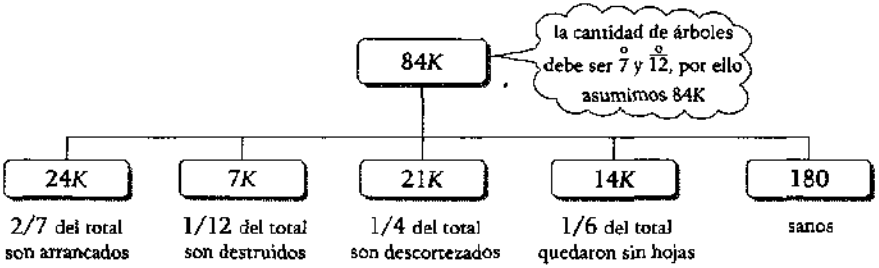
Resolución

Piden cantidad de árboles que había en el bosque antes del ciclón.
Sea x la cantidad de árboles sanos, entonces:

$$x+\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times 1000$$

$$\frac{5x}{3}=300 \quad\rightarrow\quad x=180$$

Además se sabe que



Igualamos

$$84K=24K+7K+21K+14K+180$$

$$84K=66K+180 \rightarrow K=10$$

Por lo tanto, el total de árboles es 840.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 35

Dadas las fracciones irreductibles a/b y c/d; se cumple que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=5$.

Además, d es el menor número que tiene 4 divisores. Calcule la menor diferencia de a y c.

A) 1
B) 3
C) 4
D) 8
E) 16

Resolución

Piden calcular la menor diferencia de a y c.

Dato:

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=5$
- $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones irreductibles
- d es el menor número con cuatro divisores.

Del último dato se deduce que

$d=6$

Además

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=5,$$

la suma de 2 fracciones irreductibles generan un entero, si y solo si, son homogéneas, entonces

$b=d=6.$

Luego

$$\frac{a}{6}+\frac{c}{6}=5 \rightarrow a+c=30$$

Como se pide la menor diferencia de a y c esto se dará cuando sus valores sean próximos.

Observación

Las fracciones $\frac{a}{6}$ y $\frac{c}{6}$ son irreductibles, entonces:

$a \neq \overset{o}{2}$ y $\overset{o}{3}$

$b \neq \overset{o}{2}$ y $\overset{o}{3}$

Analizando

$$\begin{array}{ccccl} a & + & c & =30 & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 15 & & 15 & \times & \\ 16 & & 14 & \times & \\ 17 & & 13 & \checkmark & \leftarrow \text{menor diferencia} \\ 18 & & 12 & \times & \end{array}$$

Por lo tanto, la menor diferencia de a y c es 4.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 36

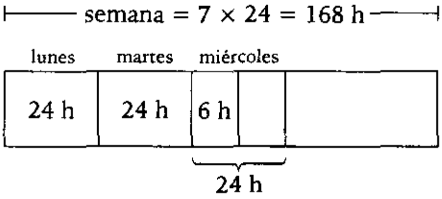
¿Cuál es la relación de la fracción transcurrida de la semana y la fracción transcurrida del día cuando son las 6:00 a. m. del miércoles?

A) 9/28
B) 9/4
C) 1/4
D) 1/28
E) 9/7

Resolución

Piden la relación de la fracción transcurrida de la semana y la fracción transcurrida del día cuando son las 6:00 a. m. del miércoles.

Analizando los días de la semana, tenemos:



Gráficamente se concluye que:

- Fracción transcurrida de la semana $\frac{54}{168}$
- Fracción transcurrida del día $\frac{6}{24}$

Por lo tanto, lo pedido equivale a

$$\frac{\frac{54}{168}}{\frac{6}{24}}=\frac{9}{7}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 37

La superficie de África representa los 22/7 de la superficie de Europa. Se sabe además que la superficie de África es de 29 700 000 km^2. Calcule la superficie de Europa.

A) 9 410 000 km^2
B) 9 430 000 km^2
C) 9 450 000 km^2
D) 9 400 000 km^2
E) 9 470 000 km^2

Resolución

Piden calcular la superficie de Europa.
Dato: la superficie de África representa los 22/7 de la superficie de Europa.

Del dato se concluye que

- Superficie de África$=22K$
- Superficie de Europa$=7K$

Además, se sabe que

- Superficie de África

  $22K=29\,700\,000\text{ km}^2$

  $\rightarrow K=1\,350\,000\text{ km}^2$

Por lo tanto, la superficie de Europa es

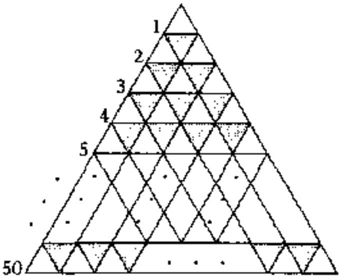
$7K=7(1\,350\,000\text{ km}^2)$

$7K=9\,450\,000\text{ km}^2$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 38

En la figura mostrada,



¿Qué parte del total es el área de la región sombreada?

¿Qué parte es el área de la región sombreada respecto del área de la región no sombreada?

A) $\dfrac{49}{100};\ \dfrac{51}{100}$

B) $\dfrac{49}{100};\ \dfrac{49}{51}$

C) $\dfrac{51}{49};\ \dfrac{49}{100}$

D) $\dfrac{41}{100};\ \dfrac{61}{49}$

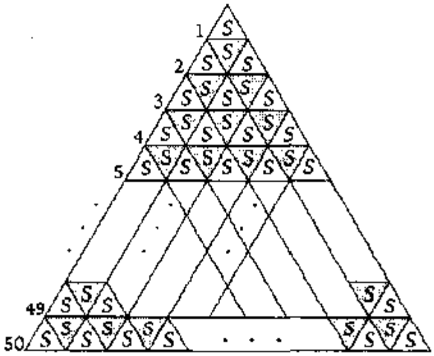
E) $\dfrac{49}{100};\ \dfrac{52}{100}$

Resolución

Piden: ¿qué parte del total es el área de la región sombreada?

¿Qué parte es el área de la región sombreada respecto del área de la región no sombreada?

Analizamos el gráfico



- Área total: 2500 *S*
- Área sombreada: 1225 *S*
- Área no sombreada: 1275 *S*

Por lo tanto, el área de la región sombreada respecto al área total es

$$\frac{1225\,S}{2500\,S}=\frac{49}{100}$$

y el área de la región sombreada respecto del área de la región no sombreada es

$$\frac{1225\,S}{1275\,S}=\frac{49}{51}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 39

Calcule la última cifra de
$A=\overline{abc}^4+\overline{ba}^3+b^2$

Si: $a=b+1$; $c=a+1$; $0,\overline{\ldots mb}=\frac{1}{5^{212}}$

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Resolución

Piden calcular la última cifra de

$$A=\overline{abc}^4+\overline{ba}^3+b^2$$

Datos:

$$a=b+1;\ c=a+1;\ 0,\overline{\ldots mb}=\frac{1}{5^{212}}$$

Analizando el número decimal

$$0,\overline{\ldots mb}=\frac{1}{5^{212}}\times\frac{2^{212}}{2^{212}}$$

$$0,\overline{\ldots mb}=\frac{2^{212}}{10^{212}}$$

Observación

$2^{\overset{\circ}{4}}=\ldots 6$

$$0,\overline{\ldots mb}=\frac{\ldots 6}{10^{212}}\ \rightarrow\ b=6$$

Además

$a=b+1\ \rightarrow\ a=7$
$c=a+1\ \rightarrow\ c=8$

Reemplazamos en lo pedido;

$$A=\underbrace{768^4}_{\ldots 6}+\underbrace{67^3}_{\ldots 3}+\underbrace{6^2}_{\ldots 6}=\ldots 5$$

Por lo tanto, la última cifra de *A* es 5.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

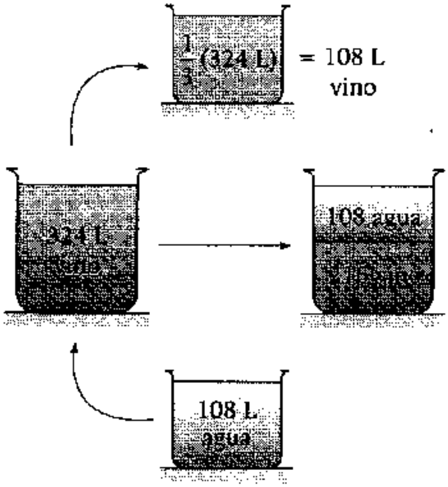
Se tiene un tonel lleno de 324 litros de vino puro. Se saca 1/3 del contenido y se completa con agua. ¿Cuántas veces más se debe repetir esta operación para que al final queden 260 litros de agua?

A) 4
B) 3
C) 5
D) 6
E) 7

Resolución

Piden: ¿cuántas veces más se debe repetir esta operación para que al final queden 260 litros de agua?

Se realiza la siguiente operación



Según el problema, al final deben quedar 260 litros de agua y 64 litros de vino.

Analizamos solo el volumen del vino, ya que es el que sufre menos variación (solo disminuye).

$$\underset{\text{vino}}{\overset{\text{al inicio}}{(324)}} \times \overbrace{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\ldots}^{n\text{ veces}} = 64$$

Queda después de la 1.ª extracción

Queda después de la 2.ª extracción

Queda después de la 3.ª extracción

⋮

De lo que

$$324\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = 64$$

$\rightarrow n=4$

Por lo tanto, el proceso se realiza

4 veces < > 3 veces más.

Clave B

Capítulo

10

El tanto por cuanto

Cuando entramos a una tienda y vemos anuncios como "20% de descuento", indirectamente nos menciona una comparación que se está realizando entre dos precios y que resultará en un beneficio económico para el cliente. Esas comparaciones que mencionamos, el análisis de ellas y la gran diversidad de aplicaciones que tienen, se desarrollan en este tema. Sin embargo, nos centraremos en la comparación de dos cantidades donde una de ellas asume un valor constante: 100, nos referimos al tanto por ciento. A través de los problemas resueltos se irá mostrando la diversidad de situaciones en las que interviene el tanto por ciento, lo cual nos permitirá descubrir su estrecha relación con nuestras actividades cotidianas.

Capítulo 10

El tanto por cuanto

PROBLEMA N.° 1

Si el $(x-1)\%$ de $(x+36)$ es $2x/5$, el valor de x es

A) 2 B) 4 C) 12
D) 9 E) 15

Resolución

Se pide el valor de x.

Se sabe que

$$(x-1)\% \text{ de } (x+36) \text{ es } \frac{2}{5}x$$

$$\underset{20}{\left(\frac{x-1}{\cancel{100}}\right)} \times (x+36) = \frac{2}{\underset{1}{\cancel{5}}}x$$

$$(x-1)\times(x+36)=20(2x)$$

$$x^2+36x-x-36-40x=0$$

$$x^2-5x-36=0 \text{ (aplicando aspa simple)}$$

$$x \qquad -9 \rightarrow x=9 \checkmark$$

$$x \qquad +4 \rightarrow x=-4 \checkmark \quad (x>0)$$

Por lo tanto, el valor de x es 9.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

El 40% del 50% de x es el 30% de y. ¿Qué tanto por ciento de $(2x+7y)$ es $(x+y)$?

A) 20% B) 40% C) 25%
D) 35% E) 50%

Resolución

Se pide el % que es $(x+y)$ de $(2x+7y)$.

Recuerda

Para expresar qué tanto por ciento representa una cantidad (parte) respecto de otra (todo), hacemos lo siguiente:

$$\boxed{\frac{\left(\begin{array}{c}\text{lo que hace}\\ \text{de PARTE}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{lo que hace}\\ \text{de TODO}\end{array}\right)}\times 100\%}$$

En el problema, primero encontramos la relación entre x e y, de ese modo, la expresión pedida se escribirá en términos de una variable común.

Del dato:

$$40\% \text{ del } 50\% \text{ de } x \text{ es el } 30\% \text{ de } y$$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{40}}}{\cancel{100}}\times\frac{\cancel{50}}{\cancel{100}}\times x = \frac{\overset{\overset{3}{6}}{\cancel{30}}}{\cancel{100}}\times y$$

$$2x=3y \rightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \rightarrow x=3K; \quad y=2K$$

Luego, reemplazamos en lo pedido, reconociendo primero cuál es lo que hace de PARTE y lo que hace de TODO. Es decir,

¿Qué tanto por ciento de $\underbrace{(2x+7y)}_{\text{todo}}$, es $\underbrace{(x+y)}_{\text{parte}}$?

de; respecto de;... ayudan a identificar lo que hace de TODO

es; representa;... ayudan a identificar lo que hace de PARTE

Entonces

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{lo que hace}\\ \text{de PARTE}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{lo que hace}\\ \text{de TODO}\end{pmatrix}}\times 100\% = \left(\frac{(3K)+(2K)}{2(3K)+7(2K)}\right)\times 100\%$$

$$\therefore\ \left(\frac{5\cancel{K}}{20\cancel{K}}\right)\times 100\% = 25\%$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 3

En una reunión, por cada 6 varones hay cinco mujeres; si se retiran la mitad de los varones y llegan tantas mujeres como habían, ¿qué tanto por ciento de los que quedan serán varones?

A) $23\frac{1}{13}\%$

B) $31\frac{2}{13}\%$

C) $24\frac{3}{13}\%$

D) 25%

E) 24%

Resolución

Se pide el tanto por ciento que representan los varones de los que quedan.

De los datos del problema, realizamos el siguiente esquema

	varones		mujeres		total
al inicio: (dato)	$6K$	+	$5K$	=	$11K$
	se retiran la mitad $\div 2$		$\times 2$ llegan tantas como habían		
al final:	$3K$	+	$10K$	=	$13K$

Luego, al final

$$\begin{matrix}\text{\% de varones de}\\ \text{ios que quedan}\end{matrix} = \frac{V_{\text{al final}}}{T_{\text{quedan}}}\times 100\%$$

$$\begin{matrix}\text{\% de varones de}\\ \text{los que quedan}\end{matrix} = \left(\frac{3K}{13K}\right)\times 100\%$$

$$\therefore\ \begin{matrix}\text{\% de varones de}\\ \text{los que quedan}\end{matrix} = \frac{300}{13}\% <> 23\frac{1}{13}\%$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 4

Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me queda, perdería 156 soles. ¿Cuántos soles tengo?

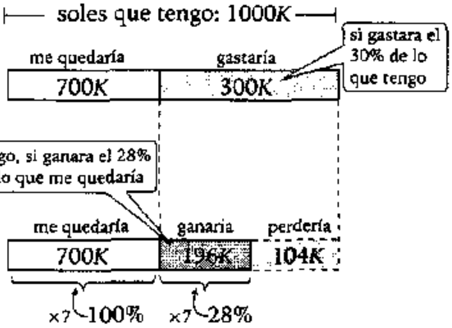
A) 2500 B) 1500 C) 1300
D) 3000 E) 2400

Resolución

Se pide la cantidad de soles que tengo.

Le asignamos a la cantidad que tengo un valor conveniente, para calcular consecutivamente el 30% y 28% sin que esto resulte una cantidad fraccionaria.

Entonces, sea la cantidad de soles que tengo: 1000K, graficamos así.



Del dato, *...perdería 156 soles*

$$104K=156$$

$$K=\frac{\cancel{156}}{\cancel{104}}$$

$$\rightarrow\ K=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ Tengo $1000K=1500$ soles

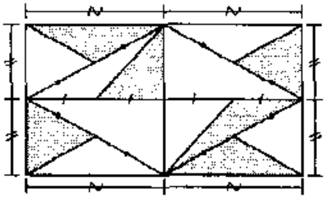
Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

¿Qué tanto por ciento representa el área de la región sombreada respecto del área de la región no sombreada?

Considere a toda la región una región rectangular.

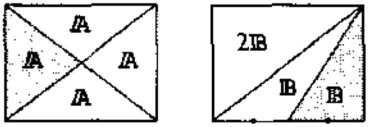
A) 40%
B) 50%
C) 35%
D) 60%
E) 65%



Resolución

Se pide: $\dfrac{A_{\text{reg. somb}}}{A_{\text{reg. nosomb}}}\times 100\%$

Primero recordemos algunas regiones notables que encontraremos en el gráfico del problema. En toda la región rectangular se cumple que

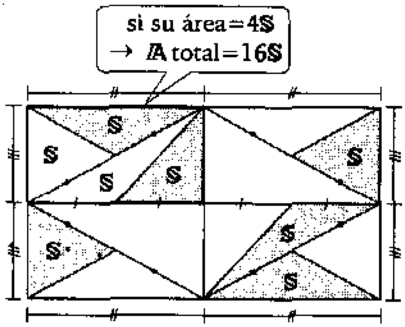


$\mathbb{A}=\frac{1}{4}$ del total $\qquad \mathbb{B}=\frac{1}{4}$ del total

Si ambas regiones rectangulares son iguales

$\rightarrow\ \mathbb{A}=\mathbb{B}$

Luego, en el gráfico del problema tenemos que



Del gráfico

- $\mathbb{A}_{\text{reg. somb}}=6\mathbb{S}$
- $\mathbb{A}_{\text{reg. no somb}}=\mathbb{A}_{\text{total}}-6\mathbb{S}=10\mathbb{S}$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{\text{reg. somb}}}{\mathbb{A}_{\text{reg. nosomb}}}\times 100\%=\frac{6\cancel{\mathbb{S}}}{10\cancel{\mathbb{S}}}\times 100\%=60\%$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

En una reunión se encuentran 16 varones y 24 damas. ¿Cuántas mujeres deberán retirarse para que el porcentaje de varones sea un 24% más que al inicio?

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15

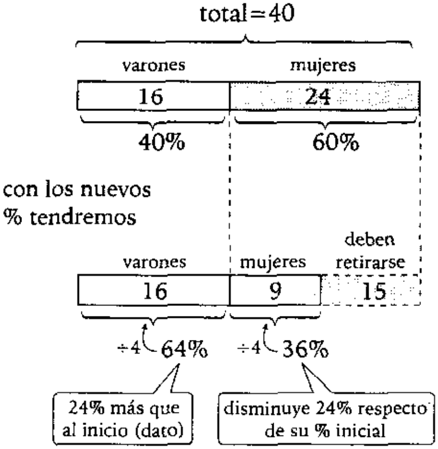
Resolución

Se pide la cantidad de mujeres que deben retirarse para que la cantidad de varones sea 24% más que al inicio.

De los datos realizaremos el siguiente esquema

- $\%\text{ varones}=\frac{16}{40}\times 100\%=40\%$

$\rightarrow$ % mujeres=60%



Por lo tanto, deben retirarse 15 mujeres.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 7

Se sabe que 12 obreros hacen una obra en 28 días. Si 8 obreros aumentan su rendimiento en un 60%, ¿qué tiempo emplearían en hacer la obra?

A) 40 días B) 30 días C) 20 días
D) 12 días E) 10 días

Resolución

Se pide el tiempo que emplearían en hacer la obra (x días).

Dato: 8 obreros aumentan su rendimiento en 60%.

Sea el rendimiento diario por obrero: 10 (le asignamos dicho valor como referencia. *Ejemplo*: 10 m de carretera, 10 paredes, etc.)

Entonces

$$\text{Obra/día}=12(10)=120$$

Al aumentar 8 de ellos su rendimiento diario en 60%.

$$\rightarrow \text{Obra/día}=8(\underset{\text{aumenta 60\%}}{16})+4(10)=168$$

Luego

(obra por día) × (n.° de días) = obra total

Al inicio **Al final**

$$120\times 28=168\times x \quad \text{(La obra total no varía)}$$

$$x=\frac{120(\overset{4}{\cancel{28}})}{\underset{24}{\cancel{168}}}$$

$\therefore$ x=20 días.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Se mezclan dos clases de avena en proporción de 3 a 2 y se vende ganando el 10%; luego se mezclan en proporción de 2 a 3, para luego venderlas ganando el 15%, determinándose que los precios de venta en ambos casos son iguales. Calcule la relación de precios de las dos clases de avena.

A) 5:4
B) 3:2
C) 5:3
D) 4:3
E) 4:1

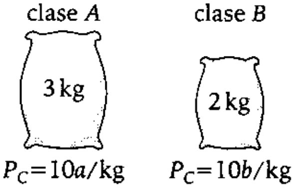
Resolución

Se pide la relación de precios de las dos clases de avena.

Como se pide la relación entre los precios de las avenas, las cantidades de cada una de estas no van ha generar alguna variación; por ello, le asignaremos valores pequeños pero en las relaciones indicadas.

Es decir:

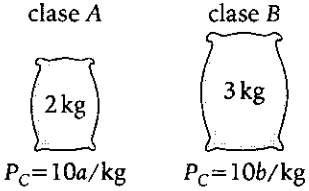
- 1.ª forma de mezclar



$$\text{Costo total}=3\times 10a+2\times 10b$$
$$=10(3a+2b)$$

$$\text{P. venta}=\underset{\nwarrow\text{gana 10\%}}{110\%}(10(3a+2b))=11(3a+2b)$$

- 2.ª forma de mezclar



$$\text{Costo total}=2\times 10a+3\times 10b$$
$$=10(2a+3b)$$

$$\text{P. venta}=\underset{\nwarrow\text{gana 15\%}}{115\%}(10(2a+3b))=\frac{23}{2}(2a+3b)$$

Por dato, se tiene que:

$$\begin{matrix}\text{P. venta de}\\ \text{1.ª forma}\end{matrix}=\begin{matrix}\text{P venta de}\\ \text{2.ª forma}\end{matrix}$$

Reemplazamos

$$11(3a+2b)=\frac{23}{2}(2a+3b)$$

$$22(3a+2b)=23(2a+3b)$$

$$66a+44b=46a+69b$$

$$20a=25b$$

$$\frac{a}{b}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$$

$$\therefore\ \frac{P_{c_A}}{P_{c_B}}=\frac{\cancel{10}a}{\cancel{10}b}=\frac{5}{4}$$

Clave **A**

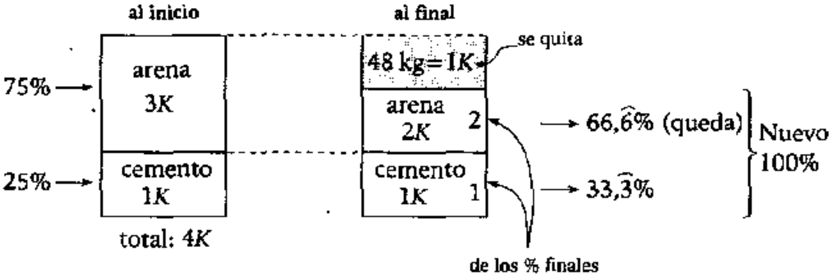
PROBLEMA N.° 9

En una mezcla de cemento y arena el 75% es arena. Si se quita 48 kg de arena y queda una mezcla con $66,\widehat{6}\%$ de arena, ¿cuál era el peso de la mezcla original?

A) 192 kg B) 201 kg C) 181 kg D) 162 kg E) 221 kg

Resolución

Se pide el peso de la mezcla original (Total inicial)



Del gráfico, $K=48$ kg

$\therefore$ Total inicial $=4K=192$ kg

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

Un boxeador ha peleado 34 veces, de las cuales en 18 ha ganadb. Él dice que se retirará cuando el 60% de sus peleas sean ganadas, pero en su intento pierde 2 peleas; por lo que ahora decide retirarse cuando el 80% de sus peleas sean victorias. ¿Cuántas peleas debe realizar, como mínimo, para retirarse?

A) 36 B) 54 C) 56
D) 52 E) 32

Resolución

Se pide la cantidad mínima de peleas que realizará para retirarse (x).

Dato: se retirará cuando el 80% de sus peleas sean victorias.

Ordenaremos la información del problema en una tabla, es decir:

	Peleas ganadas	**Peleas perdidas**	**Total**
Al inicio	18	16	34
En su intento	0	2	2
Al final	x	0	x
		Total de peleas	$36+x$

No debe perder

De donde:

$$\begin{matrix}\text{\% de peleas}\\ \text{ganadas en total}\end{matrix}=\left(\frac{18+x}{36+x}\right)\times 10\cancel{0}\,\% = 8\cancel{0}\,\%$$

$$\overset{5}{\cancel{10}}(18+x)=\overset{4}{\cancel{8}}(36+x)$$

$$90+5x=144+4x$$

$\therefore\ x=54$

Clave B

PROBLEMA N.° 11

El 50% de lo que me queda de bebida en la botella es igual al $33,\widehat{3}\%$ de lo que ya tomé. Si tomo el 25% de lo que me queda, ¿qué tanto por ciento de toda mi bebida habré tomado?

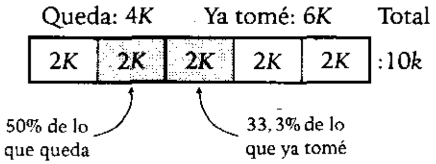
A) 70%
B) 74%
C) 62%
D) 48%
E) 68%

Resolución

Se pide el tanto por ciento tomado de la bebida.

Tengamos en cuenta que a la cantidad que queda le calcularemos su 25% <> 1/4, nos conviene entonces que tenga cuarta parte.

De los datos tenemos lo siguiente:



Si luego tomo

$$25\% <> \frac{1}{4}\text{ de lo que queda: }K$$

Entonces

$$\begin{matrix}\text{\% tomado de}\\ \text{la bebida}\end{matrix}=\frac{\text{Total tomado}}{\text{Total de bebida}}\times 100\%$$

$$=\left(\frac{6K+K}{10K}\right)\times 100\%$$

$\therefore$ % tomado de la bebida=70%

Clave A

PROBLEMA N.° 12

En un colegio, el 40% de los alumnos son mujeres. El número de mujeres aumentó en 30% y el de los hombres disminuyó en 10%. ¿En qué tanto por ciento ha variado el total de alumnos del colegio?

A) aumenta 2%
B) disminuye 5%
C) disminuye 6%
D) aumenta 5%
E) aumenta 6%

Resolución

Se pide la variación porcentual del total de alumnos.

Recuerda

$$V_P=\frac{\text{variación}}{\text{valor inicial}}\times 100\%$$

V_P: variación porcentual

Aquí solo interesan las magnitudes que varían (aumentan o disminuyen), todo lo que permanece constante no se debe considerar en los cálculos.

Como la variación de las magnitudes se compara respecto a su valor inicial, le asignaremos valores pequeños que permitan obtener valores enteros.

Entonces, de los datos

	al inicio		a final
Mujeres: (dato)	40	$\xrightarrow{+30\% <> +\frac{3}{10}}$	52
Varones:	**60**	$\xrightarrow{-10\% <> \frac{-1}{10}}$	**54**
Total:	100	$\xrightarrow{+6}$	106

Luego

$$V_{P\,(\text{alumnos})}=\frac{\text{aumento}}{\text{cant. inicial}}\times 100\%$$

$$V_{P(\text{alumnos})}=\frac{6}{\cancel{100}}\times \cancel{100}\%$$

$\therefore$ $V_{P(\text{alumnos})}$=aumenta 6%.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 13

Una persona entra a un juego de 3 apuestas consecutivas perdiendo y ganando, alternadamente, 80%, 10% y 70%, siempre en relación a lo que tenía o quedaba. Si se retiró con S/.66, ¿cuánto dinero perdió?

A) S/.934
B) S/.1020
C) S/.852
D) S/.628
E) S/.920

Resolución

Se pide la cantidad de dinero que perdió.

Sea la cantidad de dinero al inicio: 1000 K

De los datos se tiene

	pierde	gana	pierde
variaciones consecutivas:	80% ;	10% ;	70%
	⇓	⇓	⇓
entonces, queda	: 20% ;	110% ;	30%

(siempre respecto del monto anterior)

Luego, se queda al final con

$$\frac{30}{10\cancel{0}}\times\left(\frac{11\cancel{0}}{10\cancel{0}}\times\left(\frac{2\cancel{0}}{1\cancel{00}}\times 10\cancel{00}K\right)\right)=66K$$

Pero $66K=66$ (dato)

$\rightarrow$ $K=1$

Finalmente

Dinero que perdió=$1000K-66K$

Dinero que perdió=$934K$

Por lo tanto, el dinero que perdió es 934 soles

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

Una fábrica redujo en un 20% el precio de venta de sus artículos. ¿En qué tanto por ciento aumentaron sus ventas, si se sabe que sus ingresos aumentaron en un 20%?

A) 20%
B) 30%
C) 50%
D) 40%
E) 90%

Resolución

Se pide el tanto por ciento de aumento de sus ventas (V_P).

Asignamos valores pequeños al P_{venta} e Ingreso, de manera que los % de cada uno resulten valores enteros, es decir:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \text{al inicio} & & \text{al final} \\
P_V: & 5 \arrow[rr, bend left, "-20\% <> -1/5", "(\text{dato})"'] & & 4 \\
\times & & & \text{30 verifica la igualdad} \arrow[d, bend left] \\
\text{cantidad vendida}: & \underline{20} & & \underline{\bigcirc} \\
\Downarrow & & & \\
\text{ingresos: } 5\times 20=100 \arrow[rrr, bend left, "+20\% <> +1/5", "(\text{dato})"'] & & & 120
\end{tikzcd}$$

de donde

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \text{al inicio} & & \text{al final} \\
\text{cantidad vendida}: & 20 \arrow[rr, bend left, "+10"] & & 30
\end{tikzcd}$$

$$V_{P(\text{de ventas})}=\frac{10}{20}\times 100\%$$

$$\therefore\ V_{P(\text{de ventas})}=50\%$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 15

A un contratista le cuesta S/.90 el m^3 de piedra en bruto. Al ser triturada, se reduce a un tercio del volumen, pagando por esta S/.60 por m^3. Si ha ganado un 30% en el contrato, ¿cuánto recibió por m^3 de piedra triturada?

A) S/.140,1 B) S/.101,6 C) S/.171,6
D) S/.429 E) S/.191,4

Resolución

Se pide la cantidad de dinero recibido por m^3 de piedra triturada (x).

Sea el volumen de piedra en bruto: $3K$.

El total que pagó el contratista lo calculamos así:

$$\text{Pago total}=\overset{\text{Piedra en bruto}}{3K(S/.90)}+\overset{\text{Piedra triturada}}{\underset{\text{se reduce a 1/3 su volumen}}{K}(S/.60)}$$

Pero, según el dato:

- *... si ha ganado 30% en el contrato...*, la cantidad recibida por m^3 sería

$$x=\frac{\overset{\text{ganó 30\%}}{130\%}\left(3\cancel{K}(90)+\cancel{K}(60)\right)}{\underset{\text{volumen de piedra triturada}}{\cancel{K}}}$$

$$\therefore\ x=S/.429$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

Una señora lleva 3000 manzanas al mercado, de las cuales el 30 por 1000 estaban malogradas y solo pudo vender el 20 por 30 de las buenas. ¿Cuántas manzanas se quedaron sin vender?

A) 960 B) 970 C) 281
D) 282 E) 1060

Resolución

Se pide la cantidad de manzanas que no se vendieron.
Dato: El total de manzanas es 3000

Si: $\text{Manzanas malogradas}: \frac{30}{1000} \rightarrow \text{Manzanas no malogradas}: \frac{970}{1000}$

Si: $\text{Cantidad vendida}: \frac{20}{30} \rightarrow \text{Cantidad no vendida}: \frac{10}{30}$

Luego

$$\text{Cantidad no vendida} = \frac{10}{30}\overbrace{\left(\frac{970}{1000}\times 3000\right)}^{\text{no malogradas}}$$

Por lo tanto, cantidad no vendida es 970.

Clave **B**

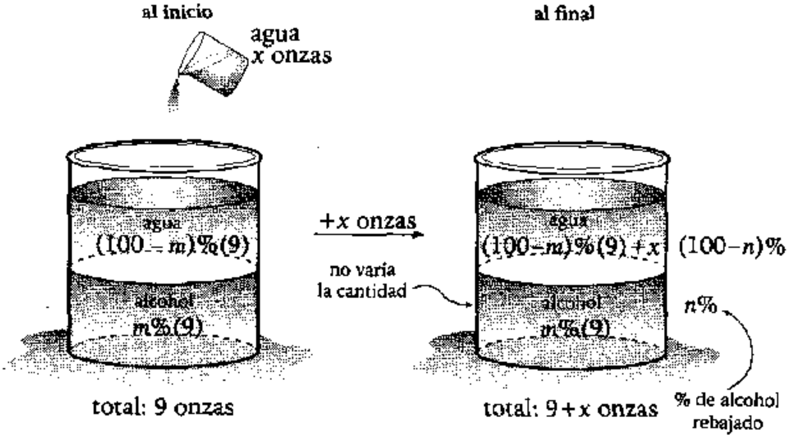
PROBLEMA N.° 17

Halle la cantidad de onzas de agua que se necesita para rebajar al $n\%$ el contenido de alcohol de un frasco de loción de afeitar de 9 onzas que contiene $m\%$ de alcohol.

A) $\frac{9(m-n)}{n}$ B) $\frac{9m}{n}$ C) $\frac{9m+n}{n}$ D) $9(m-n)$ E) $\frac{m+n}{n}$

Resolución

Se pide la cantidad de onzas de agua necesarias para rebajar el % de alcohol (x).
De los datos:



Del gráfico

$$\overset{\curvearrowright}{n\%(9+x)}=m\%(9) \rightarrow 9n+nx=9m \rightarrow nx=9(m-n)$$

$$\therefore \quad x=\frac{9(m-n)}{n}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 18

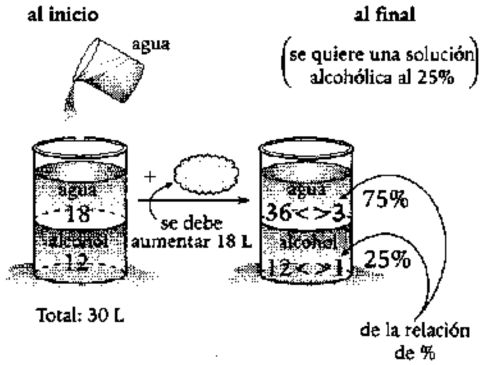
Si 30 litros de una solución alcohólica contienen 12 litros de alcohol, ¿cuántos litros de agua debemos agregar para obtener una solución al 25%?

A) 10 B) 12 C) 28
D) 18 E) 20

Resolución

Se pide la cantidad de agua a agregar para obtener una solución al 25%.

De los datos, la cantidad de alcohol (OH) no cambia, solo la cantidad de agua. Veamos el siguiente gráfico:



Por lo tanto, se agregará 18 L de agua.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

Un tonel tiene una mezcla de 50% de agua, 20% de alcohol y el resto de vino. Del tonel se saca el 40% de su contenido y en su lugar se agrega 15 litros de agua y 36 litros de vino, resultando de esta mezcla final la misma cantidad de agua y vino. ¿Cuántos litros de alcohol tenía la mezcla inicial?

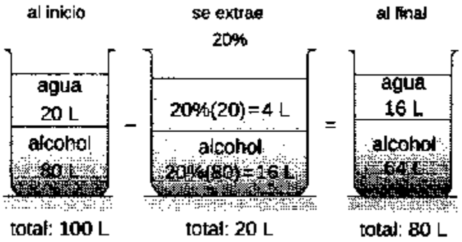
A) 32 B) 35 C) 40
D) 28 E) 20

Resolución

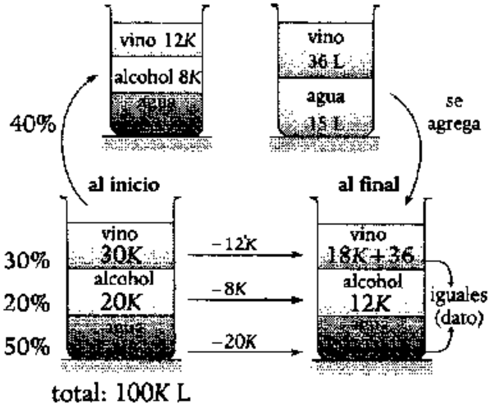
Se pide la cantidad de alcohol de la mezcla inicial.

Recuerda

En una mezcla, al retirar un cierto % del total, cada uno de sus elementos que la componen también varían en ese mismo %.



En el problema, según los datos se tiene



Del gráfico:

$$30K+15=18K+36$$

$$_4\cancel{12}K=\cancel{21}_7$$

$$K=\frac{7}{4}$$

Por lo tanto, cantidad de alcohol al inicio

$$20K=35\text{ L}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

Un bidón está lleno de 100 litros de vino. Se consume el 10% de vino y se sustituye por agua; luego se consume el 20% de la mezcla y también se reemplaza por agua. Finalmente se consume el 25% de la última mezcla y también se sustituye por agua. ¿Cuántos litros de vino puro quedan en el bidón, luego de la última operación?

A) 54 B) 28 C) 72
D) 36 E) 40

Resolución

Se pide el número de litros de vino puro que queda al final en el bidón (x).

Dato: El bidón está lleno de 100 L de vino.

En el problema solo se pide la cantidad final de vino, para lo cual iremos calculando la cantidad de vino que va quedando en cada operación.

Es decir, a partir de los datos.

1.° se consume 10% de vino

→ queda 90% de vino.

2.° se consume 20% de la mezcla

→ queda 80% de vino de la mezcla.

3.° se consume 25% de la nueva mezcla

→ queda 75% de vino de la nueva mezcla.

Entonces

$$x=\overbrace{\frac{75}{100}\left(\overbrace{\frac{80}{100}\left(\overbrace{\frac{90}{100}\times 100\text{ L}}^{1.^\circ}\right)}^{2.^\circ}\right)}^{3.^\circ}$$

$\therefore\ x=54\text{ L}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 21

De un depósito de 100 litros de vino, se saca el 20% y se reemplaza por agua. Si esta operación se repite dos veces más, ¿cuántos litros de agua habrá al final?

A) 51,2 B) 48 C) 52
D) 48,8 E) 52,5

Resolución

Se pide la cantidad final de litros de agua.

Dato: En el depósito hay 100 L de vino.

Lo que haremos será calcular la cantidad de vino que queda al final (por ser más directo en hacerlo) para luego restarlo del total (100 L) de esa manera obtenemos lo pedido.

La cantidad final de vino se puede hallar trabajando con lo que queda en cada extracción que se realiza.

Es decir:

Se extrae 20%

→ queda el 80% (se repite dos veces).

Entonces, la cantidad final de vino es

$$\overbrace{\frac{80}{100}\left[\overbrace{\frac{80}{100}\left(\overbrace{\frac{80}{100}\times 100}^{1.^{\circ}}\right)}^{2.^{\circ}}\right]}^{3.^{\circ}}=51{,}2\text{ L}$$

Por lo tanto, la cantidad final de agua es

$100-51{,}2=48{,}8$ L

Clave **D**

PROBLEMA N.° 22

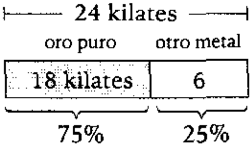
Al fundir oro y cobre hay una pérdida del 20% en cada metal. ¿Cuántos gramos de oro puro se debe utilizar si se quiere obtener 48 gramos de oro de 18 kilates?

A) 42 B) 38 C) 45
D) 40 E) 50

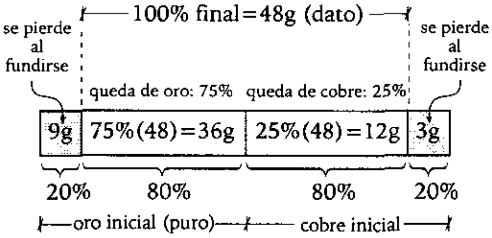
Resolución

Se pide la cantidad de gramos de oro puro necesaria para obtener 48 gramos de oro de 18 kilates.

Tengamos en cuenta que el oro puro es de 24 kilates, y si se quiere oro de 18 kilates se tendrá que fundir con otro metal. Así tendremos



De los datos del problema realizamos el siguiente gráfico:



Del gráfico se tiene, cantidad de oro puro

$36+9=45$ g

Clave **C**

PROBLEMA N.° 23

Se tiene tres recipientes vacíos *A*, *B* y *C* cuyas capacidades son entre sí como 1, 2 y 3. Echamos vino a estos recipientes (45%, 30% y 20% de su volumen, respectivamente) y las capacidades que faltan se completan con agua. Si luego los 3 volúmenes se vierten en un cuarto recipiente, determine la concentración de vino en el cuarto recipiente.

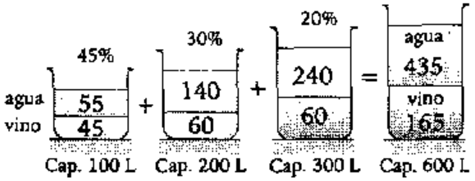
A) 24% B) 32,5% C) 27,5%
D) 41,2% E) 30%

Resolución

Se pide la concentración de vino en el cuarto recipiente.

La concentración de vino en una mezcla se calcula a partir de la comparación entre la cantidad de vino puro y el contenido total de la mezcla. Para ello no es necesario conocer las cantidades reales de c/u, solo los porcentajes de sus componentes en la mezcla.

De lo anterior, asignaremos valores convenientes, según los datos, a la capacidad de los recipientes para que el cálculo de los porcentajes sea sencillo. Grafiquemos así.



De donde, la concentración de vino en el cuarto recipiente será

$$\rightarrow \quad \frac{\text{cantidad de vino}}{\text{cantidad total}}\times 100\%$$

$$\frac{165}{600}\times 100\% = 27{,}5\%$$

Por lo tanto, la concentración de vino en el cuarto recipiente es 27,5%.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

¿En qué tanto por ciento aumenta el volumen de un cilindro cuando la altura se reduce en 25% y la longitud del radio de la base aumenta en 20%?

A) 8%
B) 4%
C) 12%
D) 10%
E) 14%

Resolución

Se pide el tanto por ciento de aumento del volumen de un cilindro (V_P).

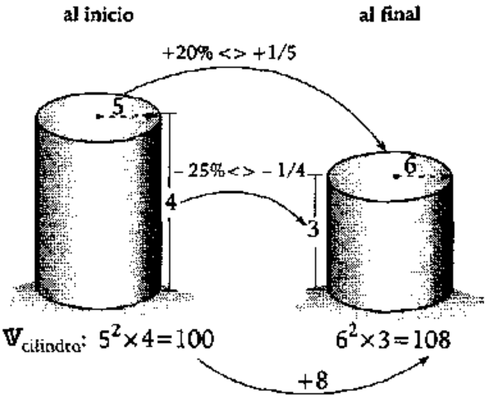
Recuerda

$\mathbb{V}_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h$

r: radio de la base
h: altura

Como se pide la variación porcentual (V_P), consideramos $\mathbb{V}_{\text{cilindro}} = r^2 \cdot h$ ya que π es cte.

Graficamos según los datos, obteniendo:



De donde

$$V_P\left(\mathbb{V}_{\text{cilindro}}\right) = \frac{+8}{100}\times 100\%$$

$$\therefore \quad V_P(\mathbb{V}_{\text{cilindro}}) = 8\%$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 25

Si x disminuye en 19% e y aumenta en 10%, ¿en qué tanto por ciento varía la expresión?

$$E = \frac{4}{3}\pi R^3 y^2 \cdot \sqrt{x}$$

A) aumenta 8%
B) aumenta 6,2%
C) aumenta 8,9%
D) disminuye 8%
E) disminuye 8,9%

Resolución

Se pide la variación porcentual de la expresión E. Del enunciado del problema, en la expresión

$$E=\frac{4}{3}\pi R^3y^2\sqrt{x}$$

solo varían x e y, asumimos que R permanece constante porque no se indica lo contrario, además $\frac{4}{3}$ y π son constantes, así que

$E=\frac{4}{\cancel{3}}\cancel{\pi R^3}y^2\sqrt{x}$ consideramos como

$$\boxed{E=\sqrt{x}y^2}$$

Asignamos valores convenientes para el cálculo de los porcentajes a x e y, teniendo lo siguiente:

al inicio **al final**

$$x:\quad 100 \xrightarrow{-19\%} 81$$

$$y:\quad 10 \xrightarrow{+10\%} 11$$

$$E=\sqrt{x}y^2:\quad \underbrace{\sqrt{100}\times10^2=1000 \quad \sqrt{81}\times11^2=1089}_{\text{aumenta en 89}}$$

Luego

$$V_P(E)=\frac{+89}{1000}\times100\%=+8{,}9\%$$

Por lo tanto, aumenta 8,9%.

Clave C

PROBLEMA N.° 26

El 40% del valor numérico del área de un círculo es el 60% del valor numérico de la longitud de su circunferencia. Halle el diámetro de la circunferencia.

A) 6 u
B) 4 u
C) 5 u
D) 10 u
E) 7 u

Resolución

Se pide el diámetro de la circunferencia$(2r)$ $(r=\text{radio})$.
Del dato se tiene que

$$4\cancel{0}\ \cancel{\%}A_{\odot}=6\cancel{0}\ \cancel{\%}L_{\odot}$$

$$4(\cancel{\pi}r^2)=6(2\cancel{\pi}\cancel{r})$$

$$r=3$$

$\therefore$ diámetro: $2r=6$u

Clave A

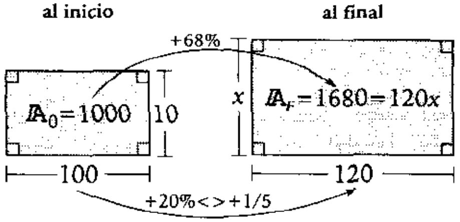
PROBLEMA N.° 27

Si la base de un rectángulo aumenta en el 20%, ¿en qué tanto por ciento debe aumentar la altura para que el área aumente en un 68%?

A) 32%	B) 40%	C) 51%
D) 38%		E) 42%

Resolución

Se pide el tanto por ciento de aumento de la altura de un rectángulo (V_P).
Graficamos según los datos, asignando valores a las longitudes



Del gráfico

$$120x=1680$$

$$x=14$$

Luego

$$V_{P(\text{altura})}=\left(\frac{\overbrace{x-10}^{\substack{\text{variación}\\ \text{de altura}}}}{10}\right)\times 100\%$$

$\therefore\ V_{P(\text{altura})}=40\%$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Si el lado de un cuadrado aumenta en 20%, su área aumentaría en 33 m^2. ¿En cuánto disminuye el área del cuadrado, si su lado disminuye en 20%?

A) 33 m^2 B) 9 m^2 C) 34 m^2
D) 11 m^2 E) 27 m^2

Resolución

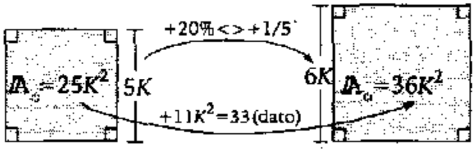
Se pide:

- Cantidad de m^2 que disminuye el área de una región cuadrada si su lado disminuye en 20%.

Dato:

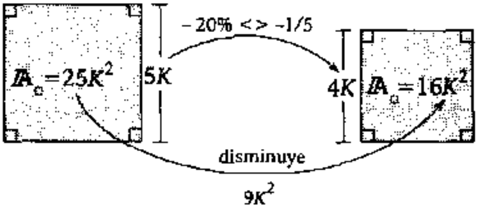
- El área de la región aumenta en 33m^2 si el lado aumenta en 20%.

Graficando se tiene



$\rightarrow\ K^2=3\text{m}^2$

Ahora, para calcular lo pedido



$\therefore\ 9K^2=27\text{m}^2$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 29

Si el área de una esfera aumentó en 44%, ¿en qué tanto por ciento varía su volumen?

A) 62,8% B) 72,8% C) 58%
D) 66% E) 80%

Resolución

Se pide la variación porcentual del volumen de una esfera.

Recuerda

$\boxed{\mathbb{A}_{SE}=4\pi r^2}$

Área de la superficie esférica

$\boxed{\mathbb{V}=\frac{4}{3}\pi r^3}$

Volumen de la esfera

r: radio de la esfera.

Consideramos, por tratarse de la variación porcentual, así:

$\boxed{\mathbb{A}_{SE}=r^2}$ y $\boxed{\mathbb{V}=r^3}$

De los datos

$$\begin{array}{lccc} & \textbf{Al inicio} & & \textbf{Al final} \\ \mathbb{A}_{SE}=r^2: & 100 & \xrightarrow{+44\%} & 144 \\ \to r & 10 & & 12 \\ \mathbb{V}_{esf}=r^3 & 1000 & \xrightarrow[\text{aumenta}]{+728} & 1728 \end{array}$$

De donde

$$V_P(\mathbb{V}_{esf})=\frac{+728}{1000}\times 100\%=+72{,}8\%$$

Por lo tanto, aumenta 72,8%.

Clave B

PROBLEMA N.° 30

Si el área de la superficie de una esfera disminuye en un 19%, ¿en qué tanto por ciento disminuye su volumen?

A) 38,3% B) 27,3% C) 28,1%
D) 37,1% E) 27,1%

Resolución

Se pide el tanto por ciento en que disminuye el volumen de una esfera (V_P).
Asignamos valores convenientes según los datos

$$\begin{array}{lccc} & \textbf{Al inicio} & & \textbf{Al final} \\ \mathbb{A}_{SE}=r^2: & 100 & \xrightarrow{-19\%} & 81 \\ \to r & 10 & & 9 \\ \mathbb{V}_{esf}=r^3 & 1000 & \xrightarrow[\text{disminuye}]{-271} & 729 \end{array}$$

Luego

$$V_P(\mathbb{V}_{esf})=\frac{271}{1000}\times 100\%$$

$$\therefore\ V_P(\mathbb{V}_{esf})=27{,}1\%$$

Clave E

PROBLEMA N.° 31

¿En qué tanto por ciento ha de variar la expresión yx^2, si y aumenta en 20% y x disminuye en 40%?

A) 50% B) 58,6% C) 52,6%
D) 56,8% E) 60%

Resolución

Se pide la variación porcentual de la expresión

$$M=x^2y$$

Según los datos x e y varían de la siguiente forma

$$\begin{array}{lccc} & \textbf{Al inicio} & & \textbf{Al final} \\ x: & 10 & \xrightarrow{-40\% <> -2/5} & 6 \\ y & 10 & \xrightarrow{+20\% <> +1/5} & 12 \\ \hline M=x^2y & 10^2\cdot 10=1000 & \xrightarrow[-568]{\text{disminuye}} & 6^2\cdot 12=432 \end{array}$$

Entonces

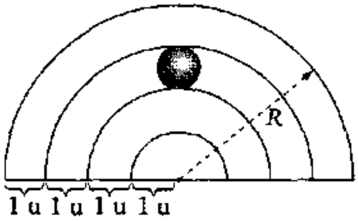
$$V_P(M)=\frac{-568}{1000}\times 100=-56{,}8\%$$

Por lo tanto, disminuye en 56,8%.

Clave D

PROBLEMA N.° 32

¿En qué tanto por ciento aumenta la región sombreada, si R aumenta 20%?



A) 42% B) 36%
C) 28%
D) 50% E) 44%

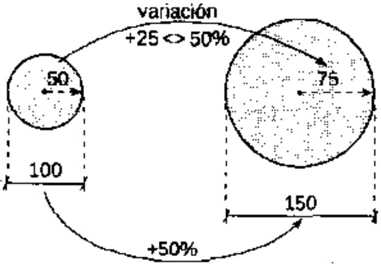
Resolución

Se pide el tanto por ciento en que aumenta la región sombreada.

Dato: R aumenta 20%.

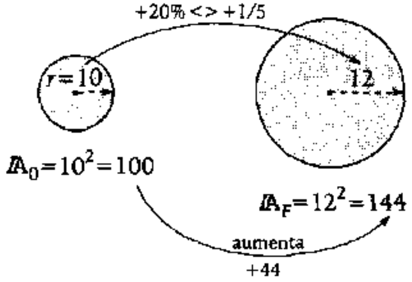
Recuerda

Si un **todo** varía un cierto %, sus **partes** varían en igual %. Por ejemplo, si el diámetro de un círculo aumenta 50%, su radio aumentará en 50%. Veamos:



En el problema, consideramos solo la región sombreada. Como R aumenta el 20%, el radio de la región circular (r) también aumentará en 20%.

Entonces, asignamos un valor conveniente a r



De donde

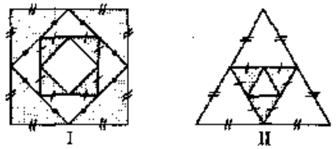
$$V_P\left(\mathbb{A}_{RS}\right)=\frac{+44}{100}\times 100\%=+44\%$$

Por lo tanto, aumenta 44%.

Clave E

PROBLEMA N.° 33

¿Qué tanto por ciento del área de la región sombreada de (I) es el área de la región sombreada de (II), si el área de la región cuadrada es los 3/5 del área de la región triangular?



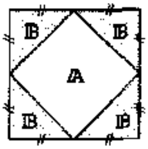
A) 50% B) 30% C) 40%
D) 20% E) 10%

Resolución

Se pide: $$\frac{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (II)}}}{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (I)}}}\times 100\%$$

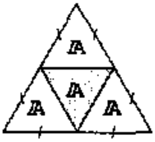
Dato: $$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{cuadrada}}}=\frac{3}{5}\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{triangular}}}$$

Recuerda



En toda región cuadrada, se cumple $\boxed{\mathbb{A}=4\mathbb{B}}$

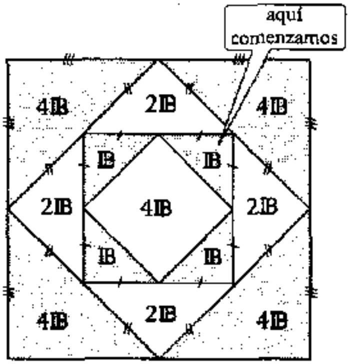
$$\boxed{\mathbb{A}=\frac{1}{2}\mathbb{A}_{\text{total}}}$$



En toda región triangular, se cumple $\boxed{\mathbb{A}=\frac{1}{4}\mathbb{A}_{\text{total}}}$

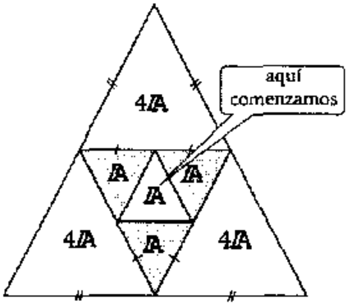
Según lo indicado, en el problema le asignamos valores a las áreas de la región, de tal manera que:

- Gráfico 1



área total$=32\mathbb{B}$

- Gráfico 2



área total$=16\mathbb{A}$

Del dato:

$$\cancel{32}\,\mathbb{B}=\frac{3}{5}(\cancel{16}\mathbb{A})$$

$$10\mathbb{B}=3\mathbb{A}$$

$$\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{B}}=\frac{10}{3}$$

$$\rightarrow\ \mathbb{A}=10K$$
$$\mathbb{B}=3K$$

Luego

$$\frac{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (II)}}}{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (I)}}}\times 100\%=\frac{3\mathbb{A}}{20\mathbb{B}}\times 100\%$$

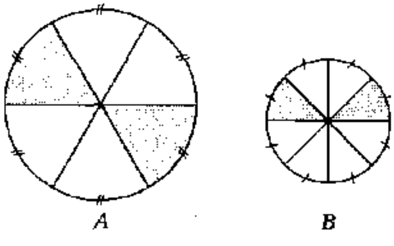
$$\frac{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (II)}}}{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (I)}}}\times 100\%=\frac{3(10K)}{20(3K)}\times 100\%$$

$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (II)}}}{\mathbb{A}_{\text{R. som. de (I)}}}\times 100\%=50\%$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

En los dos círculos mostrados, el círculo *A* tiene el triple de área que el círculo *B*.



¿Qué tanto por ciento más es el área de la región sombreada de *A* respecto de la no sombreada de *B*?

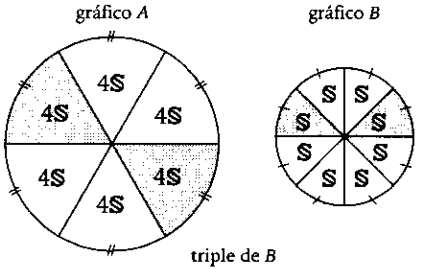
A) 30%
B) 33%
C) 42%
D) $33,\widehat{3}\%$
E) $35,\widehat{2}\%$

Resolución

Se pide el tanto por ciento más que es el área somb. de A respecto de la no sombreada de B

Dato: $\mathbb{A}_{\odot A}=3\mathbb{A}_{\odot B}$

En los gráficos, asignamos valores a las regiones comenzando en B



triple de B (dato)

$\mathbb{A}_{\text{total}}=24\mathbb{S}$ $\quad$ $\mathbb{A}_{\text{total}}=8\mathbb{S}$

$\mathbb{A}_{\text{somb}\,\odot}=8\mathbb{S}$ $\quad$ $\mathbb{A}_{\text{no somb}\,\odot}=6\mathbb{S}$

$2\mathbb{S}$ más que el área no sombreada de B

$$\therefore\ \frac{2\mathbb{S}}{6\mathbb{S}}\times 100\%=33,\hat{3}\%$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

Luis compró un lote de artículos cuyo precio de lista era S/.3000 con una rebaja del 20% del precio de compra. Luego vendió todos los artículos de la siguiente forma: vendió el 20% ganando S/.5 por artículo, vendió el 30% perdiendo S/.2 por artículo y finalmente vendió lo restante ganando S/.4 por artículo. Si como producto final de esta venta Luis ganó S/.720, ¿a qué precio compró cada artículo?

A) S/.8 $\quad$ B) S/.10 $\quad$ C) S/.3
D) S/.20 $\quad$ E) S/.25

Resolución

Se pide el precio de compra por artículo (P).
Sea cantidad de artículos del lote: $100K$.

Dato: ganancia por venta es S/.720.

Calculamos la ganancia a partir de la forma como se realizó la venta de los artículos, es decir:

- En el 20% gana S/.5 → $+20K(5)$ +
- En el 30% pierde S/.2 → $-30K(2)$
- En el resto gana S/.4 → $\underline{+50K(4)}$

Ganancia total: $240K=720$ (dato)

$K=3$

→ Cantidad de artículos del lote=300

Finalmente

$$P=\frac{P_{\text{compra}}}{\text{N.° artículos del lote}}=\frac{\overset{\text{le rebajan 20\%}}{80\%}(\text{S/.}30\cancel{00})}{3\cancel{00}}$$

$\therefore\ P=$S/.8

Clave **A**

PROBLEMA N.° 36

Una persona compró dos televisores. El primero a S/.250 y el segundo a S/.350. Si decidió venderlos a S/.280 y S/.290 respectivamente, calcule si ganó o perdió y en qué tanto por ciento.

A) perdió 6%
B) perdió 5%
C) perdió 4%
D) ganó 3%
E) ganó 5%

Resolución

Se pide el tanto por ciento de ganancia o pérdida en la venta (V_P).

Ordenamos los datos en una tabla de la siguiente manera:

	P_{compra}(S/.)	P_{venta}(S/.)
1.^{er} televisor	250	280
2.^{o} televisor	350	290
TOTAL	600	570

pierde 30

$$V_P(\text{venta}) = \frac{30}{600} \times 100\% = 5\%$$

Por lo tanto, perdió 5%.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 37

En la venta de un reloj, gané tanto como rebajé, que es el 20% de lo que me costó. ¿Cuánto pensaba ganar sin rebajar, si me costó S/.60 más de lo que gané?

A) S/.30
B) S/.50
C) S/.40
D) S/.42
E) S/.36

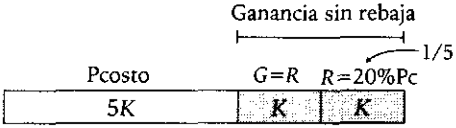
Resolución

Se pide la ganancia que pensó obtener sin haber rebaja.

Datos:

- Ganancia final=Rebaja=20% P_{costo}
- P_{costo} es S/.60 más de lo que gané.

Graficamos según los datos, así:



Se sabe que:

$$P_C - G = 60$$
$$5K - K = 60$$
$$4K = 60$$
$$K = 15$$

Por lo tanto, la ganancia sin rebaja es

$$2K = \text{S/.}30$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 38

Juana tiene 210 limones, los cuales piensa vender 7 por S/.5; Florencia tiene la misma cantidad de limones, los cuales piensa vender 3 por S/.2. Un comisionista les propone que le den ambas todos sus limones para que los venda 3 por S/.2,5 y le paguen a él, como comisión, el 20% de la venta. Como ellas no dominan las matemáticas, aceptan. Ganan o pierden entre las dos y cuánto.

A) ganan S/.10
B) pierden S/.10
C) ganan S/.30
D) pierden S/.30

Resolución

Se pide: cuántos soles ganan o pierden.

De los datos, realizamos las siguientes tablas:

- Si ellas hubieran vendido los limones.

	Cantidad	Precio unitario	Ingreso (S/.)
Juana	210 ×	$\frac{5}{7}$ =	150
Florencia	210 ×	$\frac{2}{3}$ =	140
		Total	**290**

- Cuando el comisionista vende los limones.

	Cantidad	Precio unitario	Ingreso (S/.)
Comisionista	420	$\frac{2{,}5}{3}$	**350**

Como el comisionista cobra una comisión del 20% del ingreso por venta, entonces ellas reciben

80%(350)=S/.280

(S/.10 menos que en la venta de ellas)

Por lo tanto, pierden S/.10.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 39

A encarga vender un objeto a *B* y éste, a su vez, a *C*, quien hace la venta y se queda con un 20 por mil; *B* recibe el resto, pero retiene el 10 por doscientos de lo que le dio *C* y entrega el saldo de 1862 soles a *A*. ¿En cuánto se vendió el objeto?

A) S/.1900
B) S/.2200
C) S/.1980
D) S/.2000
E) S/.2020

Resolución

Se pide el precio de venta del objeto (100*K*).

Dato: *A* recibe el saldo de 1862 soles.

Se sabe que cada uno de los intermediarios (*B* y *C*) se van quedando con un tanto por cuanto de lo que reciben, de donde:

- Si *C* se queda con $\frac{20}{1000}$

$$\rightarrow \text{ entrega } \frac{980}{1000}$$

- Si *B* se queda con $\frac{10}{200}$

$$\rightarrow \text{ entrega } \frac{190}{200}$$

Luego *A* recibe

$$\frac{19\cancel{0}}{20\cancel{0}}\times\left(\frac{98\cancel{0}}{1\cancel{000}}\times 1\cancel{00}K\right)=1862$$

$$\rightarrow K=20$$

$$P_{\text{venta}}=100K$$

$$\therefore\ P_{\text{venta}}=\text{S/.}2000$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 40

Se va a rifar un VHS cuyo costo ha sido S/.5040, para lo cual se va a imprimir 300 boletos, de los cuales se piensa vender solo el 80%. ¿A cómo se debe vender cada boleto, si se piensa obtener una ganancia que sea igual al 30% del monto que se recaudaría?

A) S/.20
B) S/.25
C) S/.28
D) S/.30
E) S/.32

Resolución

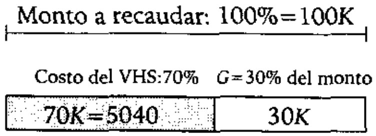
Se pide:

precio de venta por boleto (P).

Datos:

- N.° de boletos impresos: 300.
- Costo del VHS: 5040 soles.

Graficamos según los datos de la siguiente manera:



$\rightarrow K=72$

Finalmente

$$P=\frac{\text{Monto a recaudar}}{\text{N.° de boletos vendidos}}$$

$$P=\frac{100K}{80\%(300)}$$

$$P=\frac{10\cancel{0}(72)}{\frac{8\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}}\times 3\cancel{0}\cancel{0}}$$

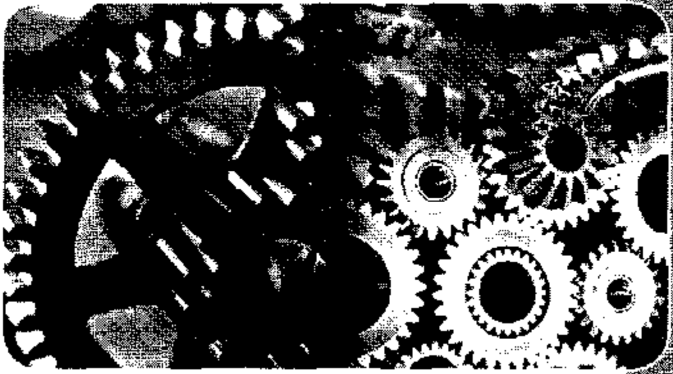
$\therefore\ P=S/.30$

Clave **D**

Capítulo

11

Comparación de magnitudes



Al escuchar la palabra magnitud, es seguro que, de forma casi inmediata, la relacionemos con el concepto de medición o la acción de medir a partir de un patrón de medida. Este es el punto de partida en el desarrollo del presente tema: Conocer qué es una magnitud y dónde las encontramos; además, comparar dos o más magnitudes y los resultados producto de esa comparación. Asimismo, diferenciaremos entre una comparación simple y otra múltiple; también reconoceremos si dos magnitudes están relacionadas de manera directa o inversa, según sus variaciones resultantes.

El uso de reglas prácticas en la comparación múltiple, que faciliten el proceso de resolución, así como el reconocimiento en forma acertada de los tipos de magnitudes por medir y por comparar, se garantizará a partir de la práctica en la resolución de problemas.

Capítulo 11

Comparación de magnitudes

PROBLEMA N.° 1

A una fiesta acudieron 518 personas, se sabe que por cada 6 hombres hay 8 mujeres. ¿Cuántas mujeres había en total en dicha fiesta?

A) 320
B) 252
C) 296
D) 410
E) 224

Resolución

Se pide el número de mujeres en la fiesta (x).

Dato: por cada 6 hombres hay 8 mujeres.

Del dato, comparemos el n.° de mujeres con el total, es decir:

	N.° de hombres		N.° de mujeres $\xrightarrow{DP}$	Total
Por cada	6	hay	8	14
			x	518

De donde

$$x=\frac{8(518)}{14}$$

$\therefore\ x=296$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 2

Una máquina A puede terminar una obra en 30 horas, mientras otra máquina B lo haría en 35 horas. Si A trabaja solo 18 horas y se malogra, debiendo culminar B el resto de la obra, ¿cuántas horas necesitará B?

A) 14 h
B) 12 h
C) 16 h
D) 22 h
E) 10 h

Resolución

Se pide el número de horas que necesita la máquina B para culminar la obra iniciada por A.

Datos:

- La máquina A termina la obra en 30 h.
- La máquina B termina la obra en 35 h.

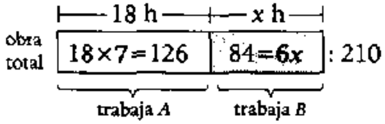
Se le puede asignar un valor conveniente a la obra, con el MCM(30 y 35)=210.

De donde en 1 hora hacen de la obra

$$A=\frac{1}{30}(210)=7$$

$$B=\frac{1}{35}(210)=6$$

Luego



Del gráfico:

$6x=84$

$\therefore\ x=14$ h

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Para pintar las caras de un cubo de 60 cm de arista, se ha empleado 12 tarros de pintura. ¿Cuántos tarros de pintura se necesitará para pintar las caras de un cubo de 90 cm de arista?

A) 18 B) 32 C) 27
D) 25 E) 30

Resolución

Se pide el número de tarros de pintura para pintar las caras de un cubo de 90 cm de arista: (x).

Dato: con 12 tarros ha pintado las caras de un cubo de 60 cm de arista.

Comparando las magnitudes número de tarros con superficie se tiene

N.° de tarros de pintura	**DP**	**Superficie total de cubo**
12		$\cancel{6}(60)^2$
x		$\cancel{6}(90)^2$

Entonces

$$x=12\times\frac{9\cancel{0}^2}{6\cancel{0}^2}$$

$\therefore\ x=27$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 4

Un buey atado al extremo de una cuerda de 4 m de longitud tarda 12 días en comer todo el pasto alrededor suyo. ¿Cuántos días tardará en comer todo el pasto a su alrededor, si la cuerda es aumentada en 2 m?

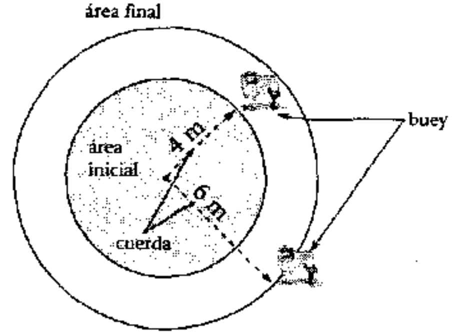
A) 23 días
B) 18 días
C) 25 días
D) 27 días
E) 30 días

Resolución

Se pide el número de días que tarda en comer el pasto un buey.

Dato: atado con una cuerda de 4 m, el buey tarda 12 días.

Graficamos la situación planteada.



De los datos, comparamos así:

N.° días	**DP**	**Superficie que come el buey**
12		$4^2\pi$
x		$6^2\pi$

Entonces

$$x=\frac{12\times6^2\cancel{\pi}}{4^2\cancel{\pi}}$$

$\therefore$ $x=27$ días

Clave **D**

PROBLEMA N.° 5

Con 5 kg de arena se pueden construir 8 cubos de 8 cm de arista. ¿Cuántos cubos de 4 cm de arista se podrían construir con 10 kg de arena?

A) 145
B) 128
C) 90
D) 144
E) 80

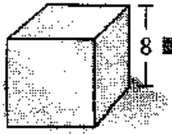
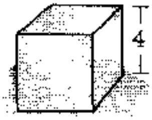
Resolución

Se pide el número de cubos de 4 cm de arista que pueden construirse con 10 kg de arena: (x).

Dato: con 5 kg de arena se construyen 8 cubos de 8 cm de arista.

Considerando que

$$\begin{tikzcd}\text{volumen total de cubos} \arrow[r, bend left, "\text{DP}"] & \text{N.° de kg. de arena}\end{tikzcd}$$

		volumen total de cubos	**N.° de kg. de arena**
	8 ➡ $V=8^3$	$8(8^3)$	5
	4 ➡ $V=4^3$	$x(4^3)$	10

Entonces

$$x(4^3)=8\times8^3\times\frac{\cancel{10}^2}{\cancel{5}}$$

$$x=8\times\left(\frac{8}{4}\right)^3\times2$$

$\therefore$ $x=128$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

Cuatro amigos pueden terminar una obra en 18 días. Si después de tres días llega un amigo más, ¿cuántos días antes terminarán la obra?

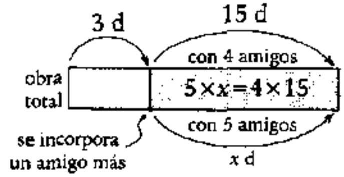
A) 3
B) 5
C) 4
D) 2
E) 1

Resolución

Se pide la cantidad de días en que anticipadamente terminan la obra.

Graficamos la obra a realizar como un rectángulo y consideramos que:

$$\boxed{\text{Obra total}=\text{n.° de amigos}\cdot\text{n.° de días}}$$



Del gráfico:

$$x=\frac{4\times1\cancel{5}}{\cancel{5}}=12\ \text{días}$$

Por lo tanto, terminan 3 días antes.

Clave **A**

PROBLEMA N.º 7

Una persona, para pintar las caras de un cubo, tarda 30 minutos. ¿Cuánto tardará otra persona, cuya rapidez es el triple de la anterior, en pintar otro cubo cuyo volumen es 8 veces el volumen del cubo anterior?

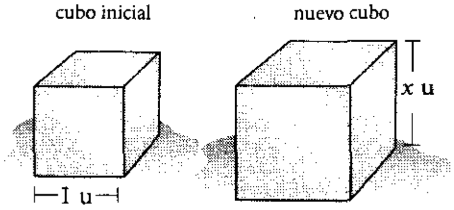
A) 24 min B) 32 min C) 42 min
D) 40 min E) 52 min

Resolución

Se pide el tiempo que tarda otra persona que es el triple de rápida.

Dato: el volumen del nuevo cubo es 8 veces el volumen del cubo inicial.

Del dato:



$V_{\text{cubo}}=1^3$ $\quad V_{\substack{\text{nuevo}\\ \text{cubo}}}=8(1^3)=x^3$ ← volumen anterior

$\rightarrow\ x=2$

La obra consiste en pintar la caras del cubo, entonces, la obra será: superficie del cubo (área).

Además de incluir la magnitud rapidez.

$$\begin{tikzcd} & \text{tiempo} \arrow[r, bend left, "DP"] \arrow[rr, bend left=50, "IP"] & \text{obra} & \text{rapidez} \\ \text{cubo inicial:} & 30 & 1^2 & 1 \\ \text{nuevo cubo:} & x & 2^2 & 3 \end{tikzcd}$$

De la regla práctica

$$x=30\times\overset{\substack{DP\\ \downarrow}}{\frac{2^2}{1^2}}\times\overset{\substack{IP\\ \downarrow}}{\frac{1}{3}}$$

$\therefore\ x=40$ min

Regla práctica

DP	→	*Ponlo Diferente*: se cambia el orden de los valores.
IP	→	*Ponlo Igual*: se mantiene el orden de los valores.

Clave **D**

PROBLEMA N.º 8

Se disuelve 210 gramos de azúcar en 60 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua deberán añadirse a esta mezcla para que por cada 2 litros de ella se tenga 5 gramos de azúcar?

A) 48 litros B) 38 litros C) 24 litros
D) 18 litros E) 32 litros

Resolución

Se pide la cantidad de agua a añadir (x).

Dato: por cada 2 litros de mezcla habrá 5 g de azúcar.

	N.º de litros	DP →	Gramos de azúcar
Por cada	2	debe haber	5
	$60+x$		210

De donde

$$60+x=\frac{2\times 210}{5}$$

$\therefore\ x=24$ L

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

Si 40 litros de agua salada tienen $3\frac{1}{2}$ kg de sal, ¿qué cantidad de agua debe dejarse evaporar para que 24 litros de la nueva mezcla contengan 3 kg de sal?

- A) 12 litros
- B) 10 litros
- C) 13 litros
- D) 8 litros
- E) 6 litros

Resolución

Se pide la cantidad de agua que debe evaporarse (x).

Dato: 40 litros de agua salada tienen $3\frac{1}{2}$ kg de sal.

Del dato, se debe comparar el n.° de litros de la mezcla con los kg de sal, es decir

	N.° de litros	DP	kg de sal
Se quiere	24		3
	$40-x$		3 1/2

De donde

$$40-x=\frac{24\times 3\frac{1}{2}}{3}$$

$\therefore\ x=12$ L

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

Un lechero ha comprado 48 litros de leche a S/.2 el litro. Si desea ganar S/.48 vendiendo a S/.2,4 el litro, ¿cuántos litros de agua debe adicionar a la leche?

- A) 10 litros
- B) 11 litros
- C) 16 litros
- D) 12 litros
- E) 8 litros

Resolución

Se pide la cantidad de litros de agua que se debe adicionar (x).

Dato: se han comprado 48 litros de leche a S/.2 el litro.

Debemos recordar la expresión que relaciona el P_{costo}, la ganancia y P_{venta}:

$$\boxed{P_{\text{venta}}=P_{\text{costo}}+\text{Ganancia}}$$

Lo aplicamos de la siguiente manera

$$\overset{P_{\text{venta}}}{\underbrace{(2,4)}_{\substack{\text{Precio}\\\text{por}\\\text{litro}}}\underbrace{(48+x)}_{\substack{\text{N.° de}\\\text{litros}}}}=\overset{P_{\text{costo}}}{48(2)}+\overset{\text{Gan.}}{48}$$

$\therefore\ x=12$ L

Clave **D**

PROBLEMA N.° 11

El sueldo de un obrero es proporcional al cuadrado de la edad que tiene. Si actualmente tiene 18 años, ¿dentro de cuántos años cuadruplicará su sueldo?

A) 10 años
B) 12 años
C) 20 años
D) 18 años
E) 22 años

Resolución

Se pide la cantidad de años que deben pasar para cuadruplicar su sueldo (x).

Dato: el sueldo es proporcional al cuadrado de la edad.

Del dato:

$$\boxed{\frac{\text{sueldo}}{\text{edad}^2}=\text{cte.}}$$

Sea el sueldo: S, se tiene

$$\overbrace{\frac{\cancel{S}}{18^2}}^{\text{actualmente}}=\overbrace{\frac{4\cancel{S}}{(18+x)^2}}^{\text{dentro de } x \text{ años}}$$

$$(18+x)^2=18^2\times 4=18^2\times 2^2$$

$$\underbrace{(18+x)^2=(18\cdot 2)^2}_{\text{iguales}} \ (x \text{ es positivo})$$

$\therefore\ x=18$ años

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

Se sabe que
A es DP a B (cuando C es constante)
B es IP a C (cuando A es constante)
Cuando $A=3$, $B=6$ y $C=7$, ¿cuánto vale B, si $A=8$ y $C=1$?

A) 10
B) 112
C) 6
D) 98
E) 150

Resolución

Se pide el valor de B.
Del dato:

$$\begin{matrix} A \text{ DP } B \\ B \text{ IP } C \end{matrix} \rightarrow \boxed{\frac{A}{B\times C}=\text{cte.}}$$

Luego, para los valores dados se tiene:

$$\frac{\cancel{3}}{\underset{2}{\cancel{6}}\times 7}=\frac{8}{B\times 1}$$

$\therefore\ B=112$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 13

En un edificio, el volumen de agua que se lleva a un cierto piso es IP a T^n, donde T es el tiempo que demora en llegar el agua al piso n. Si cuando se lleva 80 litros al segundo piso la demora es de 4 minutos, ¿qué tiempo demorarán en llegar 5 litros al octavo piso?

A) 4 min
B) 3 min
C) 5 min
D) 2,5 min
E) 2 min

Resolución

Se pide el tiempo que demorarán en llegar 5 litros al octavo piso (t).

Dato:

Demora 4 min en llevar 80 litros al segundo piso.

Se sabe, además, que

V_{agua} IP T^n; T^n: tiempo que demoran en llevar agua al piso n.

$$\rightarrow \boxed{(V_{\text{agua}})\times(T^n)=\text{cte.}}$$

Luego, del dato:

$$\cancel{80}\times 4^2=\cancel{5}\times t^8=\text{cte.}$$

$$16\times 4^2=t^8$$

$$2^4\times(2^2)^2=t^8$$

$$2^8=t^8$$

$\therefore\ t=2$ min.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 14

Los goles que marca un equipo en un partido de fútbol son de una cantidad directamente proporcional al número de goles que marcó en el partido anterior más uno. Si en el primer partido marcó 1 gol y en el segundo 2 goles, determine cuántos marcó hasta el quinto partido (inclusive).

A) 15
B) 18
C) 20
D) 13
E) 12

Resolución

Se pide el número de goles marcados hasta el quinto partido (inclusive).

Dato: en el 1.$^{\text{er}}$ partido marcó un gol; y en el 2.°, dos goles.

Se sabe, además, que:

$$\left(\begin{array}{c}\text{N.° de goles}\\ \text{que marca}\\ \text{en un partido}\end{array}\right)\text{DP}\left(\begin{array}{c}\text{N.° de goles que}\\ \text{marcó en el}\\ \text{partido anterior}\end{array}+1\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\dfrac{\begin{array}{c}\text{N.° de goles que marca}\\ \text{en un partido}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{N.° de goles que marcó}\\ \text{en el partido anterior}\end{array}+1}=K}$$

K: cte.

Del dato, hallamos la constante

$$\frac{\text{N.° goles en el 2.° partido}}{\text{N.° goles en el 1.}^{\text{er}}\text{ partido}+1}=\frac{2}{1+1}=K$$

$$\rightarrow K=1$$

De donde se concluye que

$$\begin{array}{c}\text{N.° de goles}\\ \text{que marca en}\\ \text{un partido}\end{array}=\begin{array}{c}\text{N.° de goles}\\ \text{que marcó en el}\\ \text{partido anterior}\end{array}+1$$

Luego

N.° de partido	1.$^{\text{er}}$ part.	2.° part.	3.$^{\text{er}}$ part.	4.° part.	5.° part.
N.° de goles	1	2	3	4	5

$$\text{N.° total de goles}=1+2+3+4+5$$

$$\text{N.° total de goles}=\frac{5(6)}{2}$$

Por lo tanto, el número total de goles es 15.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

El precio de un sólido varía en forma directamente proporcional a su superficie. Un cubo de S/.90 es seccionado por un plano paralelo a una cara en 2 volúmenes que son entre sí como 2 es a 1. ¿Cómo varía su precio?

A) aumenta en S/.30
B) aumenta en S/.20
C) disminuye en S/.30
D) disminuye en S/.20
E) aumenta en S/.25

Resolución

Se pide la variación del precio de un sólido (cubo) al seccionarlo.

Datos:

- El cubo es seccionado en dos partes cuyos volúmenes son de 2 a 1.
- Costo del cubo: S/.90.

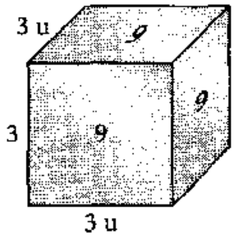
Se sabe, además, que

$$\begin{pmatrix}\text{Precio del}\\ \text{sólido}\end{pmatrix} \textbf{DP} \begin{pmatrix}\text{Superfice del}\\ \text{sólido}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\text{Precio}(P)}{\text{Superficie}(S)}=K} \qquad K\text{: cte.} \qquad \text{(I)}$$

Del dato, al seccionar el cubo con un plano paralelo a una de sus caras, se tiene lo siguiente.

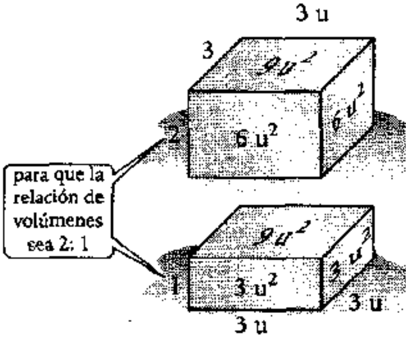
cubo entero



$S_{\text{cubo}}=2(9+9+9)=54$ u^2

$P=90$ soles

cubo seccionado



$V_1=2\times3\times3=18$ u^3

$S_1=2(9+6+6)=42$ u^2

$P_1=?$

$V_2=3\times3\times1=9$ u^3

$S_2=2(9+3+3)=30$ u^2

$P_2=?$

De (I):

$$\frac{90}{54}=K \quad \rightarrow \quad K=\frac{5}{3}$$

Entonces

$$\frac{P_1}{42}=\frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad P_1=70$$

$$\frac{P_2}{30}=\frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad P_2=50$$

$P_1+P_2=120$ soles

Al compararlo con el precio del cubo (S/.90)

$$\underset{\text{seccionado}}{\overset{\text{cubo}}{}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! \quad 120 - 90 = \text{S/.}30$$

Por lo tanto, el precio aumenta en S/.30.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 16

La rapidez de Juan es el doble de la de Julio, pero a la vez es la tercera parte de la de Miguel. Si Julio y Miguel hacen una obra en 27 días, ¿en cuántos días harán la misma obra los 3 juntos?

A) 20
B) 18
C) 16
D) 21
E) 23

Resolución

Se pide el número de días que demoran en hacer la obra los 3 juntos.

Dato: Julio y Miguel hacen la obra en 27 días.

Se sabe que la rapidez de los tres es

$$\frac{\text{Juan}}{2a}=\frac{\text{Julio}}{a}=\frac{\text{Miguel}}{6a}$$

Entonces, en un día

- $\text{Obra}_{\text{Juan}}=2a$
- $\text{Obra}_{\text{Julio}}=a$
- $\text{Obra}_{\text{Miguel}}=6a$

Luego, de los datos:

- Miguel y Julio tardan 27 días en hacer toda la obra.

$$\times 27\left(\begin{array}{ccc} \textbf{Obra} & & \textbf{Tiempo} \\ 7a & \longrightarrow & 1 \text{ día} \\ x & \longrightarrow & 27 \text{ días} \end{array}\right)\times 27$$

$\rightarrow \quad x=27\cdot 7a=189a$ (obra total)

- Los 3 amigos juntos harán la obra total.

$$\times 21\left(\begin{array}{ccc} \textbf{Obra} & & \textbf{Tiempo} \\ 9a & \longrightarrow & 1 \text{ día} \\ 189a & \longrightarrow & y \text{ días} \end{array}\right)\times 21$$

$\therefore \quad y=21$ días.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 17

Luis siembra nabos con mayor rapidez que José y sus rendimientos están en la proporción de 4 a 3. Cuando José siembra n nabos en una hora, Luis siembra $(n+2)$ nabos. ¿Cuántos nabos siembra Luis en 5 horas?

A) 60
B) 45
C) 38
D) 50
E) 40

Resolución

Se pide el número de nabos sembrados por Luis en 5 horas.

Dato: la relación de rendimiento de Luis y José es de 4 a 3.

Según el problema, se tiene

DP

	N.° de nabos	Rendimiento	Tiempo (h)
José	n	3	1 día
Luis	$n+2$	4	1 día

permanece constante

De forma práctica

$$n+2=n\times\frac{4}{3}$$

$$3n+6=4n$$

$$\rightarrow\ n=6\ \text{(nabos)}$$

Luego

DP

	N.° de nabos	Tiempo (h)	Rendimiento
Luis	$n+2=8$	1	4
	x	5	4

cte.

$$\therefore\ \ x=8\times\frac{5}{1}=40$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 18

Antonio y Jorge son dos carpinteros que deben hacer un escritorio cada uno. Antonio dice que él puede terminar su trabajo en 18 horas, mientras que Jorge lo haría en 21 horas. Si después de 12 horas de trabajo Antonio cae gravemente enfermo y debe dejar de trabajar, ¿cuántas horas adicionales deberá trabajar Jorge para terminar los 2 escritorios?

A) 7 h
B) 6,5 h
C) 8 h
D) 12 h
E) 9 h

Resolución

Se pide el número de horas adicionales que debe trabajar Jorge para terminar los dos escritorios.

Datos:

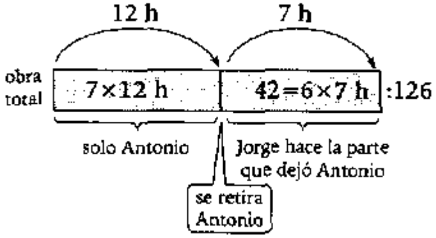
Antonio hará todo en 18 h.

Jorge haría todo en 21 h.

Según los datos:

	N.° horas	IP	Obra/día		Obra total
Antonio	$_6\cancel{18}$ h	×	$7a$	=	126
Jorge	$_7\cancel{21}$ h	×	$6a$	=	126

Luego, para calcular lo pedido graficamos



Por lo tanto, Jorge trabajará 7 h adicionales.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 19

Paola e Irma han hecho un trabajo juntas. Trabajando solas, se habrían demorado 2 y 8 horas más (respectivamente) de lo que se demoraron juntas. ¿Cuánto duró el trabajo?

A) 5 h
B) 2 h
C) 3 h
D) 2,5 h
E) 4 h

Resolución

Se pide la duración del trabajo realizado juntas (x h).

Datos:

Paola, trabajando sola, demora: $(x+2)$ h.
Irma, trabajando sola, demora: $(x+8)$ h.

Según los datos del problema, aquí se debe cumplir que:

$$\begin{pmatrix}\text{Obra de Paola}\\ \text{en 1 hora}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Obra de Irma}\\ \text{en 1 hora}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Obra de ambas}\\ \text{en 1 hora}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+8}=\frac{1}{x}$$

(reducción a la unidad)

$$\frac{x+8+x+2}{(x+2)(x+8)}=\frac{1}{x}$$

$$x(2x+10)=(x+2)(x+8)$$

$$2x^2+\cancel{10x}=x^2+\cancel{10x}+16$$

$$x^2=16$$

$\therefore\ x=4$ h

Clave E

PROBLEMA N.° 20

Un hombre y dos mujeres pueden hacer un trabajo en 10 horas. Dos hombres y una mujer pueden hacer el mismo trabajo en 8 horas. ¿Cuántos hombres deberán trabajar junto a 4 mujeres para realizar el mismo trabajo en 4 horas?

A) 5
B) 6
C) 3
D) 4
E) 2

Resolución

Se pide el número de hombres que deben trabajar con 4 mujeres.

De los datos, vamos a comparar las magnitudes **Número de personas** con **Tiempo** de la siguiente manera:

N.° de personas	IP	Tiempo (horas)	
$H+2M$		10	(I)
$2H+M$		8	(II)
$xH+4M$		4	(III)

De (I) y (II):

$$\overset{5}{\cancel{10}}(H+2M)=\overset{4}{\cancel{8}}(2H+M)$$

$$5H+10M=8H+4M$$

$$6M=3H$$

$$2M=H$$

Como queremos hallar la cantidad de hombres, reemplazamos a las mujeres en (I) y (III).

IP

	N.° de personas	**Tiempo**
de (I)	$2H$	10
de (III)	$(x+2)H$	4

$\rightarrow\ \cancel{10}\cancel{(2)}=\cancel{4}(x+2)$

$5=x+2$

$\therefore\ x=3$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 21

Quince hombres y 10 mujeres pueden cosechar 20 hectáreas de trigo en 40 días, después de 10 días de trabajo se retiran 5 hombres y 5 mujeres. ¿Con cuántos días de retraso se terminará la cosecha, si en un mismo tiempo un hombre realiza el doble de lo que realiza una mujer?

A) 26
B) 16
C) 18
D) 12
E) 28

Resolución

Se pide la cantidad de días de retraso en que se termina la cosecha.

Dato: en un mismo tiempo un hombre realiza el doble de lo que realiza una mujer.

Sea para un mismo tiempo:

a : lo que realiza una mujer
$2a$: lo que realiza un hombre

IP
DP

Trabajo por persona		**Obra (hect.)**	**Tiempo (días)**
$15H+10M$ <>	$40a$	20	40
Se retiran $5H+5M$ <>	$15a$		
Quedan	$25a$	15	x

trabajaron 10 días <> 1/4 del total, quedan 3/4 por hacer

$$x=40\times\frac{15}{\underset{1}{\cancel{20}}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{40}}\,\cancel{a}}{25\cancel{a}}$$

$x=48$

En 48 días terminan el resto, que se terminaría en 30 días si no se retiraran.

$\therefore$ 48−30=18 días de retraso.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

El precio de un ladrillo es proporcional a su peso; e IP a su volumen. Un ladrillo de densidad 1,5 g/cm^3 cuesta S/.300. ¿Cuánto costará un ladrillo de 400 cm^3 que pesa 1,6 kg?

A) S/.600
B) S/.850
C) S/.700
D) S/.720
E) S/.800

Resolución

Se pide el costo del ladrillo P_C.

Dato:

precio DP peso

Además

precio IP volumen

Según el dato:

$$\boxed{\frac{(\text{precio})\cdot(\text{volumen})}{\text{peso}}=K} \qquad K\text{: cte.}$$

Entonces

$$\frac{(300)}{1,5\text{ g}}=\frac{P_C(400)}{1600\text{ g}}$$

$$200=\frac{P_C(400)}{1600\text{ g}}$$

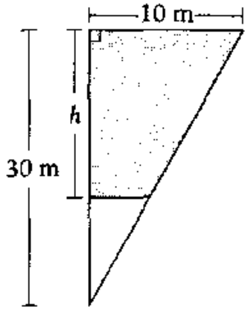
$$P_C=\frac{200(1600)}{400}$$

$\therefore$ P_C=S/.800

Clave E

PROBLEMA N.° 23

Se desea pintar una superficie de la forma que se muestra en el gráfico; empezando por la parte superior, avanzando paralelamente a la horizontal. Se sabe que 10 hombres durante 6 días trabajando 5 h/d logran pintar la totalidad de la superficie. Halle la distancia *h*, siendo esta el límite de la zona que pudieron pintar 12 hombres durante 4 días a razón de 6 h/d.

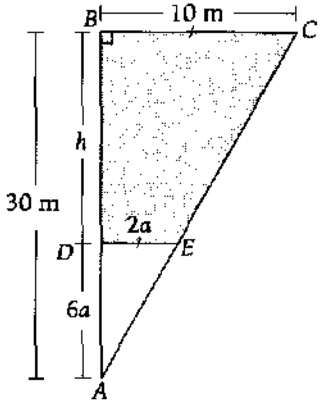


A) 20 m B) 22 m C) 24 m
D) 26 m E) 28 m

Resolución

Se pide el valor de *h*.

En el gráfico:



$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

Entonces

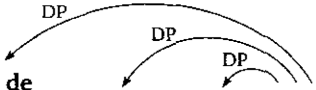
$DE=2a;\ AD=6a$

Luego

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=\frac{30(10)}{2}-\frac{2a(6a)}{2}$$

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=150-6a^2$$

Ahora, realicemos la comparación múltiple según los datos del problema, es decir



n.° de hombres	tiempo (d)	h/d	obra	
10	6	5	150	$(\mathbb{A}_{total})$
12	4	6	$150-6a^2$	$\left(\mathbb{A}_{\substack{reg.\\somb.}}\right)$

De donde

$$150-6a^2=\overset{3}{\cancel{150}}\times\frac{12}{\cancel{10}}\times\frac{4}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}$$

$$150-6a^2=144$$

$$6a^2=6$$

$$a=1$$

$$\therefore\ h=30-6a=24m$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

El trabajo que hace un operario en 7 días lo hace un segundo operario en 6 días. Lo que hace este en 9 días, lo hace un tercero en 8 días y lo que hace este en 12 días lo hace un cuarto en 14 días. Si el primer operario tarda 36 días en hacer una obra, ¿cuánto tardará el cuarto operario?

A) 40 días B) 52 días C) 32 días
D) 46 días E) 38 días

Resolución

Se pide el tiempo que tarda el cuarto operario.

De los datos se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1.^{er}\text{operario}}{2.^{o}\text{operario}}=\dfrac{7}{6}\\ \dfrac{2.^{o}\text{operario}}{3.^{er}\text{operario}}=\dfrac{9}{8}\\ \dfrac{3.^{er}\text{operario}}{4.^{o}\text{operario}}=\dfrac{12}{14}\end{array}\right\}\text{Multiplicando m.a.m}$$

$$\frac{1.^{er}\text{ operario}}{2.^{o}\text{ }\cancel{\text{operario}}}\times\frac{2.^{o}\text{ }\cancel{\text{operario}}}{3.^{er}\text{ }\cancel{\text{operario}}}\times\frac{3.^{er}\text{ }\cancel{\text{operario}}}{4.^{o}\text{ operario}}$$

$$=\frac{7}{6}\times\frac{9}{8}\times\frac{12}{14}$$

$$\frac{1.^{er}\text{operario}}{4.^{o}\text{ operario}}=\frac{9}{8}$$

Luego, reemplazamos el dato del 1.^{er} operario

$$\frac{\overset{4}{\cancel{36}}\text{ días}}{4.^{o}\text{operario}}=\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{8}$$

$$\therefore\ 4.^{o}\text{ operario}=32\text{ días}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

Una rueda *A* de 80 dientes engrana con otra rueda *B* de 50 dientes. Fijo al eje de la rueda *B*, hay otra rueda *C* de 15 dientes que engrana con una rueda *D* de 25 dientes. Si la rueda *A* da 125 vueltas por minuto, calcule la diferencia de vueltas de la rueda *B* y *D*, luego de 30 segundos.

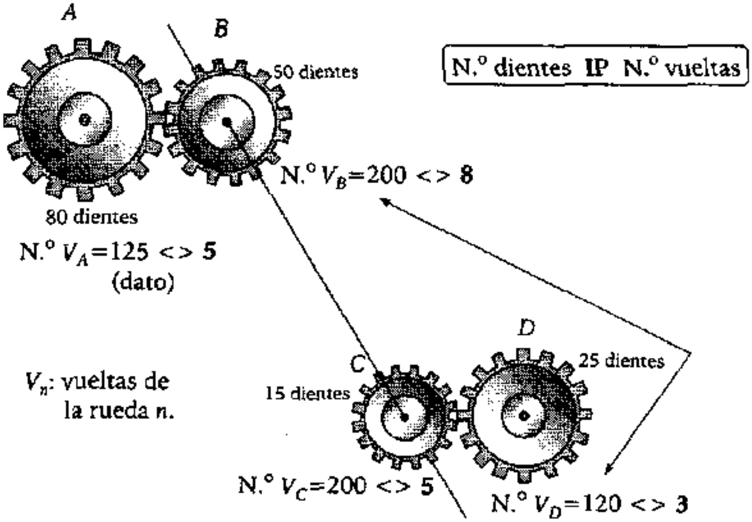
A) 35 B) 42 C) 52
D) 38 E) 40

Resolución

Se pide la diferencia de vueltas de la rueda *B* y *D* luego de 30 segundos.

De los datos, graficamos:

En 1 minuto <> 60 s



Del gráfico:

En 60 s: $V_B-V_D=80$

En 30 s: $V_B-V_D=40$

Por lo tanto, luego de 30 s hay una diferencia de 40 vueltas.

Clave B

PROBLEMA N.° 26

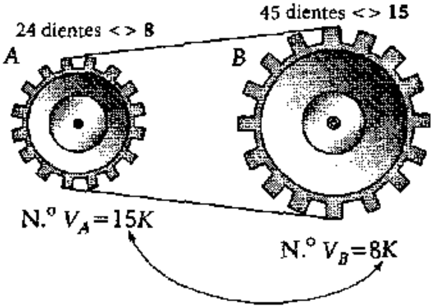
Dos engranajes de 24 y 45 dientes están unidos por una cadena (tipo faja). Cuando funcionan 4 minutos, uno ha dado 70 vueltas más que el otro. ¿Cuál es la rapidez del engranaje pequeño en rpm?

A) 37,5 rpm B) 42 rpm C) 28 rpm D) 32,5 rpm E) 34 rpm

Resolución

Se pide la rapidez del engranaje pequeño en rpm.

De los datos, se tiene que:
En 4 minutos:



$15K-8K=70$

$7K=70$

$K=10$

Luego, rapidez del engranaje pequeño en rpm:

$$\frac{\text{N.° vueltas}}{\text{Tiempo}}=\frac{150}{4}=37{,}5\text{ rpm}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 27

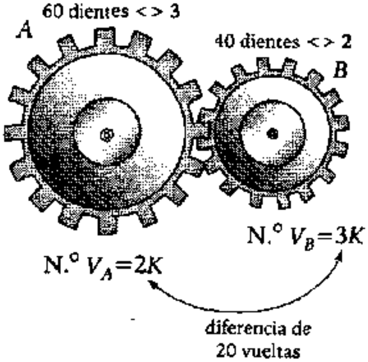
Dos ruedas de 60 y 40 dientes están engranadas; si en 4 minutos una de las ruedas da 20 vueltas más que la otra, ¿cuántas vueltas dará la rueda más grande en 10 minutos?

A) 180 B) 120 C) 92
D) 85 E) 100

Resolución

Se pide el número de vueltas que dará la rueda más grande en 10 minutos.
Dato: en 4 minutos una de las ruedas da 20 vueltas más que la otra.

Graficamos del dato: en 4 minutos



Del gráfico:

$3K-2K=20 \rightarrow K=20$

Finalmente, la rueda más grande da

En 4 min → 40 vueltas

En 2 min → 20 vueltas

∴ En 10 min: $2(40)+20=100$ vueltas

Clave **E**

PROBLEMA N.° 28

Cuatro ruedas *A*, *B*, *C* y *D* de 60, 30, 40 y 80 dientes (respectivamente) se disponen de la siguiente manera: *A* engrana con *B*, *B* está unida por un eje con *C* y esta engrana con *D*. Si la rueda *D* dio 75 vueltas en 3 minutos, ¿cuántas vueltas tuvo que dar la rueda *A* en un minuto?

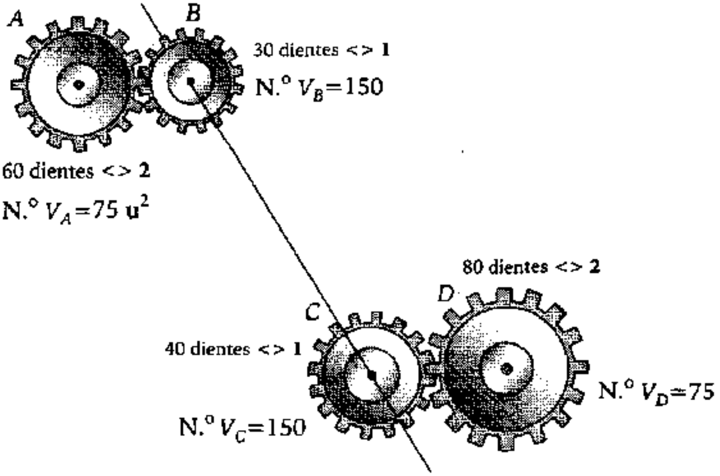
A) 25 B) 30 C) 28
D) 42 E) 18

Resolución

Se pide el número de vuelta de la rueda *A* en un minuto.

Graficamos según los datos:

En 3 minutos



Si *A*: En 3 minutos → 75 vueltas
En 1 minuto → 25 vueltas

Por lo tanto, *A* tuvo que dar 25 vueltas en 1 minuto.

Clave **A**

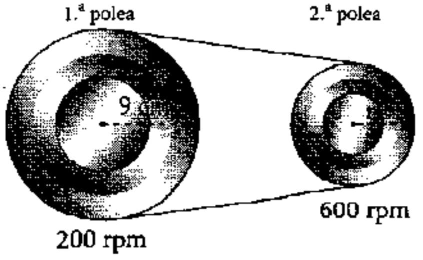
PROBLEMA N.° 29

Una polea (de 18 cm de diámetro, que gira a 200 rpm) debe conectarse a otra polea de otro eje que debe girar a 600 rpm. ¿Qué diámetro debe tener esta segunda polea?

A) 3 cm B) 6 cm C) 4 cm D) 2 cm E) 5 cm

Resolución

Se pide el diámetro de la segunda polea ($2r$).
Graficamos las poleas conectadas según los datos:



Aquí se cumple que

(radio) IP (# vueltas)

$$\underset{}{\overset{\underline{\text{1.ª polea}}}{9(2\cancel{00})}} = \overset{\underline{\text{2.ª polea}}}{r(6\cancel{00})}$$

$\rightarrow$ $r=3$

$\therefore$ diámetro$=2r=6$ cm

Clave **B**

PROBLEMA N.° 30

Un ciclista da 40 pedaleadas en cinco minutos. Calcule la velocidad angular del piñón, si el diámetro de la catalina con el diámetro del piñón están en la relación de 7 a 1.

Obs.: Asumir una pedaleada equivalente a media vuelta.

A) 30 rpm
B) 28 rpm
C) 35 rpm
D) 48 rpm
E) 32 rpm

Resolución

Se pide el número de rpm del piñón.

Datos:

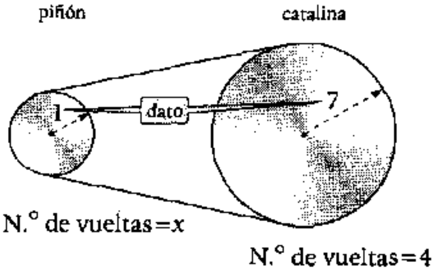
- El ciclista da 40 pedaleadas en 5 minutos.
- Una pedaleada equivale a media vuelta.

Grafiquemos la situación planteada, teniendo en cuenta que:

40 pedaleadas en 5 min

÷5

$\rightarrow$ $\underbrace{\text{8 pedaleadas}}_{\text{4 vueltas}}$ en 1 min



Luego

$x(1)=4(7)$

$\therefore\ x=28$ rpm

Clave **B**

PROBLEMA N.° 31

Un jardinero pensó sembrar 100 semillas en 20 días, pero tardó 5 días más por trabajar cada día 2,5 horas menos de lo que pensó. ¿Cuántas horas diarias trabajó?

A) 8 h/d
B) 10 h/d
C) 5 h/d
D) 9 h/d
E) 12 h/d

Resolución

Se pide la cantidad de horas diarias que trabajó.

Dato:

El jardinero tardó 5 días más por trabajar 2,5 h menos.

De los datos, solo comparamos las magnitudes N.° de días y h/d ya que la magnitud Obra permanece constante.

IP

Obras	N.° de días	h/d
100	20	x
100 (cte.)	25	$x-2{,}5$

$$\rightarrow\quad x-2{,}5=x\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}$$

$5x-12{,}5=4x$

$x=12{,}5$

$\therefore$ Trabajó $(x-2{,}5)$ h=10 h/d

Clave **B**

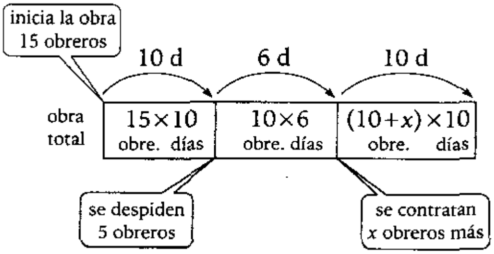
PROBLEMA N.° 32

Quince obreros pueden terminar una obra trabajando 8 horas diarias en 26 días. Al cabo de 10 días se despiden a 5 obreros, pasados 6 días más se contratan nuevos obreros. ¿Cuántos obreros se contrataron si se terminó la obra en el tiempo fijado?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 6 E) 12

Resolución

Se pide el número de obreros contratados (x). Con los datos del problema, consideremos el siguiente esquema, representando la obra por una región rectangular.



Del gráfico

$$15\times10+10\times6+(10+x)\times10=15\times26$$

(No se incluyen las 8 h/d porque permanece constante).

Resolvemos

$\therefore\ x=8$

Clave A

PROBLEMA N.° 33

Ocho obreros pueden hacer una obra en 10 días. Inician el trabajo y al final del quinto día se retiran 2 obreros. Los restantes trabajan juntos durante x días, al final de los cuales se retiran 4 obreros más. Halle x si se sabe que los obreros que quedaron terminaron la obra, y la entregaron con un atraso de 7 días.

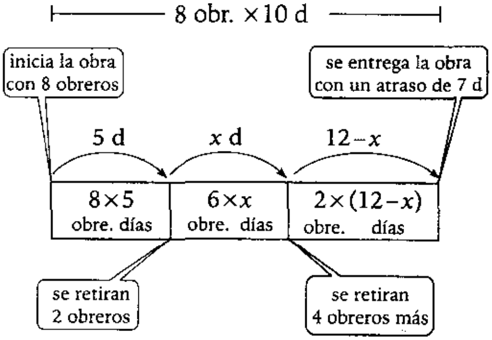
A) 5
B) 8
C) 4
D) 6
E) 10

Resolución

Se pide el valor de x.

Dato: ocho obreros pueden hacer una obra en 10 días.

Graficamos según los datos, de la siguiente manera.



del gráfico

$$8\cdot5+6\cdot x+2(12-x)=\overset{\text{obra total}}{\overbrace{8\cdot10}}$$

$$6x+24-2x=40$$

$$4x=16$$

$\therefore\ x=4$

Clave C

PROBLEMA N.° 34

Diez obreros terminan una obra en 10 días. Si después de 5 días de trabajo se retiran la mitad de los obreros, ¿en qué tiempo terminarán la obra si cada uno de los que quedan duplican su eficiencia?

A) 8 B) 12 C) 14
D) 7 E) 5

Resolución

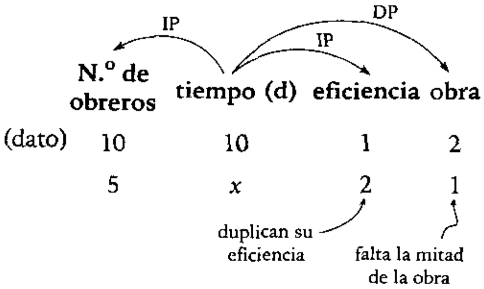
Se pide el número de días que demoran en terminar la obra: x.

Dato:

diez obreros terminan una obra en 10 días.

Según el dato: ... *después de 5 días de trabajo se retiran la mitad de los obreros,* de esto se deduce que lo que falta por hacer es la mitad de la obra.

Ahora realicemos una comparación múltiple de la siguiente forma:



	N.° de obreros	tiempo (d)	eficiencia	obra
(dato)	10	10	1	2
	5	x	2	1

De donde, con la regla práctica, tendremos:

$$x = \cancel{10}\times\frac{\cancel{10}}{\cancel{5}}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{2}}$$

∴ $x=5$ días

Clave **E**

PROBLEMA N.° 35

Si con 8 obreros se puede hacer una obra en 20 días, con 10 obreros 4 veces más rápidos que los anteriores, ¿en cuántos días harán una obra cuya dificultad es 10 veces la anterior?

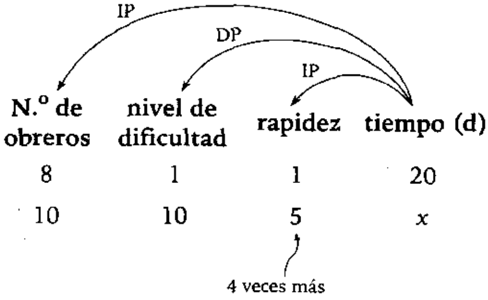
A) 40
B) 52
C) 34
D) 32
E) 39

Resolución

Se pide el número de días en que harán una obra (x).

En el problema, se mencionan varias magnitudes: el número de obreros, rapidez, nivel de dificultad, etc; lo cual nos hace pensar en realizar una comparación múltiple.

Veamos:



N.° de obreros	nivel de dificultad	rapidez	tiempo (d)
8	1	1	20
10	10	5	x

De donde

$$x = 20\times\frac{8}{\cancel{10}}\times\frac{\cancel{10}}{1}\times\frac{1}{\cancel{5}}$$

∴ $x=32$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 36

Si x hombres pueden hacer un trabajo en 8 días, ¿cuántos hombres de triple rendimiento habrá que aumentar para realizar la mitad de la obra en 2 días trabajando la mitad de horas diarias que el anterior?

A) $\frac{x}{2}$ hombres

B) $\frac{2x}{5}$ hombres

C) $\frac{x}{3}$ hombres

D) x hombres

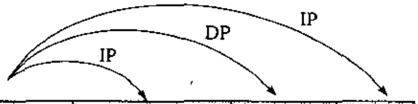
E) $\frac{2x}{3}$ hombres

Resolución

Se pide la cantidad de hombres del triple de rendimiento que se debe aumentar (a).

Consideremos que si se aumentan hombres con el triple de rendimiento, es como si aumentáramos el triple de hombres con igual rendimiento que los iniciales.

Es decir, si voy a aumentar a hombres con el triple de rendimiento, es como si aumentara $3a$ con el rendimiento inicial.



N.° de hombres	tiempo (d)	obra	h/d
x	8	2	2
$x+3a$	2	1	1

Con la regla práctica se tiene:

$$x+3a = x\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{1}$$

$$3x=3a \rightarrow x=a$$

Por lo tanto, se debe aumentar x hombres.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 37

Para ejecutar una obra, se cuenta con 2 cuadrillas: la primera tiene 40 hombres y puede concluir la obra en 30 días; la segunda, 60 hombres y puede terminar en 40 días. Si tomamos solamente 3/4 de la primera y los 2/3 de la segunda cuadrilla, ¿en cuántos días terminarán la obra?

A) 24 B) 32 C) 48
D) 18 E) 28

Resolución

Se pide el número de días en que terminarán la obra (x).

Dato:

- La 1.ª cuadrilla de 40 hombres hace la obra en 30 días.
- La 2.ª cuadrilla de 60 hombres hace la obra en 40 días.

Sea

H: hombres de la 1.ª cuadrilla y
h: hombres de la 2.ª cuadrilla

Del dato:

$$\cancel{4}\cancel{0}H\times 3\cancel{0} = 6\cancel{0}h\times\cancel{4}\cancel{0} = \begin{matrix}\text{obra}\\ \text{total}\end{matrix}$$

$$H=2h$$

Entonces, cada hombre de la primera cuadrilla realiza el doble de lo que realiza el de la segunda.

Para realizar la obra, primero calculemos cuánto es la obra total.

$$\text{obra total}=\overset{H}{40}\times\overset{d}{30}\times\underset{\text{El doble que los de la 2.ª}}{\overset{c/u}{2}}=\overset{h}{60}\times\overset{d}{40}\times\overset{c/u}{1}=2400$$

Luego, en un día:

1.ª cuadrilla **2.ª cuadrilla**

$$\frac{3}{4}(40)(2)\quad+\quad\frac{2}{3}(60)(1)=100$$

1 día → 100

x días → 2400

$\therefore\ x=24$ días

Clave **A**

PROBLEMA N.° 38

Diez obreros pueden hacer una obra en 12 días trabajando 6 h/d. Después de iniciado el trabajo, se quiere terminar a los 8 días de empezado, disminuyendo 1/6 de la obra y aumentando 2 horas por día. ¿Cuántos días se trabajó 8 h/d?

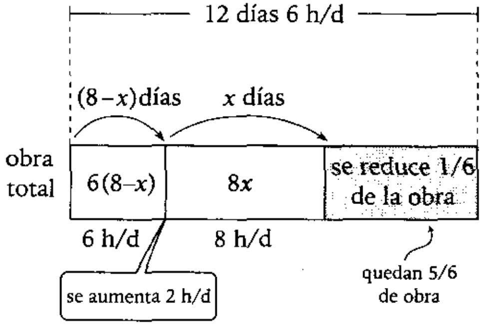
A) 3,5 días B) 7,5 días C) 6 días
D) 8,5 días E) 8 días

Resolución

Se pide la cantidad de días en que se trabajó 8 h/d.

Dato: diez obreros hacen una obra en 12 días trabajando 6 h/d.

Como la magnitud *número de obreros* no varía, se puede cancelar.



Del gráfico

$$6(8-x)+8x=\overset{\text{obra total}}{\frac{5}{\cancel{6}}(12\times\cancel{6})}$$

$$2x+48=60$$

$$2x=12$$

$\therefore\ x=6$ días

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Dos personas tienen concedidas pensiones en razón directa a la raíz cuadrada del número de años de servicio. El servicio de la primera excede al de la segunda en 4 1/4 años y las pensiones están en la relación de 9 a 8. ¿Cuánto tiempo ha servido la segunda?

A) 8 años
B) 16 años
C) 24 años
D) 12 años
E) 18 años

Resolución

Se pide el tiempo de servicio de la segunda persona (t).

Datos:

Relación de pensiones es de 9 a 8.

- La pensión DP a la $\sqrt{\begin{matrix}\text{n.° de años}\\ \text{de servicio}\end{matrix}}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\text{Pensión}}{\sqrt{\text{N.° de años de servicio}}}=K}$$

K: cte.

Reemplazamos los datos:

$$\frac{9\cancel{P}}{\sqrt{t+4\frac{1}{4}}}=\frac{8\cancel{P}}{\sqrt{t}}$$

Elevamos al cuadrado

$$\frac{81}{t+\frac{17}{4}}=\frac{64}{t}$$

$$81t=64t+16\times 17$$

$$\cancel{17}t=16\times\cancel{17}$$

$\therefore\ t=16$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 40

Tres pintores, para pintar un globo aerostático de 2 m de radio, emplearon 2 días trabajando 6 horas diarias. Si 4 pintores emplearon 5 días trabajando 8 horas diarias para pintar otro globo de 4 m de radio, porque habían empezado a pintarlo de rojo en vez de comenzar a pintarlo de azul, que era lo pactado, determine durante cuántos días lo estuvieron pintando de rojo.

A) 2 días B) 5 días C) 1 día

D) 1/2 día E) 4 días

Resolución

Se pide la cantidad de días que estuvieron pintando de rojo el globo.

Dato:

Los 4 pintores del segundo grupo emplearon 5 días en pintar porque empezaron haciéndolo de rojo.

Lo que haremos es calcular el tiempo que le hubiera tomado al segundo grupo pintar el globo de azul (superficie esférica: $4\pi r^2$) y por diferencia hallamos lo pedido.

	IP	DP		IP
	N.° de pintores	**obra**	**tiempo (d)**	**h/d**
1.^{er} grupo	3	$\cancel{4}\pi\,(2)^2$	2	6
2.° grupo	4	$\cancel{4}\pi\,(4)^2$	x	8

De donde:

$$x=2\times\frac{3}{\cancel{4}}\times\frac{4^{\cancel{2}}}{2^{\cancel{2}}}\times\frac{6}{8}$$

$$x=\frac{9}{2}\ \text{días}$$

Como el segundo grupo empleó 5 días en total, entonces, estuvo pintando de rojo.

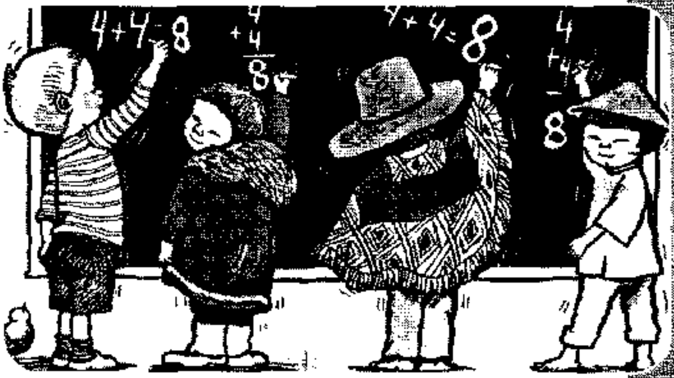
$$5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}\ \text{días}$$

Clave **D**

Capítulo

12

Operaciones matemáticas



Cuando mezclamos un poco de detergente con agua para lavar nuestras prendas, vemos cómo esos dos elementos generan como producto una mezcla espumosa, o cuando preparamos nuestro desayuno al mezclar el azúcar con la leche, obtenemos una agradable bebida; a estos procesos los conocemos como operaciones. En este capítulo nos ocuparemos de estos procesos de transformación pero mediante cantidades, lo que se conoce como operaciones matemáticas universales, así como también algunas de sus propiedades. Además, y fundamentalmente, desarrollaremos las relaciones que se pueden establecer a partir de operaciones matemáticas universales, las cuales generarán otras nuevas, llamadas operaciones matemáticas arbitrarias, las cuales clasificaremos en aquellas con regla de definición explícita y otras con regla de definición implícita.

Capítulo 12

Operaciones matemáticas

PROBLEMA N.° 1

Si

$\triangle{n}=n^{\nabla{n}}+1$

$\nabla{m}=\boxed{m}-1$

$\boxed{a}=2a+4$

Calcule $\triangle{\boxed{-2}}$

A) 2
B) 1
C) 4
D) 3
E) 0

Resolución

Se pide el valor de $\triangle{\boxed{-2}}$

Del último dato se tiene

$\boxed{-2}=2(-2)+4=0$

Luego quedaría

$\triangle{\boxed{-2}}=\triangle{0}$

Del primer dato resulta que

$\triangle{0}=0^{\nabla{0}}+1=1$

Clave B

PROBLEMA N.° 2

Si $f(x+1)=x^2+2x-3$, calcule $g(3)$
Además $f(g(y))=y^4+15$

A) 9 B) 7 C) 12
D) 11 E) 10

Resolución

Se pide el resultado de $g(3)=M$

En el dato: $f(g(y))=y^4+15$

Hacemos que $y=3$, de donde se obtiene

$f(g(3))=3^4+15$

$\rightarrow\ f(M)=96 \qquad \text{(I)}$

Además, de

$f(x+1)=x^2+2x-3$

$f(x+1)=\underbrace{x^2+2x+1}-1-3$

$f(\underbrace{x+1})=(\underbrace{x+1})^2-4$
$(\ )^2$

Aplicamos en (I)

$M^2-4=96$

$M^2=100$

$\therefore\ M=g(3)=10$

Clave E

PROBLEMA N.° 3

Si $P(x+1)=x^2+3x+2$, halle y

Además $P(P(y))=42$

A) 4 B) 5 C) 3

D) 1 E) 2

Resolución

Se pide el valor de y en

$P(P(y))=42$ (I)

Del dato:

$P(x+1)=x^2+3x+2$

Factorizamos

$$P(x+1)=\underset{\text{menor}}{(x+1)}(x+2)\ \text{consecutivos}$$

En (I) según lo anterior

$$P(\underbrace{P(y)})=42=\overset{\text{menor}}{6}(7)$$

$$P(\underbrace{y})=6=\overset{\text{menor}}{2}(3)$$

$\therefore\ y=2$

Clave E

PROBLEMA N.° 4

Si $f(x+3)=x^2-1$, halle el valor de

$$A=\frac{f(a+2)-f(2)}{a-2};\quad a\neq 2$$

A) a B) a^2 C) a^3+1

D) $a+1$ E) $-a$

Resolución

Se pide el valor de

$$A=\frac{f(a+2)-f(2)}{a-2};\quad a\neq 2$$

Aplicamos en A la operación

$$f(\underbrace{x+3}_{-3(\ )^2-1})=x^2-1$$

$$A=\frac{[(a+2)-3]^2-1-\left[\cancel{(2-3)^2}-1\right]}{a-2}$$

$$A=\frac{(a-1)^2-1}{a-2}$$

$$A=\frac{a^2-2a\cancel{+1}\cancel{-1}}{a-2}=\frac{a\cancel{(a-2)}}{\cancel{a-2}}$$

$\therefore\ A=a$

Clave A

PROBLEMA N.° 5

Si $a^3\triangle b^2=b^3-a^2$

$\boxed{x^2+1}=2^x+1$

Calcule

$$E=\boxed{5+\boxed{17}+(343\triangle 16)}$$

A) 70 B) 48 C) 65

D) 50 E) 60

Resolución

Se pide el resultado de

$$E=\boxed{5+\boxed{17}+(343\triangle 16)}$$

Del dato

$\boxed{x^2+1}=2^x+1$

Para $x=4$

$\rightarrow\ \boxed{4^2+1}=2^4+1$

$\boxed{17}=17$

Además, se sabe que

$$\underset{\downarrow}{a^3}\triangle \underset{\downarrow}{b^2}=b^3-a^2$$

$$343\triangle 16=7^3\triangle 4^2=4^3-7^2$$

$$343\triangle 16=15$$

Reemplazamos en

$$E=\boxed{5+17+(15)}$$

$$E=\boxed{37}=\boxed{6^2+1}$$

$\therefore\ E=2^6+1=65$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 6

Si $(a^*b)^2=b^*a;\ \ a^*b>0$
halle $E=3^*5$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 4

Resolución

Se pide el resultado de $E=3^*5$.
A partir de la relación $(a^*b)^2=b^*a$ hallaremos la regla de definición de la operación representada por el operador *.

Es decir

reemplazamos la a por la b y viceversa

$$\underset{\downarrow}{b}*\underset{\downarrow}{a}=(a*b)^2\ ...\ \text{(I)};\ \ a*b>0$$

$$a*b=(b*a)^2$$

Elevamos al exponente 2

$$(a^*b)^2=[(b^*a)^2]^2$$

Reemplazamos en (I)

$$b^*a=[(b^*a)^2]^2$$

$$(b^*a)=(b^*a)^4$$

Luego

$$(b^*a)^4-(b^*a)=0$$

$$(b^*a)((b^*a)^3-1)=0$$

$$\Rightarrow b*a=0\ \ \vee\ \ (b*a)^3=1$$

se descarta por dato

$$\Rightarrow b*a=1$$ (cte. no depende de *a* ni de *b*)

$\therefore\ E=3^*5=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

Si $a*b=\sqrt{a^b}$; $b\triangle a=\sqrt[3]{a^b}$
halle $\sqrt[3]{4*27}-\sqrt{4\triangle 27}$

A) 450 B) 500 C) 503
D) 490 E) 510

Resolución

Se pide el valor de $A=\sqrt[3]{4*27}-\sqrt{4\triangle 27}$

Reemplazamos en cada caso según los datos:

$$A=\sqrt[3]{\sqrt{4^{27}}}-\sqrt{\sqrt[3]{27^4}}$$

$$A=\sqrt[3]{\sqrt{(2^{\cancel{2}})^{27}}}-\sqrt{\sqrt[\cancel{3}]{(3^{\cancel{3}})^4}}$$

$$A=2^9-3^2$$

$\therefore\ A=503$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Sabiendo que $a^*(b+1)=2a-3b$
Halle x en $5^*x=x^*(3^*1)$

A) 28/5 B) 14/5 C) 20/7
D) 5/12 E) 4/7

Resolución

Se pide el valor de x en $5*x=x*(3*1)$

Dato

$$\overset{\times 2}{a}*(\underset{-1\times -3}{b+1})=2a-3b$$

En

$$5*x=x*(\underset{\downarrow\times 2}{3}*\underset{\downarrow{-1}\times(-3)}{1})$$

$$5*x=x*(6-0)$$

Luego

$$10-3(x-1)=2x-3(5)$$

$$10-3x+3=2x-15$$

$$5x=28$$

$\therefore\ x=28/5$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 9

Si $\llbracket x\rrbracket=n\leftrightarrow n\le x<n+1;\ \forall x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}$

Simplifique

$$E=\frac{\llbracket 4,2\rrbracket+\llbracket 6,5\rrbracket}{\llbracket -3,7\rrbracket+\llbracket -2,2\rrbracket}$$

A) $-5/7$ B) $3/2$ C) $-10/11$
D) $-10/7$ E) $9/20$

Resolución

Se pide simplificar la expresión E

donde $E=\dfrac{\llbracket 4,2\rrbracket+\llbracket 6,5\rrbracket}{\llbracket -3,7\rrbracket+\llbracket -2,2\rrbracket}$

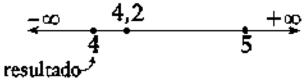
Expresamos gráficamente la regla de definición

$\llbracket x\rrbracket=n\leftrightarrow n\le x<n+1;$

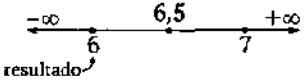
$\forall x\in\mathbf{R}\wedge n\in\mathbb{Z}$

Apoyándonos en la recta numérica

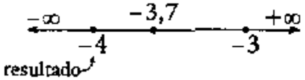
Luego



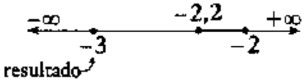
$\rightarrow\llbracket 4,2\rrbracket=4$



$\rightarrow\llbracket 6,5\rrbracket=6$



$\rightarrow\llbracket -3,7\rrbracket=-4$



$\rightarrow\llbracket -2,2\rrbracket=-3$

Reemplazando se tiene

$$E=\frac{4+6}{-4+(-3)}$$

$\therefore\ E=-10/7$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Si $\boxed{\enclose{circle}{x-1}}=x+1,\ \boxed{x+1}=x-1$

Halle $\enclose{circle}{\enclose{circle}{4}+1}$

A) 10 B) 13 C) 15
D) 36 E) 14

Resolución

Se pide el valor de la expresión $A=\textcircled{\textcircled{4}+1}$

Hallamos la regla de definición de ⓝ a partir de

$$\underbrace{\boxed{x+1} = x-1}_{-2} \quad \text{(I)} \wedge \boxed{\textcircled{x-1}}=x+1 \quad \text{(II)}$$

Aplicamos (I) en (II), obteniendo

$$\textcircled{x-1}-2=x+1$$

$$\underbrace{\textcircled{\underline{x-1}}=\underline{x+3}}_{+4}$$

Finalmente

$$\underbrace{\textcircled{\textcircled{4}+1}=\textcircled{8+1}}_{+4}\underbrace{=13}_{+4}$$

$\therefore\ A=13$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Si $\boxed{x-1}=2x+1$

$\boxed{\triangle{x+1}}=8x+9$

Halle el valor de

$$E=\triangle{\triangle{2}}+\triangle{\boxed{5}}$$

A) 90 B) 74 C) 60
D) 56 E) 78

Resolución

Se pide el valor de

$$E=\triangle{\triangle{2}}+\triangle{\boxed{5}}$$

Es necesario conocer la regla de definición de $\triangle{n}$, la cual se hallará a partir de

$$\underbrace{\boxed{x-1} = 2x+1}_{\times 2+3} \qquad \text{y} \qquad \text{(I)}$$

$$\boxed{\triangle{x+1}}=8x+9 \qquad \text{(II)}$$

Aplicamos (I) en (II), y obtenemos

$$2\triangle{x+1}+3=8x+9 \ \rightarrow\ 2\triangle{x+1}=8x+6$$

$$\underbrace{\triangle{\underline{x+1}}=\underline{4x+3}}_{\times 4-1}$$

Luego, en E

$$\underbrace{\triangle{\triangle{2}}=\triangle{7}}_{\times 4-1}\underbrace{=27}_{\times 4-1}$$

$$\underbrace{\triangle{\boxed{5}}=\triangle{13}}_{\times 2+3}\underbrace{=51}_{\times 4-1}$$

$\therefore\ E=27+51=78$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 12

Si $\triangle{x}=x+4$

$\textcircled{\boxed{x+3}}=x-1$

$\textcircled{\triangle{x}}=x+8$

Halle el valor de $E=\textcircled{\boxed{\triangle{5}}}$

A) 7 B) 9 C) 5
D) 8 E) 6

Resolución

Se pide el resultado de

$$E=\textcircled{\boxed{\triangle\!\!\!\!\!\!\;5}}$$

Del dato inicial $\triangle\!\!\!\!\!\!\;5=9$

Luego, del segundo dato

$$\underset{-4}{\textcircled{\boxed{x+3}}=x-1}$$

Se tiene que

$$E=\textcircled{\boxed{\triangle\!\!\!\!\!\!\;5}}=\textcircled{\boxed{9}}$$

∴ $E=5$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

Si $\textcircled{m}=m(m-1)$

$\boxed{n}=(n-1)(n+1)$

Halle $\textcircled{\boxed{2}}$

A) 6
B) 9
C) 8
D) 7
E) 5

Resolución

Se pide el resultado de $\textcircled{\boxed{2}}$

De los datos, se tiene que

$\boxed{2}=1(3)=3$

$\textcircled{3}=3(2)=6$

∴ $\textcircled{\boxed{2}}=\textcircled{3}=6$

PROBLEMA N.° 14

Si $\textcircled{x}=x^2+1; x>0$

$\textcircled{\boxed{x}}=4x^2+1$

Calcule

$R=\textcircled{4}+\textcircled{\boxed{2}}-\boxed{8}$

A) 19
B) 20
C) 21
D) 18
E) 22

Resolución

Se pide el resultado en

$R=\textcircled{4}+\textcircled{\boxed{2}}-\boxed{8}$

Hallamos la regla de definición de $\boxed{n}$ a partir de

$$\underset{(\ )^2+1}{\textcircled{x}=x^2+1}\quad\text{(I)}\quad\wedge\quad\underset{(\ )^2\times4+1}{\textcircled{\boxed{x}}=4x^2+1}\quad\text{(II)}$$

De (I) en (II) se obtiene

$$\boxed{x}^2\cancel{+1}=4x^2\cancel{+1}\quad;\quad\boxed{x}>0\ \text{(dato)}$$

$$\boxed{x}^2=4x^2\quad\rightarrow\quad\underset{\times2}{\boxed{x}=2x}$$

Luego

$$R=\underset{\downarrow}{\textcircled{4}}\ +\ \underset{\downarrow}{\textcircled{\boxed{2}}}\ -\ \underset{\downarrow}{\boxed{8}}$$

$$\begin{array}{lll}(\ )^2 & (\ )^2 & \times2\\ +1 & \times4 & \\ & +1 & \end{array}$$

$$R=17+17-16$$

∴ $R=18$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 15

Sabiendo que

$\boxed{P^2}=-1+P^4$; $\boxed{\triangle{n}}=n^2+2n$

Calcule $E=\triangle{\,\triangle{3}+\boxed{2}\,}$

A) 7 B) 9 C) 10
D) 8 E) 6

Resolución

Se pide el valor de

$$E=\triangle{\,\triangle{3}+\boxed{2}\,}$$

Hallamos la regla de definición de $\triangle{n}$ de los datos

$$\underset{(\ \ )^2-1}{\boxed{P^2}\curvearrowright}=+P^4-1 \qquad \text{(I)}$$

$$\boxed{\triangle{n}}=n^2+2n \qquad \text{(II)}$$

En (II) aplicamos la regla de definición de (I)

$$\triangle{n}^2-1=n^2+2n$$

$$\triangle{n}^2=\underbrace{n^2+2n+1}_{\text{TCP}}=(n+1)^2$$

$$\triangle{n}=n+1$$

Finalmente, en E

$$\triangle{3}=4; \qquad \boxed{2}=3$$

$$\therefore\ E=\triangle{4+3}=8$$

Clave D

PROBLEMA N.° 16

Se definen

$\triangle{x-1}=2x^2-3$

$\triangle{\boxed{x}}=8x+5$; $\boxed{x}>0$

Calcule $\boxed{8}+\boxed{15}$

A) 15
B) 14
C) 12
D) 11
E) 10

Resolución

Se pide el resultado de $\boxed{8}+\boxed{15}$

Datos

$$\triangle{x-1}=2x^2-3 \qquad \text{(I)}$$

$$\triangle{\boxed{x}}=8x+5;\ \boxed{x}>0 \qquad \text{(II)}$$

De (I)

$$\triangle{\underline{x-1}}=2\underset{=}{(\underline{x-1})}\overset{+2}{\curvearrowright}(x+1)-1$$

Aplicamos en (II) para encontrar la regla de definición de $\boxed{x}$, es decir

$$2\boxed{x}(\boxed{x}+2)-1=8x+5$$

Reduciendo, se obtiene

$$\boxed{x}(\boxed{x}+2)=4x+3 \qquad \text{(III)}$$

Ahora, para calcular lo pedido evaluemos en (III)

para $x=8$

$$\boxed{8}\overset{+2}{\curvearrowright}(\boxed{8}+2)=35=5\overset{+2}{\curvearrowright}(7)$$

$$\rightarrow \boxed{8}=5$$

para $x=15$

$$\overset{+2}{\overbrace{\boxed{15}\;(\boxed{15}}}+2)=63=7\overset{+2}{\frown}(9)$$

$$\Rightarrow \boxed{15}=7$$

$\therefore\ \boxed{8}+\boxed{15}=12$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 17

Dado $\boxed{a*b}=2a-b$

$\triangle x=6x+7$

Halle N en

$$\triangle\boxed{N*5}=25$$

A) 4 B) 3 C) 2

D) 5 E) 1

Resolución

Se pide el valor de N en $\triangle\boxed{N*5}=25$

De los datos $\boxed{a*b}=2a-b$ y

$\underset{\times 6+7}{\triangle x=6x+7}$ se tiene que

$$\triangle\boxed{N*5}=25$$

$$\underset{\times 6+7}{\triangle\,\underline{2N-5}=25}$$

$12N-30+7=25$

$12N=48$

$\therefore\ N=4$

PROBLEMA N.° 18

Se define

$$\boxed{a^4}^{\sqrt{b}}=a^8\times\sqrt[4]{b}$$

Calcule $A=\boxed{\boxed{\sqrt{2}}^9}^4$

A) 60 B) 70

C) 64

D) 72 E) 81

Resolución

Se pide el resultado en $A=\boxed{\boxed{\sqrt{2}}^9}^4$

Del dato

$$\underset{(\ )^2}{\boxed{a^4}}^{\overset{\sqrt{\ }}{\sqrt{b}}}=a^8\times\sqrt[4]{b}$$

Se puede expresar de la siguiente forma

$$\boxed{m}^n=m^2\times\sqrt{n}$$

Luego, hallamos el valor de A calculando los resultados por partes; es decir, primero resolvemos

$$\underset{(\ )^2}{\boxed{\sqrt{2}}}^{\overset{\sqrt{\ }}{9}}=2\times3=6$$

Finalmente, reemplazamos en A el resultado obtenido.

$$A=\underset{(\ )^2}{\boxed{6}}^{\overset{\sqrt{\ }}{4}}=36\times2$$

$\therefore\ A=72$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

Si $\enclose{circle}{\boxed{x+4}}=x+3$ y

$\enclose{circle}{x+3}=3x+1$

Calcule $\boxed{\boxed{5}+1}$

A) 4　　B) 5　　C) 6
D) 7　　E) 3

Resolución

Se pide el resultado de $\boxed{\boxed{5}+1}$
Para calcular lo pedido, hallaremos primero la regla de definición de $\boxed{n}$ a partir de los datos.

$\underset{\times 3-8}{\enclose{circle}{x+3}=3x+1}$ (I) $\wedge$ $\enclose{circle}{\boxed{x+4}}=x+3$ (II)

(I) lo aplicamos en (II) y se obtiene

$$3\boxed{x+4}-8=x+3$$

$$\underset{+7-3}{\boxed{x+4}=\frac{x+11}{3}}$$

Finalmente

$$\underset{+7\div 3}{\boxed{\boxed{5}+1}=\boxed{4+1}}=\boxed{5}=4$$

Clave A

PROBLEMA N.° 20

Si $\enclose{circle}{x+1}=x-1$

$\boxed{y-2}=\enclose{circle}{\enclose{circle}{y}}$

Calcule $\boxed{\enclose{circle}{4}}$

A) 1　　B) −1　　C) −2
D) 0　　E) 3

Resolución

Se pide el resultado en $\boxed{\enclose{circle}{4}}$

En los datos, se observa lo siguiente

$\underset{-2}{\enclose{circle}{x+1}=x-1}$ Por cada operador $\bigcirc$ la expresión se reduce en 2

$\rightarrow \boxed{y-2}=\underset{2(-2)}{\enclose{circle}{\enclose{circle}{y}}=y-4}$ Cantidad de operadores $\bigcirc$

$\rightarrow \underset{-2}{\boxed{y-2}=y-4}$

Luego

$$\underset{-2}{\boxed{\enclose{circle}{4}}=\overset{-2}{\boxed{2}=0}}$$

Clave D

PROBLEMA N.° 21

Si $\boxed{a-2}=a^2$, halle $\boxed{3}+\boxed{\boxed{1}}$

A) 146
B) 130
C) 122
D) 150
E) 115

Resolución

Se pide el resultado en $\boxed{3}+\boxed{\boxed{1}}$

Dato

$$\underset{+2(\ )^2}{\boxed{a-2}=a^2}$$

Aplicamos la regla de definición (dato) en

$$\underbrace{\boxed{3} = 25}_{+2(\ )^2} \qquad \underbrace{\boxed{\boxed{1}} = \boxed{9}}_{+2(\ )^2}\overset{+2(\ )^2}{= 121}$$

$\therefore\ \boxed{3} + \boxed{\boxed{1}} = 25+101=146$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 22

Sea x un número entero, $x > -2$

$\textcircled{x}=x^3+1$; $\boxed{x}=x^2+3x$

Calcule el valor de $x+5$; si $\boxed{\textcircled{x}}=-7$

A) 2 B) 3 C) 5
D) 6 E) 4

Resolución

Se pide el valor de $x+5$

Se sabe que

$\boxed{\textcircled{x}}=-7; x \in \mathbb{Z}\ \wedge\ x > -2$

Del dato $\underbrace{\textcircled{x} = x^3+1}_{(\ )^3+1}$

se tiene que

$$\textcircled{\boxed{x}} = -7$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle (\ )^3 +1}$$

$$\boxed{x}^3+1=-7 \quad \rightarrow \quad \boxed{x}=-2$$

Aplicamos la regla de definición del $\boxed{x}$ (dato).

$x^2+3x=-2$

$x^2+3x+2=0$

$x \qquad +2 \ \rightarrow\ x=-2$ (contradice el dato)

$x \qquad +1 \ \rightarrow\ x=-1$ ✓

$\therefore\ x+5=4$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Si $\triangle{n}=(n+1)^2$

Halle el valor de x en

$\triangle\triangle\triangle{x}=100$

A) $\sqrt{3}$ B) 5 C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}-1$ E) 3

Resolución

Se pide el valor de x en

$$\triangle\triangle\triangle{x}=100 \qquad \text{(I)}$$

Se sabe que

$$\underbrace{\triangle{n} = (n}+1)^2 \text{ (regla de definición)}$$

En ocasiones, aplicar la regla de definición de una operación matemática ($\triangle$) en forma directa da como resultado una expresión engorrosa para resolver (eso resultaría al aplicar $\triangle{n}$ en I). Lo que haremos es darle forma al resultado de (I) según la regla de definición de $\triangle{n}$, es decir:

$$\underbrace{\triangle\triangle\triangle{x} = 100 = (9}+1)^2$$

$$\underbrace{\triangle\triangle{x} = 9 = (2}+1)^2$$

$$\triangle{x} = 2$$

Por definición

$(x+1)^2=2$

$x+1=\sqrt{2}$

$\therefore\ x=\sqrt{2}-1$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 24

Si $\langle x \rangle=(x-1)^2+a;\ x\neq 0$

Entonces

$$E=\frac{\langle x \rangle-\langle x+2 \rangle}{x}$$

es

A) 3 B) −5 C) 6
D) −4 E) −1

Resolución

Se pide el valor de la expresión E

$$E=\frac{\langle x \rangle-\langle x+2 \rangle}{x}$$

Resolvemos la expresión E según la regla de definición de $\langle x \rangle$(dato), es decir:

$$E=\frac{(x-1)^2+a-((x+2-1)^2+a)}{x}$$

$$E=\frac{\cancel{x^2}-2x\cancel{+1}+\cancel{a}-(\cancel{x^2}+2x\cancel{+1}+\cancel{a})}{x}$$

$$\therefore\quad E=\frac{-4x}{x}=-4$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 25

Tenemos: $\overset{\triangle}{x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\enclose{circle}{x}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Calcule $\overset{\triangle}{a}^2-@^2$

A) 3 B) 4 C) 2
D) 5 E) 1

Resolución

Se pide el resultado en $\overset{\triangle}{a}^2-@^2$

Datos

$$\overset{\triangle}{x}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ \wedge\ \enclose{circle}{x}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Hallamos el resultado pedido de la siguiente manera

$$\underbrace{\overset{\triangle}{a}^2-@^2}_{\substack{\text{diferencia}\\ \text{de cuadrados}}}=(\overset{\triangle}{a}+@)(\overset{\triangle}{a}-@)$$

$$\overset{\triangle}{a}^2-@^2=\left(\frac{e^a+\cancel{e^{-a}}}{2}+\frac{e^a-\cancel{e^{-a}}}{2}\right)\left(\frac{\cancel{e^a}+e^{-a}}{2}-\frac{\cancel{e^a}-e^{-a}}{2}\right)$$

$$\overset{\triangle}{a}^2-@^2=\left(\frac{\cancel{2}e^a}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\cancel{2}e^{-a}}{\cancel{2}}\right)$$

$\overset{\triangle}{a}^2-@^2=e^a\cdot e^{-a}$ (producto de potencias con igual base)

$\overset{\triangle}{a}^2-@^2=e^{a-a}=e^0=1$ (exponente cero)

$$\therefore\quad \overset{\triangle}{a}^2-@^2=1$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 26

Si $a^2*b^3=3a+4b$, halle $M=16*27$

A) 20 B) 21 C) 17
D) 24 E) 15

Resolución

Se pide el valor de la expresión $M=16*27$
Se sabe que

$$\sqrt{\ }\times 3$$

$$a^2*b^3=3a+4b$$

$$\sqrt[3]{\ }\times 4$$

Aplicamos en la expresión M lo anterior, es decir

$$\begin{tikzcd} M=16 \arrow[d, "\sqrt{\ }"', "\times 3"] & *27 \arrow[d, "\sqrt[3]{\ }", "\times 4"'] \\ M=12 & +12 \end{tikzcd}$$

$\therefore\ M=24$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 27

Si

$$m^{\#}=\frac{(m^2+1+2m)^2}{(m-1)^2+4m};\quad m\neq -1$$

Halle

$$A=\left[\frac{5^{\#}-3^{\#}+1^{\#}}{6^{\#}-4^{\#}}+2^{\#}\right]^{\#}$$

A) 90 B) 121 C) 100
D) 89 E) 81

Resolución

Se pide el resultado de la expresión

$$A=\left[\frac{5^{\#}-3^{\#}+1^{\#}}{6^{\#}-4^{\#}}+2^{\#}\right]^{\#}$$

Del dato

$$m^{\#}=\frac{(\overbrace{m^2+1+2m}^{\text{TCP}})^2}{(m-1)^2+4m};\quad m\neq -1$$

Reducimos la definición para luego aplicarla en la expresión A.

$$m^{\#}=\frac{\left((m+1)^2\right)^2}{m^2-2m+1+4m}$$

$$m^{\#}=\frac{(m+1)^4}{m^2+2m+1}$$

Obtenemos

$$m^{\#}=\frac{(m+1)^4}{(m+1)^2}=(m+1)^2$$

Luego en A se tiene:

$$A=\left[\frac{6^2-4^2+2^2}{7^2-5^2}+3^2\right]^{\#}$$

Operamos y reducimos para obtener

$$A=\left[\frac{24}{24}+9\right]^{\#}=10^{\#}$$

$\therefore\ A=11^2=121$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Si $A\#B=\dfrac{(A+B)^2}{2}$ y $m\triangle n=m^2+n^2$

Halle $8(r-s)$ en

$$(r\triangle s)-(r\#s)=\left(\frac{1}{2}\right)^3;\ r>s$$

A) 2 B) 1 C) 3
D) 5 E) 4

Resolución

Se pide el valor de $8(r-s)$
Se sabe que

$$(r\triangle s)-(r\#s)=\left(\frac{1}{2}\right)^3;\ r>s$$

Aplicamos en la expresión las reglas de definición de las operaciones y resulta

$$r^2+s^2-\left(\frac{(r+s)^2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$r^2+s^2-\left(\frac{r^2+2rs+s^2}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

Multiplicamos por 2

$$\cancel{2}r^{\cancel{2}}+\cancel{2}s^{\cancel{2}}-\cancel{r^{2}}-2rs-\cancel{s^{2}}=\frac{1}{4}$$

$$\underbrace{r^2-2rs+s^2}_{\text{TCP}}=\frac{1}{4}$$

$$(\underbrace{r-s}_{>0})^2=\frac{1}{4}\ \rightarrow\ r-s=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 8(r-s)=\frac{1}{2}\times 8=4$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 29

Si $\sqrt{a^3}*\sqrt[3]{b^2}=\frac{2a}{3}+\frac{3b}{2}$

Calcule $M=27*4$

A) 19 B) 20 C) 16
D) 18 E) 22

Resolución

Se pide el resultado de la expresión $M=27*4$

Del dato

$$\sqrt{a^3}*\sqrt[3]{b^2}=\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b$$

$$a^{\frac{3}{2}}*b^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b$$

los exponentes de cada potencia se intercambian colocándose como coeficientes

Ahora le daremos a la expresión M la forma que presenta la regla de definición, para ello

$M=27*4=3^3*2^2$

Elevamos a la unidad cada potencia de forma conveniente para generar los exponentes $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$:

$$M=(3^{3})^{\frac{2}{2}}*(2^{2})^{\frac{3}{3}}$$

$$M=(3^{2})^{\frac{3}{2}}*(2^{3})^{\frac{2}{3}}$$

Aplicamos la definición

$$M=\frac{2}{\cancel{3}}(3^{\cancel{2}})+\frac{3}{\cancel{2}}(2^{\overset{2}{\cancel{3}}})$$

$M=6+12$

$\therefore\ M=18$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

Se define $\frac{m}{3}\#n=\frac{3n-m}{mn}$

Calcule $E=\left(\frac{1}{6}\#-2\right)\#(-3)$

A) 19/39 B) 15/17 C) 20/27
D) 15/29 E) 21/29

Resolución

Se pide el valor de la expresión

$$E=\left(\frac{1}{6}\#-2\right)\#(-3)$$

Del dato

$$\frac{m}{3}\#n=\frac{3n-m}{mn}\ \text{(desdoblando el segundo miembro)}$$

$$\frac{m}{3}\#n=\frac{3\cancel{n}}{m\cancel{n}}-\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}n}$$

Reduciendo, se obtiene

$$\overbrace{\underbrace{\frac{m}{3}\#n=\frac{3}{m}}_{(\ )^{-1}}-\frac{1}{n}}^{(\ )^{-1}}$$

Entonces, la expresión E se resuelve de la siguiente manera.

Primero resolvemos lo que se encuentra dentro de los paréntesis, es decir

$$\begin{tikzcd} L=\left(\frac{1}{6}\right. \arrow[d, "(\ )^{-1}"'] & \# & \left.-2\right) \arrow[d, "(\ )^{-1}"] \\ L=6 & - & \left(-\frac{1}{2}\right) \end{tikzcd}$$

$$\rightarrow\quad L=\frac{13}{2}$$

Finalmente, en E reemplazamos

$$\begin{tikzcd} E=\frac{13}{2} \arrow[d, "(\ )^{-1}"'] & \# & (-3) \arrow[d, "(\ )^{-1}"] \\ E=\frac{2}{13} & - & \left(-\frac{1}{3}\right) \end{tikzcd}$$

$$E=\frac{6+13}{13(3)}$$

$$\therefore\quad E=\frac{19}{39}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 31

Se define en R: $a*b=ab$

Calcule $E=[(3^{-1}*2^{-1})*(4^{-1}*5^{-1})]^{-1}$

Obs.: a^{-1}: elemento inverso de a

A) 123 B) 115 C) 165
D) 120 E) 146

Resolución

Se pide el resultado de

$$E=[(3^{-1}*2^{-1})*(4^{-1}*5^{-1})]^{-1}$$

Datos

- En $\mathbb{R}$ se define $a*b=ab$
- a^{-1}: elemento inverso de a

Recuerda

- Propiedad del elemento neutro (e)

$$\boxed{\exists! e\in A/\forall a\in A\ \rightarrow\ a*e=e*a=a}$$

- Propiedad del elemento inverso (a^{-1})

$$\boxed{\text{Dado } e\in A,\forall a\in A,\exists a^{-1}\in A/a*a^{-1}=a^{-1}*a=e}$$

Se observa en la expresión E, 3^{-1}; 2^{-1}; 4^{-1} y 5^{-1}: elementos inversos, para calcular sus valores es necesario conocer el elemento neutro de la operación matemática (*).

Sea e: elemento neutro de la operación matemática (*), entonces

$$a*e=\underbrace{\overset{\text{por definición}}{a\cdot e}\overset{\text{por propiedad}}{=a}}_{\boxed{e=1}\ \text{elemento neutro}}$$

Luego

$$\underbrace{a*a^{-1}}=e$$
$$a\cdot a^{-1}=1\ \rightarrow\ a^{-1}=\frac{1}{a}\ \text{elemento inverso}$$

Ahora hallamos los inversos que se necesitan

$$3^{-1}=\frac{1}{3};\ 2^{-1}=\frac{1}{2};\ 4^{-1}=\frac{1}{4};\ 5^{-1}=\frac{1}{5}$$

Reemplazando en E se tiene

$$E=\left[\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{2}\right)*\left(\frac{1}{4}*\frac{1}{5}\right)\right]^{-1}$$

Por la regla de definición

$$E=\left[\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)*\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\right)\right]^{-1}$$

Tenemos

$$E=\left[\frac{1}{6}\bullet\frac{1}{20}\right]^{-1}$$

$$E=\left[\frac{1}{6}\times\frac{1}{20}\right]^{-1}$$

$\therefore\ E=120$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 32

Si $a\,\Delta\,b=\dfrac{a*b}{a+b};\quad a\neq -b$

Además $x^*y=x-2y$

Halle $6\Delta 2$

A) 2/3 B) 1/4 C) 1/6
D) 4/5 E) 1/9

Resolución

Se pide el resultado en $6\,\Delta 2$

Se sabe que

$$a\,\Delta\,b=\frac{a*b}{a+b};\ a\neq -b\quad\wedge\quad x*y=x-2y$$

Aplicamos las reglas de definición en

$$6\Delta 2=\frac{6*2}{6+2}=\frac{6-2(2)}{6+2}$$

$$\therefore\ 6\Delta 2=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

Dado que

$$a\,\Delta\,b=\sqrt{\frac{a*b}{a-b}};\quad a\neq b$$

$m^*n=m+2n$

Halle el valor de

$$E=\frac{8\,\Delta\,4}{2\,\Delta 1}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Se pide el valor de $E=\dfrac{8\Delta 4}{2\Delta 1}$.

De la expresión pedida, iremos calculando por partes según los datos.

$$8\Delta 4=\sqrt{\frac{8*4}{8-4}}=\sqrt{\frac{8+2(4)}{8-4}}=2$$

$$2\,\Delta 1=\sqrt{\frac{2*1}{2-1}}=\sqrt{\frac{2+2(1)}{2-1}}=2$$

Reemplazamos

$$E=\frac{8\Delta 4}{2\Delta 1}=\frac{2}{2}$$

$\therefore\ E=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

Si se cumple

ⓐ—ⓑ $=\dfrac{a+b}{2}$

ⓜ╲ⓝ $=\dfrac{n-m}{2}$

Además

③—ⓧ $=5$

ⓨ╲⑥ $=-1$

Halle $\boxed{y-x}$, si $\boxed{m}=(m+1)m$

A) 1 B) 2 C) 0
D) 3 E) 5

Resolución

Se pide hallar el resultado de $\boxed{y-x}$

Para hallar lo pedido se necesita conocer el valor de *y* y *x*, los cuales encontraremos a partir de las reglas de definición que son datos y de lo siguiente:

$$3 \text{—} \textcircled{x} = 5 \quad \wedge \quad \textcircled{y} \diagdown \textcircled{6} = -1$$

$$\frac{3+x}{2}=5 \qquad \frac{6-y}{2}=-1$$

$$x=7 \qquad y=8$$

Luego, con el dato $\boxed{m}=m(m+1)$ hallamos

$$\boxed{y-x}=\boxed{1}=1(2)=2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 35

Si definimos

$$a \lhd b=\sum_{i=a}^{b}(2i-1); \quad a,b\in \mathbb{Z}$$

calcule $M=(4\lhd 15)+(16\lhd 30)$

Obs.: Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 14
B) 12
C) 13
D) 18
E) 15

Resolución

Se pide la suma de cifras del valor de *M*, donde

$$M=(4\lhd 15)+(16\lhd 30)$$

Se sabe que

$$a \lhd b=\sum_{i=a}^{b}(2i-1); \quad a,b\in \mathbb{Z}$$

Aplicamos la regla de definición en la expresión *M*.

$$M=\sum_{i=4}^{15}(2i-1)+\sum_{i=16}^{30}(2i-1)$$

$$M=\underbrace{[2(4)-1+2(5)-1+2(6)-1+...+2(15)-1]}_{(15-4)+1=12\text{ sumandos}}+...$$

$$+\underbrace{[2(16)-1+2(17)-1+2(18)-1+\cdots+2(30)-1]}_{(30-16)+1=15\text{ sumandos}}$$

Se observa al operar parcialmente que

$$M=\underbrace{(7+9+11+\cdots+29)}_{12\text{ sumandos}}+\underbrace{(31+33+35+\cdots+59)}_{15\text{ sumandos}}$$

El bloque de 15 sumandos continúa al bloque de 12 sumandos, entonces

$$M=\underbrace{7+9+11+\cdots+29+31+33+35+\cdots+59}_{27\text{ sumandos}}$$

$$M=\left(\frac{7+59}{2}\right)\times 27$$

$$M=891$$

Por lo tanto, la suma de cifras de *M* es 18.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 36

Se define la operación (*), en el conjunto $A=\{1;2;3;4;5;6\}$, para los casos (I) y (II) y con la siguiente ley de orden de prioridad.

I. $a^*b=2a+b \leftrightarrow a<b$

II. $a^*b=2a-b \leftrightarrow a\geq b$

III. $a^*b=\dfrac{a+b-1}{2} \leftrightarrow$ en otros casos

Calcule $E=[(4^*5)^*(3^*2)]^*(1^*3)$

A) 6
B) 10
C) 13
D) 9
E) 7

Resolución

Se pide el resultado de la expresión *E*.
Se cumple:

$\forall\ a; b \in A/A=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ que:

$$\begin{cases} a^*b=2a+b \leftrightarrow a<b \\ a^*b=2a-b \leftrightarrow a\geq b \end{cases}$$

$$a^*b=\frac{a+b-1}{2} \leftrightarrow \text{ en otros casos}$$

En la expresión *E*, comenzamos a realizar los cálculos de forma parcial, es decir

$$\overset{a<b}{4*5=2(4)+5=13}$$

$$\overset{a>b}{3*2=2(3)-2=4}$$

$$\overset{a<b}{1*3=2(1)+3=5}$$

Reemplazando en

$$\begin{array}{l} E=[(4^*5)^*(3^*2)]^*(1^*3) \\ \qquad\ \ \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ E=[\ \underset{\notin \text{a} A}{13}\ \ ^*\ \ 4\ \ ]^*\ \ 5 \end{array}$$

$$E=\left[\frac{13+4-1}{2}\right]^*5$$

$$E=\underset{\notin \text{a} A}{8}*5$$

$$\therefore\ \ E=\frac{8+5-1}{2}=6$$

Clave $\boxed{A}$

PROBLEMA N.° 37

Si

$$a\,\Delta\,b=\begin{cases} \dfrac{a-b}{a^2-b^2}\ ; a\neq b \\ \quad 0 \quad ; a=b \end{cases}$$

Halle x en $5\Delta x=2\Delta(1\Delta(-2\Delta 3))$

Obs.: $x\neq 5$

A) 6
B) 7
C) 2
D) 0
E) −3

Resolución

Se pide el valor de x; $x\neq 5$

Del dato

$$a\,\Delta\,b=\begin{cases} \dfrac{a-b}{a^2-b^2}\ ; a\neq b \\ \quad 0 \quad ; a=b \end{cases}$$

Se reduce

$$\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{\cancel{a-b}}{(a+b)(\cancel{a-b})}=\frac{1}{a+b}$$

Entonces

$$a\,\Delta\,b=\begin{cases}\dfrac{1}{a+b} & ;\ a\neq b\\ 0 & ;\ a=b\end{cases}$$

Ahora, aplicamos la operación para reducir la expresión

$$5\Delta x=2\Delta(1\Delta(-\overbrace{2\Delta 3}^{\neq}))$$

$$5\Delta x=2\Delta(\overbrace{1\Delta 1}^{=})$$

$$5\Delta x=\overbrace{2\Delta 0}^{\neq}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \neq 5\text{(dato)}}}{5}\Delta x=\frac{1}{2}$$

De la definición

$$\frac{1}{5+x}=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow\ 5+x=2$$

$\therefore\ x=-3$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 38

Considerando las operaciones:

$A\ \#\ B=A+B-N$; si $1<N<5$

$A\ \#\ B=A+B+N$; si $5<N<10$

donde N es la suma de las cifras de los operandos (A y B).

Halle $(12\ \#\ 15)\ \#\ (3\ \#\ 1)$

A) 36 B) 40

C) 45

D) 48 E) 50

Resolución

Se pide el valor de

$$(12\ \#\ 15)\ \#\ (3\ \#\ 1)$$

Se sabe que N: suma de cifras de A y B en

$A\ \#\ B=A+B-N$; si $1<N<5$

$A\ \#\ B=A+B+N$; si $5<N<10$

Aplicamos en la expresión pedida, es decir

$$12\ \#\ 15=12+15+(\overbrace{1+1+2+5}^{9})=36$$

$$\rightarrow\ 3\ \#\ 1=3+1-(\underbrace{3+1}_{4})=0$$

Luego

$$(12\ \#\ 15)\ \#\ (3\ \#\ 1)=36\ \#\ 0$$

$$(12\ \#\ 15)\ \#\ (3\ \#\ 1)=36+0+(\overbrace{3+6+0}^{9})$$

$\therefore\ (12\ \#\ 15)\ \#\ (3\ \#\ 1)=45$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Si se cumple $\boxed{x}=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x\neq -3$

Además $\boxed{\boxed{\boxed{1+2n}}}=16$

Halle $M=\boxed{n^2-1}$

A) 147 B) 114

C) 140

D) 158 E) 161

Resolución

Se pide el valor de la expresión

$$M=\boxed{n^2-1}$$

Se sabe que

$$\boxed{\boxed{\boxed{1+2n}}}=16 \qquad \text{(I)}$$

Para conocer el valor de M, necesitamos hallar el valor de n de (I) a partir del dato

$$\boxed{x}=\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{\cancel{(x+3)}\,(x-3)}{\cancel{x+3}}$$

$$\underset{+3}{\boxed{x}=x-3}$$

+3 ← el n de (I) se encuentra dentro del operador □, por ello resolveremos de afuera hacia dentro.

$$\underset{\substack{+3(3)\\ \uparrow \\ \text{3 operadores}}}{\boxed{\boxed{\boxed{1+2n}}}=16} \;\rightarrow\; 1+2n=16+3(3)$$

$$2n=24$$

$$n=12$$

Finalmente

$$M=\boxed{n^2-1}=\boxed{12^2-1}=\boxed{143}$$

$\therefore\;\; M=143-3=140$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

Se define la operación

$$\textcircled{2x+1}=\frac{2x+3}{2}$$

Halle el valor de n en $\textcircled{\textcircled{\textcircled{2}}}=\textcircled{2n}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 4

Resolución

Se pide el valor de n

Del dato

$$\underset{+2\div2}{\textcircled{2x+1}=\frac{2x+3}{2}}$$

Aplicamos la secuencia de operaciones para hallar el resultado en

$$\textcircled{2n}=\underset{+2\div2}{\textcircled{\textcircled{\textcircled{2}}}=\textcircled{\textcircled{2}}}\overset{+2\div2}{=}\underset{+2\div2}{\textcircled{2}=2}$$

De lo anterior se puede deducir que en

$$\textcircled{2n}=2 \;\rightarrow\; \frac{2n+2}{2}=2$$

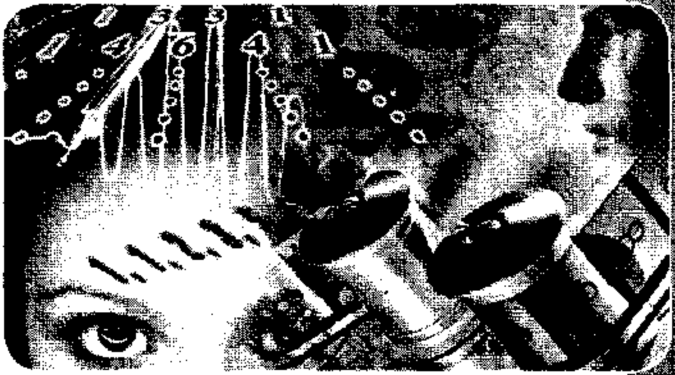
$\therefore\;\; n=1$

Clave **A**

Capítulo

13

Sucesiones



En la vida cotidiana se observan un sinnúmero de situaciones donde aparece la noción de sucesión, tales como los días de la semana, los meses del año, el gasto acumulado por cada día de transporte, el crecimiento de la población a través de los años, etc. El presente capítulo desarrolla la noción básica de sucesión y su clasificación, dentro de la cual veremos las sucesiones aritméticas, cuadráticas y geométricas, sea finita o infinita decreciente, y, particularmente, en las diferentes formas de encontrar el término enésimo, según cada tipo, ya sea mediante criterios prácticos o con el uso del número combinatorio para sucesiones de mayor grado.

Capítulo 13

Sucesiones

PROBLEMA N.° 1

Indique el término o letra que continúa en cada sucesión.

	Respuesta
a. A, C, F, J, ...	Ñ
b. B, D, H, N, ...	U
c. A, B, E, F, I, J, ...	M
d. D, C, S, O, D, ...	D
e. E, F, M, A, M, ...	J
f. AB, BD, DG, GK, ...	KO
g. $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{I}$; $\overline{FD}$, ...	$\overline{FBE}$
h. 2; 3; 8; 17; 30; ...	47
i. 3; 3; 6; 2; 8; ...	8/5
j. 1; 2; 4; 7; 28; ...	33
k. A, C, F, J, Ñ, ...	T

Resolución

Se pide el término que continúa en cada sucesión

a. 1.° 2.° 3.° 4.°

A; C; F; J

Según el lugar que ocupa cada letra en el alfabeto, tenemos

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & 5.^{\circ} \\
 & A & ; & C & ; & F & ; & J & ; & ? \\
\text{números triangulares} \rightarrow & 1 & ; & 3 & ; & 6 & ; & 10 & ; & \boxed{15} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
 & \frac{1(2)}{2} & ; & \frac{2(3)}{2} & ; & \frac{3(4)}{2} & ; & \frac{4(5)}{2} & ; & \boxed{\frac{5(6)}{2}}
\end{array}$$

t_5=letra de lugar 15 en el alfabeto

$\therefore$ t_5=Ñ

b.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & 5.^{\circ} \\
B & ; & D & ; & H & ; & N & ; & ? \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
2 & & 4 & & 8 & & 14 & & \boxed{22} \\
 & \underset{+2}{\frown} & & \underset{+4}{\frown} & & \underset{+6}{\frown} & & \underset{+8}{\frown} &
\end{array}$$

t_5=letra de lugar 22 en el alfabeto

$\therefore$ t_5=U

c.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & 5.^{\circ} & & 6.^{\circ} & & 7.^{\circ} \\
A & ; & B & ; & E & ; & F & ; & I & ; & J & ; & ? \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
1 & ; & 2 & ; & 5 & ; & 6 & ; & 9 & ; & 10 & ; & \boxed{13} \\
 & \underset{+1}{\frown} & & \underset{+3}{\frown} & & \underset{+1}{\frown} & & \underset{+3}{\frown} & & \underset{+1}{\frown} & & \underset{+3}{\frown} &
\end{array}$$

t_7=letra de lugar 13 en el alfabeto

$\therefore$ t_7=M

d. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°

D ; C ; S ; O ; D ; ?

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↑

Dos ; **Cuatro** ; **Seis** ; **Ocho** ; **Diez** ; **Doce**

$\therefore\ t_6=\text{D}$

e. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°

E ; F ; M ; A ; M ; ?

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↑

Enero ; **Febrero** ; **Marzo** ; **Abril** ; **Mayo** ; **Junio**

$\therefore\ t_6=\text{J}$

f. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.°

AB ; BD ; DG ; GK ; ?

↓ ↓ ↓ ↓ ↑

+2 +3 +4 +5

12 24 47 711 1116

+1 +2 +3 +4

Luego,

- letra de lugar 11 en el alfabeto: K
- letra de lugar 16 en el alfabeto: O

$\therefore\ t_5=\text{KO}$

g. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.°

$\overline{\text{A}}$; $\overline{\text{B}}$; $\overline{\text{I}}$; $\overline{\text{FD}}$; $\overline{?}$

la línea (−) sobre las letras indica que se trata de numerales

↓ ↓ ↓ ↓ ↑

1 2 9 64 625

↓ ↓ ↓ ↓ ↑

1^0 2^1 3^2 4^3 5^4

consecutivos

Entonces

- letra de lugar 6 en el alfabeto: F
- letra de lugar 2 en el alfabeto: B
- letra de lugar 5 en el alfabeto: E

$\therefore\ t_5=\overline{\text{FBE}}$

h. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°

2 ; 3 ; 8 ; 17 ; 30 ; 47

+1 +5 +9 +13 +17

+4 +4 +4 +4

$\therefore\ t_6=47$

i. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°

3 ; 3 ; 6 ; 2 ; 8 ; 8/5

÷1 ×2 ÷3 ×4 ÷5

se alternan las operaciones ÷ y × con números consecutivos

$\therefore\ t_6=8/5$

j. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°

1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 28 ; 33

+1 ×2 +3 ×4 +5

se alternan las operaciones + y × con números consecutivos

$\therefore\ t_6=33$

k. 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°

A ; C ; F ; J ; Ñ ; ?

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↑

1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↑

$\frac{1(2)}{2}$; $\frac{2(3)}{2}$; $\frac{3(4)}{2}$; $\frac{4(5)}{2}$; $\frac{5(6)}{2}$; $\frac{6(7)}{2}$

→ t_6=letra de lugar 21 en el alfabeto

$\therefore\ t_6=\text{T}$

PROBLEMA N.° 2

Calcule el término enésimo de cada una de las sucesiones siguientes:

		Respuesta
a.	6; 10; 14; 18; 22; ...	$4n+2$
b.	9; 14; 19; 24; 29; ...	$5n+4$
c.	−4; −7; −10; −13; ...	$-3n-1$
d.	$\frac{2}{5};\frac{4}{7};\frac{6}{9};\frac{8}{11};\ \dots$	$\dfrac{2n}{2n+3}$
e.	5; 7; 11; 17; 25; ...	n^2-n+5

Resolución

Se pide el término enésimo de las sucesiones: t_n

a.
$$\begin{array}{cccccccccc} 1.^\circ && 2.^\circ && 3.^\circ && 4.^\circ && 5.^\circ & \\ 6 & ; & 10 & ; & 14 & ; & 18 & ; & 22 & ;\ \dots \\ & +4 && +4 && +4 && +4 && \end{array}$$

sucesión lineal

$$t_n=4n+(6-4)$$
$$\therefore\ t_n=4n+2$$

b.
$$\begin{array}{cccccccccc} 1.^\circ && 2.^\circ && 3.^\circ && 4.^\circ && 5.^\circ & \\ 9 & ; & 14 & ; & 19 & ; & 24 & ; & 29 & ;\ \dots \\ & +5 && +5 && +5 && +5 && \end{array}$$

sucesión lineal

$$t_n=5n+(9-5)$$
$$\therefore\ t_n=5n+4$$

c.
$$\begin{array}{cccccccc} 1.^\circ && 2.^\circ && 3.^\circ && 4.^\circ & \\ -4 & ; & -7 & ; & -10 & ; & -13 & ;\ \dots \\ & -3 && -3 && -3 && \end{array}$$

sucesión lineal

$$t_n=-3n+(-4-(-3))$$
$$t_n=-3n+(-4+3)$$
$$\therefore\ t_n=-3n-1$$

d.
$$\begin{array}{cccccccc} 1.^\circ && 2.^\circ && 3.^\circ && 4.^\circ & \\ \dfrac{2}{5} & ; & \dfrac{4}{7} & ; & \dfrac{6}{9} & ; & \dfrac{8}{11} & ;\ \dots \end{array}$$

Se observa que el denominador de cada término es 3 unidades más que su respectivo numerador, y estos son el doble del lugar del término respectivo, es decir,

$$\begin{array}{ccccccc} 1.^\circ && 2.^\circ && 3.^\circ && 4.^\circ\ \dots \\ +3\Big(\dfrac{2\times1}{5} & ; & +3\Big(\dfrac{2\times2}{7} & ; & +3\Big(\dfrac{2\times3}{9} & ; & +3\Big(\dfrac{2\times4}{11} ;\ \dots \end{array}$$

Luego, el término enésimo de la sucesión será

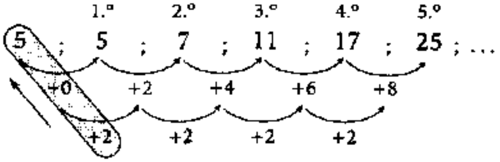
$$t_n=\frac{2\times n}{2n+3}\Big)+3$$

$$\therefore\ t_n=\frac{2n}{2n+3}$$

e.
$$\begin{array}{cccccccccc} 1.^\circ && 2.^\circ && 3.^\circ && 4.^\circ && 5.^\circ & \\ 5 & ; & 7 & ; & 11 & ; & 17 & ; & 25 & ;\ \dots \\ & +2 && +4 && +6 && +8 && \\ && +2 && +2 && +2 &&& \end{array}$$

sucesión cuadrática

Aplicando la regla práctica para calcular el t_n, haremos lo siguiente:



El término enésimo tiene la forma

$$t_n=An^2+Bn+C$$

donde

$$A=\frac{+2}{2}=1;\quad B=0-A=-1;\quad C=5$$

$$\therefore\ t_n=n^2-n+5$$

PROBLEMA N.° 3

Calcule el valor de $K+A$ si

- $(2K+1)$; $3K$; $(8K+11)$; ...
  es una sucesión de 1.^{er} orden y
- $(2A+1)$; $(4A+2)$; $(7A+5)$; ...
  es una progresión geométrica, donde $A \in \mathbb{N}$

A) -2 B) 1 C) 3
D) -3 E) -1

Resolución

Se pide el valor de $K+A$.

- Del primer dato se sabe que la sucesión mostrada es una sucesión de 1.^{er} orden (P.A.)

$$\begin{array}{ccccccc} 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & \\ (2K+1) & ; & 3K & ; & (8K+11) & ; & \dots \end{array}$$

En toda P.A., para tres términos consecutivos, se cumple que

$$(2K+1)+(8K+11)=2(3K)$$

$$10K+12=6K$$

$$4K=-12$$

$$\rightarrow K=-3$$

- En el segundo dato se muestra una progresión geométrica (P.G.).

$$\begin{array}{cccccc} 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & \\ (2A+1) & ; & (4A+2) & ; & (7A+5) & ; \dots A \in \mathbb{N} \end{array}$$

En toda P.G. para tres términos consecutivos, se cumple que

$$(2A+1)(7A+5)=(4A+2)^2$$

$$14A^2+10A+7A+5=16A^2+16A+4$$

$$14A^2+17A+5=16A^2+16A+4$$

Pasamos todo al segundo miembro

$$\begin{array}{ll} 2A^2-A-1=0 & \\ 2A & +1 \\ A & -1 \end{array}$$

$$\rightarrow (2A+1)(A-1)=0$$

- $2A+1=0 \rightarrow A=-1/2$ ✗ contradice el dato
- $A-1=0 \rightarrow A=1$ ✓

Finalmente

$$K+A=-3+1$$

$$\therefore K+A=-2$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 4

Calcule x si

$3a^{75}$; $7a^{72}$; $11a^{69}$; $15a^{66}$;...; $(x+49)a^{(49-x)}$

A) 26
B) 30
C) 34
D) 33
E) 31

Resolución

Se pide el valor de x en

$$\begin{array}{cccccc} 1.^{\circ} & 2.^{\circ} & 3.^{\circ} & 4.^{\circ} & \dots & n.^{\circ} \\ 3a^{75}; & 7a^{72}; & 11a^{69}; & 15a^{66}; & \dots; & (x+49)a^{(49-x)} \end{array}$$

Como se trata de una sucesión, existe una relación entre los términos y su respectivo lugar, por ello, al hallar el valor de n encontramos el valor de x.

Con los coeficientes y exponentes de cada término formaremos la siguiente sucesión:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\multicolumn{11}{c}{\overbrace{\hspace{20em}}^{+20}} \\
1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots & & n.^{\circ} \\
(3+75) & ; & (7+72) & ; & (11+69) & ; & (15+66) & ; & \dots & ; & (x+49+49-x) \\
78 & ; & 79 & ; & 80 & ; & 81 & ; & \dots & ; & 98 \\
\multicolumn{11}{c}{\underbrace{\hspace{20em}}_{+20}}
\end{array}$$

$\rightarrow$ $n=21$

Luego, con los coeficientes formamos la sucesión

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots & & 21.^{\circ} \\
3 & ; & 7 & ; & 11 & ; & 15 & ; & \dots & ; & (x+49) \\
& \underset{+4}{\smile} & & \underset{+4}{\smile} & & \underset{+4}{\smile} & & & & &
\end{array}$$

En donde

$t_n=4n+(3-4)$

$t_n=4n-1$

Para

$n=21$

$\rightarrow t_{21}=4(21)-1=x+49$

$83=x+49$

$\therefore\ x=34$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 5

Calcule el tercer término de 3 cifras en la siguiente sucesión: 3; 6; 11; 18; ...

A) 146 B) 140 C) 136

D) 165 E) 153

Resolución

Se pide el tercer término de 3 cifras de la sucesión

3; 6; 11; 18; ...

Los términos de la sucesión se pueden escribir de la forma siguiente

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \cdots & & n.^{\circ} \\
3 & ; & 6 & ; & 11 & ; & 18 & ; & \dots & ; & \bigcirc \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
1^2+2 & & 2^2+2 & & 3^2+2 & & 4^2+2 & & \cdots & & n^2+2
\end{array}$$

para que sean de 3 cifras se debe cumplir que

$$n^2+2\geq 100$$

$$\downarrow$$

de donde 10^2+2 $\rightarrow$ 1.^{er} término de 3 cifras

11^2+2 $\rightarrow$ 2.^{o} término de 3 cifras

12^2+2 $\rightarrow$ 3.^{er} término de 3 cifras

Por lo tanto, el tercer término de 3 cifras es $12^2+2=146$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Dadas las siguientes sucesiones:

5; 8; 11; 14; ...

166; 162; 158; 154; ...

¿Cuál será el término común a ambas, sabiendo que ocupan el mismo lugar?

A) 70 B) 73 C) 74

D) 80 E) 76

Resolución

Se pide el término común a ambas sucesiones que ocupan el mismo lugar: t.

Como se trata del mismo término (en valor y lugar) para ambas sucesiones, formaremos una nueva sucesión con la diferencia de sus respectivos términos, es decir,

$$\begin{array}{lcccccc} & 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & \ldots & n.^\circ \\ S_1: & 5\ ; & 8\ ; & 11\ ; & 14\ ; & \ldots\ ; & t \\ S_2: & 166\ ; & 162\ ; & 158\ ; & 154\ ; & \ldots\ ; & t \end{array}$$

de donde se obtiene al restar

$$\begin{array}{lcccccc} & 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & \ldots & n.^\circ \\ S: & 161\ ; & 154\ ; & 147\ ; & 140\ ; & \ldots\ ; & 0 \\ & \underset{-7}{\frown} & \underset{-7}{\frown} & \underset{-7}{\frown} & & & \end{array}$$

$$t_n=-7n+(161-(-7))=0$$

$$-7n+168=0$$

$$7n=168$$

$$\rightarrow\ n=24$$

Luego en la sucesión:

$$\begin{array}{lcccccc} & 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & \ldots & 24.^\circ \\ S_1: & 5\ ; & 8\ ; & 11\ ; & 14\ ; & \ldots\ ; & t \\ & \underset{+3}{\frown} & \underset{+3}{\frown} & \underset{+3}{\frown} & & & \end{array}$$

$$\rightarrow\ t_n=3n+2$$

Para

$$n=24$$

$$\rightarrow\ t_{24}=3(24)+2=t$$

$$\therefore\ t=74$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Se tiene una sucesión de primer orden cuya razón es 7. Dicha sucesión consta de 41 términos donde el término de lugar 21 es 145. Si la diferencia entre el último y el primero es 280, calcule la diferencia entre los términos de lugares 32 y 10.

A) 100
B) 140
C) 154
D) 137
E) 156

Resolución

Se pide la diferencia entre los términos de lugares 32 y 10.

Según los datos, se tiene

$$\begin{array}{ccccc} 1.^\circ & \ldots & 21.^\circ & \ldots & 41.^\circ \\ a\ ; & \ldots\ ; & 145\ ; & \ldots\ ; & b \end{array}$$

donde

$$b-a=280 \qquad \text{(I)}$$

pero

$$b+a=2(145)=290 \qquad \text{(II)}$$

(propiedad)

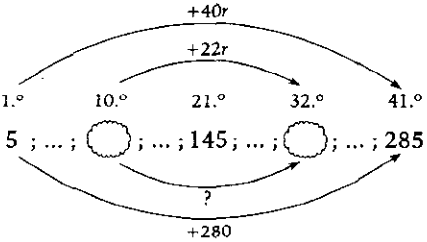
(I) + (II)

$$2b=570\ \rightarrow\ b=285$$

(II) − (I)

$$2a=10\ \rightarrow\ a=5$$

Luego



Del esquema

$40r=280$

$r=7$

$\rightarrow t_{32}-t_{10}=22r$

$\therefore t_{32}-t_{10}=154$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Las sucesiones:
124; 120; 116; 112; ... y −2; 1; 4; 7; ...
Tienen igual cantidad de términos y, además, sus últimos términos son iguales. El penúltimo término de la primera sucesión es:

A) 56 B) 59 C) 40
D) 60 E) 45

Resolución

Se pide el penúltimo término de la primera sucesión.

Dato

$$\begin{array}{lcccccc} & 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & \dots & n.^\circ \\ 1.^a\ \text{sucesión:} & 124; & 120; & 116; & 112; & \dots; & t \\ 2.^a\ \text{sucesión:} & -2; & 1; & 4; & 7; & \dots; & t \end{array}$$

Al ser los últimos términos iguales, generaremos una nueva sucesión, cuyos términos serán la diferencia de los términos correspondientes de ambas sucesiones, tal que

$$\begin{array}{cccccc} 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & \dots & n.^\circ \\ 126; & 119; & 112; & 105; & \dots; & 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\overset{-7}{\curvearrowright}\quad \overset{-7}{\curvearrowright}\quad \overset{-7}{\curvearrowright}\quad \dots\quad \overset{-7}{\curvearrowright}}_{18\ \text{veces}}$$

De donde

$$\overset{+18r}{\overbrace{\begin{array}{cccccc} 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & \dots & n.^\circ \\ 126; & 119; & 112; & 105; & \dots; & 0 \end{array}}}$$

$$\underset{+18(-7)}{\underbrace{126 \longrightarrow 0}}$$

$n=1+18$

$\rightarrow n=19$

Entonces, lo pedido es el t_{18} de la primera sucesión

$$\overset{17+r}{\overbrace{\begin{array}{cccccc} 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & \dots & 18.^\circ \\ 124; & 120; & 116; & 112; & \dots; & \bigcirc \end{array}}}$$

$$\underbrace{\overset{-4}{\curvearrowright}\quad \overset{-4}{\curvearrowright}\quad \overset{-4}{\curvearrowright}\quad \dots\quad \overset{-4}{\curvearrowright}}_{17\ \text{veces}}$$

$t_{18}=124+17(-4)$

$\therefore t_{18}=56$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 9

¿Cuántos términos de tres cifras hay en la siguiente sucesión?
3; 4; 11; 30; 67; 128; ...

A) 8 B) 5 C) 4
D) 10 E) 6

Resolución

Se pide cantidad de términos de 3 cifras.

Del dato, calculamos el t_n

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & 5.^{\circ} & & 6.^{\circ} & \ldots & & & n.^{\circ} \\
3 & ; & 4 & ; & 11 & ; & 30 & ; & 67 & ; & 128 & ; & \ldots & ; & t_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(0^3+3) & ; & (1^3+3) & ; & (2^3+3) & ; & (3^3+3) & ; & (4^3+3) & ; & (5^3+3) & ; & \ldots & ; & (n-1)^3+3
\end{array}$$

Como se pide la cantidad de términos de 3 cifras, se debe cumplir que

$$\begin{gathered}
100 \leq t_n < 1000 \\
100 \leq (n-1)^3+3 < 1000 \\
97 \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10}}{(n-1)^3} < 997
\end{gathered}$$

$$\left.\begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}\right\} \text{5 valores para } n \longrightarrow \begin{array}{l} \text{cada valor de } n \\ \text{genera un término} \\ \text{en la sucesión} \end{array}$$

Por lo tanto, existen 5 términos de 3 cifras.

Clave B

PROBLEMA N.° 10

Para imprimir un libro se emplean 258 cifras; luego, se elimina el último capítulo que tenía 28 páginas y se suplanta por otro de 40 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el nuevo libro?

A) 140 B) 120 C) 121 D) 123 E) 134

Resolución

Se pide la cantidad de páginas del nuevo libro.

Dato: se emplearon 258 cifras para enumerar el libro.

Hallamos primero la cantidad de páginas del libro, de la siguiente manera:

$$\text{Pág.: }\underbrace{\underbrace{1;2;3;\ldots;9}_{9\text{ cifras}};\underbrace{10;11;\ldots;99}_{180\text{ cifras}};\underbrace{100;101;\ldots;\boxed{122}}_{69\text{ cifras}=3(\underset{\text{cantidad de páginas de 3 cifras}}{23})}}_{258\text{ cifras (dato)}}$$

Como se quitan las últimas 28 páginas y se reemplazan por otras 40, es como si solo se aumentara la diferencia, es decir, 12 páginas más.

Por lo tanto, el total de páginas es

$122+12=134$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

Dadas las siguientes sucesiones:
S_1: 11; 18; 25; 32; ... ; 844
S_2: 4; 13; 22; 31; ... ; 1165
Halle cuántos términos son comunes a ambas.

A) 10
B) 12
C) 13
D) 16
E) 14

Resolución

Se pide la cantidad de términos comunes a las sucesiones. Se sabe que

S_1: 11 ; 18 ; 25 ; 32 ; ... ; 844
S_2: 4 ; 13 ; 22 ; 31 ; ... ; 1165

Hallamos el primer término común en

$$S_1:\ \overset{1.°}{11}\underset{+7}{;}\overset{2.°}{18}\underset{+7}{;}\overset{3.°}{25}\underset{+7}{;}\overset{4.°}{32}\underset{+7}{;}\overset{5.°}{39}\underset{+7}{;}\overset{6.°}{46}\underset{+7}{;}\overset{7.°}{53}\underset{+7}{;}\overset{8.°}{60}\underset{+7}{;}\overset{9.°}{\mathbf{67}};\ \ldots$$

$$S_2:\ 4\underset{+9}{;}13\underset{+9}{;}22\underset{+9}{;}31\underset{+9}{;}40\underset{+9}{;}49\underset{+9}{;}58\underset{+9}{;}\mathbf{67}$$

primer término común

Además, la razón de la sucesión de términos comunes se calcula con

$r=\text{MCM}(7;9)=63$

De donde

$$S_{\text{comunes}}:\ \overset{1.°}{67}\underset{+63}{;}\overset{2.°}{130}\underset{+63}{;}\ \ldots\ \rightarrow\ \boxed{t_n=63n+4}$$

Para que estos términos sean comunes a ambas sucesiones, deben estar comprendidos entre el primer y el último término de cada sucesión, para ello solo bastará que $t_{n(\text{comunes})}\leq 844$.

$63n+4\leq 844$

(-4): $63n\leq 840$

$\times\dfrac{1}{63}$: $n\leq\dfrac{840}{63}$

$n\leq 13,\widehat{3}$

$\rightarrow\ \boxed{n=13}$

$$S_{\text{comunes}}:\ \overset{1.°}{67}\underset{+63}{;}\overset{2.°}{130}\underset{+63}{;}\ \ldots\ \underset{+63}{;}\ \overset{13.°}{\bigcirc}$$

Por lo tanto, la cantidad de términos comunes es 13.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

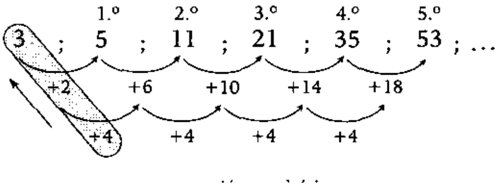
Dada la siguiente sucesión de 21 términos, calcule cuántos términos terminan en la cifra 5? 5; 11; 21; 35; 53; ...

A) 7 B) 10 C) 11
D) 8 E) 9

Resolución

Se pide la cantidad de términos que terminen en la cifra 5.

En la sucesión planteada hallamos el t_n



$$t_n=An^2+Bn+C$$

Donde

$$A=\frac{+4}{2}=2$$

$$B=2-A=0$$

$$C=3$$

Reemplazamos

$$t_n=2n^2+3=\ ...5 \text{ (condición del problema)}$$

$$2n^2=\ ...2$$

$$\rightarrow \underbrace{1;\ 4;\ 6;\ 9;\ 11;\ 14;\ 16;\ 19;\ 21}_{9 \text{ valores de } n}$$

Por lo tanto, 9 términos terminan en cifra 5.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 13

En las 100 últimas páginas de un libro, se ha utilizado 351 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 1049 B) 1050 C) 1051
D) 1048 E) 1047

Resolución

Se pide el número de páginas del libro.

Dato: se han utilizado 351 cifras en las últimas 100 páginas.

Del dato podemos suponer que las 100 páginas son de 3 cifras, pero, con ello se utilizarían 3(100)=300 cifras, (sobrarían cifras); si todas fueran de 4 cifras, se utilizarían 4(100)=400 cifras (se pasaron en la cantidad de cifras). Entonces

$$\text{últimas 100 páginas}\quad \underbrace{\overbrace{\overbrace{\overline{abc};\ \ldots;\ 999}^{(100-x)\text{ páginas}};\ \overbrace{1000;\ \ldots;\ \overline{mnpq}}^{x\text{ páginas}}}^{100\text{ páginas}}}_{351\text{ cifras}=3(100-x)+4x} \leftarrow \text{última página}$$

$$300-3x+4x=351$$

$$\rightarrow x=51$$

Luego

$$\text{última página}=999+x$$

$$\overline{mnpq}=1050$$

Por lo tanto, el número total de páginas es 1050.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 14

En la siguiente sucesión:
9; 14; 19; 24; ...
¿Cuántos de sus términos tienen 3 cifras?

A) 170   B) 190   C) 1800
D) 169   E) 180

Resolución

Se pide cantidad de términos de 3 cifras en la sucesión:

9; 14; 19; 24; ...

Como lo que se pide es una característica (que tenga 3 cifras) de los términos, hallamos el término enésimo de la sucesión.

$$\overset{1.°}{9}\ ;\ \overset{2.°}{14}\ ;\ \overset{3.°}{19}\ ;\ \overset{4.°}{24}\ ;\ \overset{5.°}{\ldots}$$
$$+5 \quad +5 \quad +5$$

$$\rightarrow\ t_n=5n+4$$

Luego

$$100 \le t_n < 1000 \text{ (condición del problema)}$$
$$100 \le 5n+4 < 1000$$
$$(-4):\ 96 \le 5n < 996$$
$$\times\frac{1}{5}:\ \frac{96}{5} \le n < \frac{995}{5}$$
$$19{,}2 \le n < 199{,}2$$
$$\rightarrow\ n=\underbrace{\{20;\ 21;\ \ldots;\ 199\}}_{\text{180 términos de 3 cifras}}$$

Por lo tanto, 180 de sus términos tienen 3 cifras.

Clave **E**

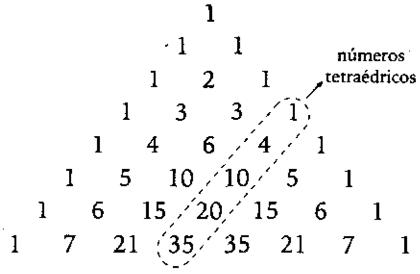
PROBLEMA N.° 15

En el triángulo de Pascal, calcule el vigésimo término de la sucesión de números tetraédricos.

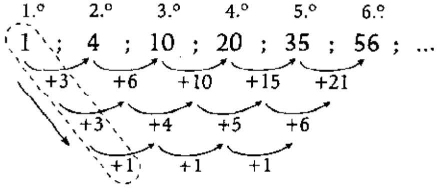
A) 1420
B) 1450
C) 1520
D) 1540
E) 1550

Resolución

Se pide el vigésimo término de la sucesión de números tetraédricos.
Ubicamos los números tetraédricos en el triángulo de Pascal

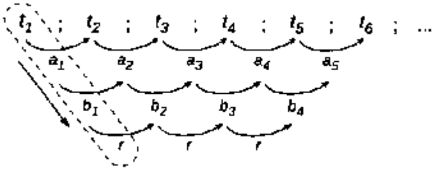


La sucesión que se forma con los números tetraédricos es



Recuerda

Para encontrar el t_n en sucesiones polinomiales de orden mayor a dos ($n > 2$) se puede utilizar el C_k^n (número combinatorio).



$$\boxed{t_n = t_1C_0^{n-1} + a_1C_1^{n-1} + b_1C_2^{n-1} + rC_3^{n-1}}$$

Donde:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!K!}$$

En donde su término enésimo es

$$t_n = 1C_0^{n-1} + 3C_1^{n-1} + 3C_2^{n-1} + 1C_3^{n-1}$$

$$t_n = 1\times\frac{\cancel{(n-1)}\,!}{\cancel{(n-1)}\,!\times 0!} + 3\times\frac{(n-1)!}{(n-2)!\times 1!} + 3\times\frac{(n-1)!}{(n-3)!\times 2!} + 1\times\frac{(n-1)!}{(n-4)!\times 3!}$$

Por la degradación de factoriales

$$t_n = 1 + 3\times\frac{(n-1)\cancel{(n-2)}\,!}{\cancel{(n-2)}\,!\times 1} + 3\times\frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)}\,!}{\cancel{(n-3)}\,!\times 2} + 1\times\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)}\,!}{\cancel{(n-4)}\,!\times 6}$$

$$\rightarrow \quad t_n = 1 + 3(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$$

Operamos y reducimos, obteniendo

$$t_n = \frac{n}{6}\left(n^2 + 3n + 2\right)$$

Luego, para $n=20$

$$t_{20} = \frac{20}{6}\left(20^2 + 3(20) + 2\right)$$

$\therefore \quad t_{20} = 1540$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

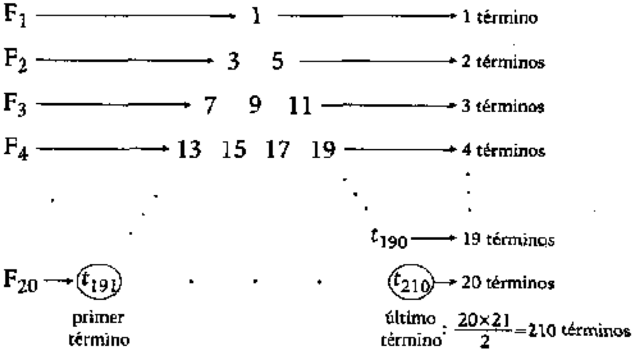
En el siguiente triángulo numérico, halle la suma del primer y último término de la fila veinte.

A) 900
B) 450
C) 801
D) 702
E) 800

$F_1 \longrightarrow 1$
$F_2 \longrightarrow 3 \quad 5$
$F_3 \longrightarrow 7 \quad 9 \quad 11$
$F_4 \longrightarrow 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$
$F_5 \longrightarrow 21 \quad 23 \quad 25 \quad 27 \quad 29$
$\quad \iddots \qquad \vdots \qquad \ddots$

Resolución

Se pide la suma del primer y último término de la fila 20 en el arreglo triangular mostrado



Al ubicar en línea y de forma ordenada los términos del arreglo numérico (números impares), resulta una sucesión conocida:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 1.° & & 2.° & & 3.° & & 4.° & & 5.° & & 6.° & & \ldots & & 191.° & & \ldots & & 210.° \\ \end{array}$$
$$\underbrace{1 \; ; \; 3 \; ; \; 5 \; ; \; 7 \; ; \; 9 \; ; \; 11 \; ; \; \ldots \; ; \; t_{191} \; ; \; \ldots \; ; \; t_{210}}_{\text{números impares}}$$

$\rightarrow \quad t_n = 2n - 1$

Asignamos valores obteniendo

$t_{191} = 2(191) - 1 = 381$

$t_{210} = 2(210) - 1 = 419$

Luego

$S = 381 + 419$

$\therefore \quad S = 800$

Clave E

PROBLEMA N.° 17

Calcule el término enésimo en la siguiente sucesión:

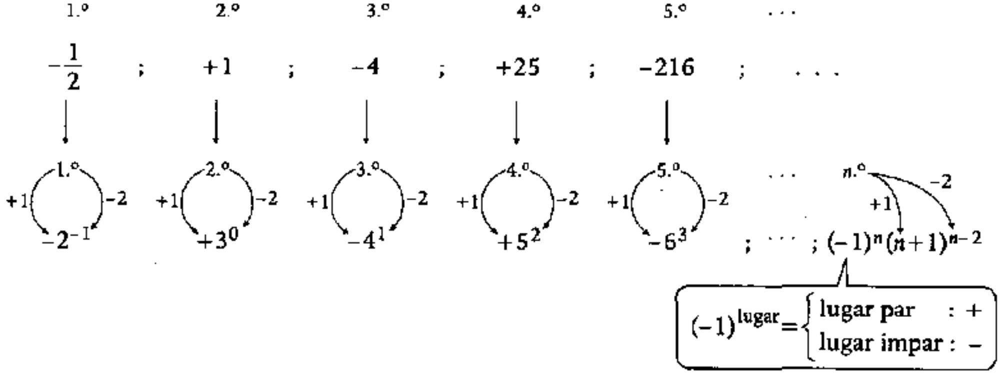
$-\frac{1}{2}; +1; -4; +25; -216; \ldots$

A) n^{-1} B) n^n C) $3n$ D) $4n-n$ E) $(-1)^n \cdot (n+1)^{(n-2)}$

Resolución

Se pide el término enésimo de la sucesión $-\frac{1}{2}$; $+1$; -4; $+25$; -216; ...

para encontrar el término enésimo en la sucesión, vamos a expresar cada uno de una forma común que los relacione y que permita generalizar.



$\therefore\ t_n=(-1)^n\times(n+1)^{n-2}$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 18

¿Cuántos términos de tres cifras que terminan en 5 presenta la siguiente sucesión?
13; 22; 31; 40; ...; 904

A) 12   B) 11   C) 10   D) 13   E) 9

Resolución

Se pide la cantidad de términos de 3 cifras que terminan en 5.

Hallamos el término enésimo de la sucesión y encontramos la cantidad de términos que presenta

$$\begin{array}{ccccccc} 1.^{\circ} & 2.^{\circ} & 3.^{\circ} & 4.^{\circ} & \dots & n.^{\circ} \\ 13 \; ; & 22 \; ; & 31 \; ; & 40 \; ; & \dots \; ; & 904 \\ \multicolumn{2}{c}{+9} & +9 & +9 & & \end{array}$$

$t_n=9n+(13-9)$

$t_n=9n+4=904$

$\rightarrow \; n=100$

Para que sea un término de 3 cifras: $n > 10$, además, los términos que terminan en cifra 5 los hallamos de la siguiente manera:

$t_n=9n+4=...5$

$9n=...1$

$\downarrow$

$$\left.\begin{array}{c} 19 \\ 29 \\ \vdots \\ 99 \end{array}\right\} \text{9 valores}$$

Por lo tanto, existen 9 términos de 3 cifras que terminan en cifra 5.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

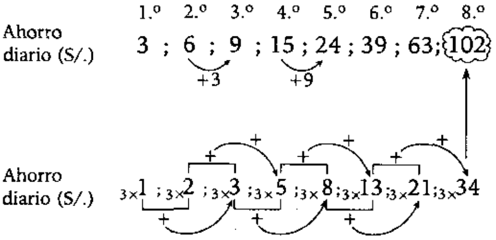
El primer día ahorró 3 soles; el segundo día, 6 soles; el tercer día, 3 soles más que el segundo día; el cuarto día, 15 soles; el quinto día, 9 soles más que el día anterior y así sucesivamente. ¿Cuántos soles ahorró el octavo día?

A) 80
B) 99
C) 100
D) 98
E) 102

Resolución

Se pide cantidad de soles ahorrados en el octavo día.

De los datos del problema, se tiene que



Por lo tanto, el octavo día ahorró S/.102.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 20

Si $\overline{ab}$; $\overline{a7}$; $\overline{b9}$ es una sucesión lineal, calcule el número $(a+b)$.

A) 11
B) 10
C) 13
D) 12
E) 15

Resolución

Se pide el valor de $(a+b)$

Dato:

$\overline{ab}$; $\overline{a7}$; $\overline{b9}$ es una sucesión lineal

Sabemos que con tres términos consecutivos de una sucesión lineal se cumple que

$$\overline{ab}+\overline{b9}=2(\overline{a7}) \rightarrow 10a+b+10b+9=2(10a+7)$$

$$10a+11b+9=20a+14 \rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{11b}=\underset{\substack{\downarrow \\ 5}}{10a}+5 \rightarrow a=b=5$$

$\therefore\ a+b=10$

Clave B

PROBLEMA N.° 21

Calcule la diferencia de los términos enésimos en

- $\frac{2}{3};\frac{6}{5};\frac{10}{7};\frac{14}{9};\dots$
- $\frac{1}{9};\frac{1}{2};\frac{11}{15};\frac{8}{9};\dots$

A) n^2 B) n^n C) $\frac{2n^2+21n-8}{6n^2+15n+6}$ D) $\frac{(n+1)}{2}$ E) $\frac{2n^2+7}{n+6}$

Resolución

Se pide la diferencia de los términos enésimos de

$$S_1:\frac{2}{3};\frac{6}{5};\frac{10}{7};\frac{14}{9};\dots \qquad S_2:\frac{1}{9};\frac{1}{2};\frac{11}{15};\frac{8}{9};\dots$$

Una forma de encontrar el término enésimo en las sucesiones de términos fraccionarios es considerando los numeradores y denominadores como dos sucesiones diferentes y calculamos en cada una su t_n. Veamos:

- Para la sucesión 1

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots \\ \text{numerador:} & 2 & ; & 6 & ; & 10 & ; & 14 & ; & \dots \\ & & +4 & & +4 & & +4 & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} t_n=4n+(2-4) \\ t_n=4n-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots \\ \text{denominador:} & 3 & ; & 5 & ; & 7 & ; & 9 & ; & \dots \\ & & +2 & & +2 & & +2 & & & \end{array} \rightarrow t_n=2n+1$$

$$t_{n(1)}=\frac{4n-2}{2n+1}$$

- Para la sucesión 2

  Para establecer la relación entre los numeradores y también entre los denominadores, hacemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots \\ \dfrac{1}{9} & ; & \dfrac{1\times6}{2\times6} & ; & \dfrac{11}{15} & ; & \dfrac{8\times2}{9\times2} & ; & \dots \end{array}$$

  Ahora se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc} 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots \\ \dfrac{1}{9} & ; & \dfrac{6}{12} & ; & \dfrac{11}{15} & ; & \dfrac{16}{18} & ; & \dots \end{array}$$

  En donde

$$\left.\begin{array}{lcccccccccl} & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots & \\ \text{numerador:} & 1 & ; & 6 & ; & 11 & ; & 16 & ; & \dots & \rightarrow\ t_n=5n-4 \\ & & +5 & & +5 & & +5 & & & & \\ & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \dots & \\ \text{denominador:} & 9 & ; & 12 & ; & 15 & ; & 18 & ; & \dots & \rightarrow\ t_n=3n+6 \\ & & +3 & & +3 & & +3 & & & & \end{array}\right\} t_{n(2)}=\frac{5n-4}{3n+6}$$

Finalmente, calculamos la diferencia

$$t_{n(1)}-t_{n(2)}=\frac{4n-2}{2n+1}-\frac{5n-4}{3n+6}$$

Multiplicamos en aspa y luego reducimos

$$\therefore\quad t_{n(1)}-t_{n(2)}=\frac{2n^2+21n-8}{6n^2+15n+6}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

Si escribimos linealmente todos los números que terminan en 2, uno a continuación de otro, ¿qué cifra ocupará el lugar 880?

A) 6　　B) 5　　C) 3　　D) 7　　E) 1

Resolución

Se pide la cifra que ocupa el lugar 880 en la sucesión de números cuya cifra terminal es 2.
Escribamos los números que terminan en cifra 2, en donde cada cifra que utilizamos ocupa un lugar, entonces:

$$\underbrace{2}_{1\text{ cifra}}\,;\ \underbrace{12\,;22\,;32\,;42\,;\ldots;92}_{9(2\text{ cifras})=18\text{ cifras}}\,;\ \underbrace{102\,;112\,;\ldots;992}_{\left[\frac{992-92}{10}\right](3\text{ cifras})=270\text{ cifras}}\,;\ \underbrace{1002\,;1012\,;\ldots;\overset{\{\ldots 2\}}{N}}_{\left[\frac{N-992}{10}\right](4\text{ cifras})}$$

$$1+18+270+4\left(\frac{N-992}{10}\right)\leq 880$$

$$289+4\left(\frac{N-992}{10}\right)\leq 880$$

$$(-289)\ldots\qquad 4\left(\frac{N-992}{10}\right)\leq 591$$

$$\left(\times\frac{10}{4}\right)\ldots\qquad N-992\leq 1477{,}5$$

$$N\leq 2469{,}5$$

pero $N=\ldots 2$ → número máximo $N=2462$

Reemplazamos en

$$\left(\frac{N-992}{10}\right)(4\text{ cifras})=588\text{ cifras}$$

Total de cifras utilizadas

$$1+18+270+588=877$$

Finalmente en la sucesión de números

$$\underbrace{\overset{1.^{\circ}}{2}\,;\ \overset{2.^{\circ}}{1}\ \overset{3.^{\circ}}{2}\,;\ \overset{4.^{\circ}}{2}\ \overset{5.^{\circ}}{2}\,;\ \overset{\ldots}{\ldots}\,;\ 99\overset{\overset{289.^{\circ}}{\downarrow}}{2}\,;\ \overset{290.^{\circ}}{1}\quad \overset{291.^{\circ}}{0}\quad \overset{292.^{\circ}}{0}\quad \overset{293.^{\circ}}{2}\,;\ \ldots\,;\ 246\overset{\overset{877.^{\circ}}{\downarrow}}{2}}_{877\text{ cifras}}\,;\ 247\overset{\overset{880.^{\circ}}{\downarrow}}{2}$$

Por lo tanto, la cifra de lugar 880 es 7.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 23

Juan va a una tienda y compra un caramelo, regalándole el vendedor un caramelo por su compra. En una segunda vez compra 3 caramelos y le regala 2, en la tercera compra 6 y le regala 3, en la cuarta vez compra 10 y le regalan 4, en la quinta vez compra 15 y le regalan 5 y así sucesivamente. ¿Cuántos caramelos recibirá en total cuando entre a la tienda a comprar por vigésima vez?

A) 160 B) 70 C) 200 D) 150 E) 230

Resolución

Se pide la cantidad de caramelos que recibe, en total, en la vigésima compra (día 20)

n.° día:	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	
Compra:	1 ;	3 ;	6 ;	10 ;	15 ;	... (números triangulares)
Le regalan:	1 ;	2 ;	3 ;	4 ;	5 ;	... (números naturales)

Entonces, ahora se puede escribir así:

n.° día	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	...	20.°
compra:	$\frac{1\times 2}{2}$;	$\frac{2\times 3}{2}$;	$\frac{3\times 4}{2}$;	$\frac{4\times 5}{2}$;	$\frac{5\times 6}{2}$;	... ;	$\overset{210}{\frac{20\times 21}{2}}$
le regalan:	1 ;	2 ;	3 ;	4 ;	5 ;	... ;	20

Por lo tanto, el total recibido el día 20 es igual a 230.
(compra + le regalan)

Clave E

PROBLEMA N.° 24

En la siguiente sucesión existen 49 términos. ¿Cuántos términos habrá entre los términos $7a$ y $7b$ de dicha sucesión?

$a; a+1; a+2; \ldots ; b-1; b$

A) 301 B) 315 C) 324 D) 335 E) 306

Resolución

Se pide la cantidad de términos comprendidos entre $7a$ y $7b$.

Se sabe que

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & \ldots & & 48.^{\circ} & & 49.^{\circ} \\ a & ; & a+1 & ; & a+2 & ; & \ldots & ; & b-1 & ; & b \end{array}$$

Observamos que la sucesión está formada por números consecutivos, de manera que

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & \ldots & & 48.^{\circ} & & 49.^{\circ} \\ a & ; & a+1 & ; & a+2 & ; & \ldots & ; & b-1 & ; & b \\ & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ a & ; & a+1 & ; & a+2 & ; & \ldots & ; & a+47 & ; & a+48 \end{array}$$

De donde $b=a+48 \rightarrow 7b=7a+336$

Luego, entre $7a$ y $7b$ se tiene $7a; \underbrace{7a+1; 7a+2; 7a+3; \ldots ; 7a+335}_{335 \text{ términos}}; \overset{7b}{7a+336}$

Por lo tanto, existen 335 términos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 25

En un laboratorio se tiene dos microbios: uno tipo *A* y otro tipo *B*. Para el primero se observa que luego, al final del primer día, se reproduce en 3 microbios del mismo tipo; luego de dos días, son 7; después de 3 días son 13 y así sucesivamente. Para el del tipo *B* se observa que al final del mismo primer día son 10; luego del 2.° día son 19; al cabo del tercer día ya son 28 y así sucesivamente. ¿Al cabo de cuántos días el número de microbios de *A* y *B* son iguales?

A) 2 B) 6 C) 8 D) 4 E) 10

Resolución

Se pide luego de cuántos días la cantidad de microbios del tipo *A* y *B* son iguales.
Si continuamos la secuencia, según los datos, se tiene

$$\begin{array}{lccccccccccccccc} \text{n.° día:} & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & 5.^{\circ} & & 6.^{\circ} & & 7.^{\circ} & & 8.^{\circ} \\ \text{tipo } A: & 3 & ; & 7 & ; & 13 & ; & 21 & ; & 31 & ; & 43 & ; & 57 & ; & 73 \\ & & +4 & & +6 & & +8 & & +10 & & +12 & & +14 & & +16 & \\ \text{tipo } B: & 10 & ; & 19 & ; & 28 & ; & 37 & ; & 46 & ; & 55 & ; & 64 & ; & 73 \\ & & +9 & & +9 & & +9 & & +9 & & +9 & & +9 & & +9 & \end{array} \Bigg\} \text{iguales}$$

Por tanto, será igual el número de microbios luego de 8 días.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 26

Halle x en:
0; 7; 33; 96; 220; x

A) 530 B) 435 C) 426
D) 582 E) 392

Resolución

Se pide el valor de x en 0; 7; 33; 96; 220; x

En ocasiones, la observación de los términos de una sucesión permite relacionarlo con números conocidos (referentes) como los cuadrados, cubos, triangulares, etc. Tal es el caso de la sucesión mostrada que, al ser cercanos a números cuadrados, podemos expresarlos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1.° & & 2.° & & 3.° & & 4.° & & 5.° & & 6.° \\ 0 & ; & 7 & ; & 33 & ; & 96 & ; & 220 & ; & x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1^2-1 & ; & 3^2-2 & ; & 6^2-3 & ; & 10^2-4 & ; & 15^2-5 & ; & 21^2-6 \end{array}$$

cuadrado de números triangulares

$\therefore\ x=21^2-6=435$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Halle la diferencia entre el mayor y el menor de los términos de tres cifras de la siguiente sucesión: 7; 19; 37; 61; 91; ...

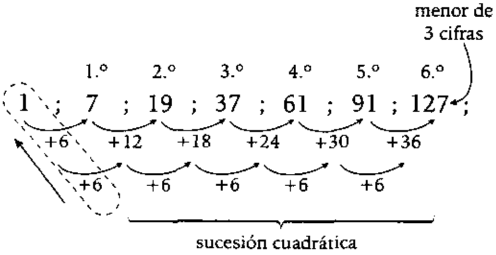
A) 711 B) 603 C) 792
D) 729 E) 600

Resolución

Se pide la diferencia entre el mayor y menor término de 3 cifras en

7; 19; 37; 61; 91; ...

Hallamos el término enésimo de la sucesión, para luego encontrar el mayor y menor de 3 cifras.



El término enésimo es de la forma

$$t_n=an^2+bn+c$$

$$a=\frac{+6}{2}=3; \quad b=6-a=3; \quad c=1$$

$$\rightarrow\ t_n=3n^2+3n+1$$

El mayor de 3 cifras será cuando

$$3n^2+3n+1 < 1000 \text{ para } n\text{: máximo}$$

$$(-1)\text{:}\ \ 3n^2+3n < 999$$

$$\times\frac{1}{3}\ \text{:}\ \ n^2+n < 333$$

$$n(n+1) < 333\ \rightarrow\ n_{\text{máx}}=17$$

$$t_{17}=3(17)^2+3(17)+1=919$$

El menor de 3 cifras será cuando

$$100 < 3n^2+3n+1 \text{ para } n\text{: mínimo}$$

$$(-1)\text{:}\ \ 99 < 3n^2+3n$$

$$\times\frac{1}{3}\ \text{:}\ \ 33 < n^2+n \quad n_{\text{mín}}=6$$

$$t_6=3(6)^2+3(6)+1=127$$

Luego,

$$\frac{\text{mayor de 3 cifras}}{919} - \frac{\text{menor de 3 cifras}}{127} = 792$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

Halle el segundo término negativo en la siguiente sucesión: 284; 278; 272; 266; ...

A) −18 B) −6 C) −13
D) −10 E) −14

Resolución

Se pide segundo término negativo en:

284; 278; 272; 266; ...

En estos tipos de problemas, se recomienda encontrar primero el último término positivo, el cual se halla en forma práctica así:

$$284\underset{-6}{\curvearrowright};278\underset{-6}{\curvearrowright};272\underset{-6}{\curvearrowright};266\;;\dots;\;\overset{\substack{\text{último}\\\text{positivo}}}{\bigcirc}\underset{-6}{\curvearrowright};\;\overset{\substack{\text{primer}\\\text{negativo}}}{\bigcirc}$$

$$\begin{array}{r|l} 284 & 6 \longleftarrow \text{valor absoluto de la razón} \\ \cline{2-2} 44 & 47 \xrightarrow{+1} \text{lugar del último término positivo} \\ 2 & \end{array}$$

$\llcorner\!\to$ último término positivo

Luego,

$$\overset{1.^\circ}{284}\underset{-6}{\curvearrowright};\overset{2.^\circ}{278}\underset{-6}{\curvearrowright};\overset{3.^\circ}{272}\underset{-6}{\curvearrowright};\overset{4.^\circ}{266};\cdots;\overset{\substack{\text{último}\\\text{positivo}\\48.^\circ}}{2}\underset{-6}{\curvearrowright};\overset{\substack{\text{primer}\\\text{negativo}\\49.^\circ}}{-4}\underset{-6}{\curvearrowright};\overset{\substack{\text{segundo}\\\text{negativo}\\50.^\circ}}{-10}$$

$\therefore\; t_{2.^\circ\,\text{neg}}=-10$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

Calcule $x+y$

1; 3; 8; 10; 15; 17; 22; x; y

A) 70
B) 53
C) 62
D) 48
E) 69

Resolución

Se pide valor de $x+y$

En la sucesión planteada, observamos lo siguiente:

$$\overset{1.^\circ}{1}\;;\;\overset{2.^\circ}{3}\;;\;\overset{3.^\circ}{8}\;;\;\overset{4.^\circ}{10}\;;\;\overset{5.^\circ}{15}\;;\;\overset{6.^\circ}{17}\;;\;\overset{7.^\circ}{22}\;;\;\boxed{24}\;;\;\boxed{29}$$

$$\underbrace{+2\quad +5}\quad\underbrace{+2\quad +5}\quad\underbrace{+2\quad +5}\quad\underbrace{+2\quad +5}$$

$$x=24 \;\wedge\; y=29$$

$\therefore\; x+y=53$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 30

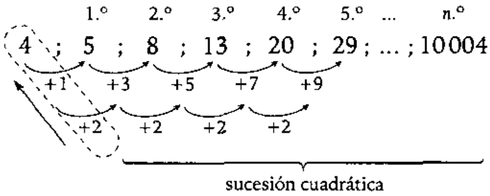
¿Cuántos de los términos de la siguiente sucesión son múltiplos de diez?

5; 8; 13; 20; 29; ...; 10 004

A) 20
B) 21
C) 23
D) 37
E) 41

Resolución

Se pide número de términos que son múltiplos de 10.
Hallamos el t_n de la sucesión para que con él se encuentre el valor de n.



El t_n es de la forma

$$t_n=an^2+bn+c$$

donde

$$a=\frac{+2}{2}=1; \quad b=1-a=0; \quad c=4$$

$$\rightarrow \ t_n=n^2+4$$

Entonces

$$n^2+4=10\,004$$

$$\rightarrow \ n=100$$

Los términos múltiplos de 10 son aquellos cuya última cifra es cero, es decir,

$$t_n=...0$$

$$n^2+4=...0$$

$$n^2=...6 \ \rightarrow \ n=\underbrace{\{4;\ 6;\ 14;\ 16;\ ...;\ 94;\ 96\}}_{\text{20 valores}}$$

Cada valor de n genera un término múltiplo de 10, por lo tanto, existen 20 términos múltiplos de 10.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 31

Si las sucesiones dadas tienen la misma ley de formación y la misma cantidad de términos, halle el primer término de la segunda sucesión:
5; 6; 9; 13; 65; 59
a_1; ...; 89

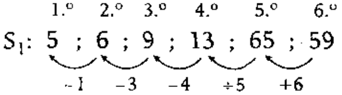
A) 7 B) 9 C) 10
D) 8 E) 11

Resolución

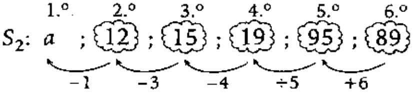
Se pide el primer término de la segunda sucesión: a_1
Dato: las sucesiones S_1 y S_2 tienen la misma ley de formación y la misma cantidad de términos.

1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°
S_1: 5 ; 6 ; 9 ; 13 ; 65 ; 59
S_2: a; .... ; 89

Por tener ambas sucesiones la misma ley de formación, la relación que se tiene entre los términos de S_1 será la misma que habrá entre los términos de S_2, y en el mismo orden; es decir:



Entonces en S_2



$$a=12-1$$

$$\therefore \ a=11$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 32

Las edades de 4 hermanos están en progresión aritmética y suman 54. Si la edad del mayor duplica a la del menor, ¿cuál es la edad del segundo?

A) 10 B) 13 C) 15
D) 20 E) 16

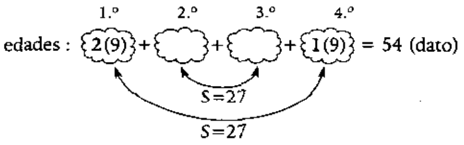
Resolución

Se pide la edad del segundo hermano.

Datos:

- Suma de las edades de 4 hermanos que están en P.A. es 54.
- Edad del mayor es el doble de la del menor.

Sabemos que la suma de términos equidistantes es constante, además, del dato II planteamos:



Como las edades se encuentran en P.A. escribiremos la edad del segundo y tercer hermano en términos de la razón (r), es decir:

$$\text{P.A.}: \overset{1.^\circ}{18} \underbrace{;}_{-r} \overset{2.^\circ}{18-r} \underbrace{;}_{-r} \overset{3.^\circ}{9+r} \underbrace{;}_{-r} \overset{4.^\circ}{9}$$

De donde

$18-r-r=9+r$

$3r=9$

$\rightarrow r=3$

Por lo tanto, la edad del segundo hermano es

$18-r=15$ años

Clave **C**

PROBLEMA N.° 33

Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Si se les añade 1; 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica. ¿Cuáles son los números iniciales?

A) 5; 15; 28
B) 10; 20; 31
C) 3; 12; 21
D) 12; 21; 31
E) 3; 15; 22

Resolución

Se pide 3 números que se encuentran en P.A.

Datos:

I. Suma de los tres números es 36.

II. Al añadirles, respectivamente, 1; 4 y 43, resulta una P.G.

Escribimos los tres números que están en P.A. en función del término central; es decir,

$$\text{P.A.}: \overset{1.^\circ}{(a-r)} \;;\; \overset{2.^\circ}{a} \;;\; \overset{3.^\circ}{(a+r)} \qquad r>0$$

Del dato I:

$(a-r)+a+(a+r)=36$

$3a=36$

$\rightarrow a=12$

Reemplazamos en la P.A.

$$\begin{array}{lcccccc} & 1.^\circ & & 2.^\circ & & 3.^\circ & \\ \text{P.A.} & (12-r) & ; & 12 & ; & (12+r) & (\alpha) \\ \text{Del dato II:} & \downarrow{+1} & & \downarrow{+4} & & \downarrow{+43} & \\ \text{P.G.} & (13-r) & ; & 16 & ; & (55+r) & \end{array}$$

Por propiedad

$$(13-r)(55+r)=(16)^2$$

$$715-42r-r^2=256$$

$$r^2+42r-459=0$$

$$\begin{array}{lclcl} r & & +51 & \rightarrow & r=-51 \quad ✗ \\ & \times & & & \\ r & & -9 & \rightarrow & r=9 \quad ✓ \end{array}$$

Luego, reemplazamos en (α) los números iniciales son 3; 12; 21.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 34

Calcule la suma de las cifras del término 10.
2; 33; 555; 7777; 1111111111; ...

A) 120 B) 110 C) 118
D) 139 E) 119

Resolución

Se pide la suma de cifras del término 10.

Dato:

$$\begin{array}{ccccc} 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & 5.^\circ \\ 2; & 33; & 555; & 7777; & 1111111111; \ldots \end{array}$$

Observamos que cada término de la sucesión se genera al alinear los números primos tantas veces como el lugar al que pertenece. Ahora, el término del lugar 10 se formará alineando 10 veces el décimo número primo. Escribimos los 10 primeros números primos.

$$\begin{array}{lcccccccccc} \text{números} & 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ & 5.^\circ & 6.^\circ & 7.^\circ & 8.^\circ & 9.^\circ & 10.^\circ \\ \text{primos:} & 2; & 3; & 5; & 7; & 11; & 13; & 17; & 19; & 23; & 29 \end{array}$$

Entonces, el término 10 es

$$t_{10}=\underbrace{\underline{29}\ \underline{29}\ \underline{29}\ldots\underline{29}}_{\text{10 veces el número 29}}$$

$$\therefore\ S_{\substack{\text{cifras}\\ \text{de } t_{10}}}=10(2+9)=110$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 35

Los ángulos de un cuadrilátero forman una progresión geométrica y el último es 9 veces el segundo. Calcule el menor ángulo.

A) 8°
B) 12°
C) 9°
D) 11°
E) 10°

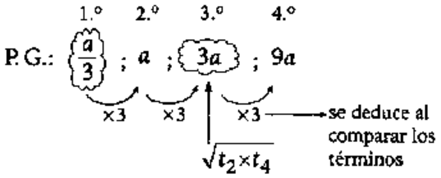
Resolución

Se pide el menor ángulo interior de un cuadrilátero.

Datos:

- Los ángulos interiores forman una P.G.
- El mayor ángulo es 9 veces el segundo.

Del dato II y por propiedad en las P.G. se tiene



Recuerda

Suma de ángulos interiores en todo cuadrilátero es igual a 360º.

Efectuamos

$$\frac{a}{3}+a+3a+9a=360°$$

$$\frac{a}{3}+13a=360°$$

$$\frac{40a}{3}=360° \rightarrow a=27$$

Por lo tanto, el menor ángulo $\frac{a}{3}$ es 9º.

Clave **C**

PROBLEMA N.º 36

Busque dos números x e y comprendidos entre 0 y 2, tales que 9; x; y están en progresión geométrica decreciente en ese orden y que el mayor es 27 veces el menor.

A) 1/3; $\sqrt{3}$

B) 1/3, 1/4

C) 1/4, $\sqrt{2}$

D) 1/4, $\sqrt{3}$

E) 1/3, $\sqrt{2}$

Resolución

Se pide el valor de x e y comprendidos entre 0 y 2.

Datos:

- 9; x; y forman una P.G. decreciente en ese orden, donde x e $y \in \langle 0; 2\rangle$.
- El mayor término es 27 veces el menor.

En la P.G. decreciente: $\overset{1.º}{9}\ ;\ \overset{2.º}{x}\ ;\ \overset{3.º}{y}$

Del dato II: $9=27y \rightarrow y=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

Además, por propiedad

$$x=\sqrt{9y}$$

$$\rightarrow x=\sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{3};\ \frac{1}{3}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.º 37

En la sucesión $\frac{2}{3};\frac{5}{7};\frac{10}{11};\frac{17}{15}$

calcule la suma de los términos de la fracción que ocupa el lugar veinte.

A) 301	B) 310	C) 415
D) 217		E) 480

Resolución

Se pide la suma de los términos de la fracción que ocupa el lugar 20.
En la sucesión:

$$\overset{1.º}{\frac{2}{3}};\ \overset{2.º}{\frac{5}{7}};\ \overset{3.º}{\frac{10}{11}};\ \overset{4.º}{\frac{17}{15}};\ldots$$

Sumamos los términos de cada fracción y con los resultados formamos una nueva sucesión donde tendremos que calcular el término de lugar 20, que sería la suma pedida.

Veamos

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \ldots & & 20.^{\circ} \\ 5 & ; & 12 & ; & 21 & ; & 32 & ; & \ldots & ; & \boxed{480} \end{array}$$

$$\underbrace{1\times5}_{+4}\ ;\ \underbrace{2\times6}_{+4}\ ;\ \underbrace{3\times7}_{+4}\ ;\ \underbrace{4\times8}_{+4}\ ;\ \ldots\ ;\ \underbrace{20\times24}_{+4}$$

$\therefore\ S_{t(20)}=480$

Clave E

PROBLEMA N.° 38

En un laboratorio, se estudian dos tipos de bacterias por separado. Las del tipo *A*, el primer día, son 3; el segundo día aumenta a 6; el tercer día son 11; el cuarto día son 18 y así sucesivamente. Las del tipo *B*, el mismo primer día son 10; el segundo día son 11; el tercer día son 13; el cuarto día son 16 y así sucesivamente. Halle el día en que las bacterias del tipo *A* son el doble de las del tipo *B*.

A) 11 B) 13 C) 18 D) 23 E) 15

Resolución

Se pide el día en que las bacterias del tipo *A* son el doble de las del tipo *B*: *n*.

Del enunciado del problema, hallamos el término enésimo de cada sucesión formada por la cantidad de bacterias por día.

$$\begin{array}{lccccccccccc} \text{día:} & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & \ldots & & n.^{\circ} \\ \text{tipo } A\text{:} & 3 & ; & 6 & ; & 11 & ; & 18 & ; & \ldots & & \boxed{n^2+2} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & 1^2+2 & ; & 2^2+2 & ; & 3^2+2 & ; & 4^2+2 & ; & \multicolumn{3}{l}{\text{se deduce por simple inspección}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccc} \text{día:} & & & 1.^{\circ} & & 2.^{\circ} & & 3.^{\circ} & & 4.^{\circ} & & & & n.^{\circ} \\ \text{tipo } B\text{:} & 10 & ; & 10 & ; & 11 & ; & 13 & ; & 16 & ; & \ldots & ; & \boxed{\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{2}+10} \\ & & +0 & & +1 & & +2 & & +3 & & +4 & & & \\ & & & +1 & & +1 & & +1 & & +1 & & & & \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{6cm}}_{\text{sucesión cuadrática}}$$

Su término enésimo tiene la forma

$$t_n=an^2+bn+c$$

donde

$$a=\frac{1}{2};\quad b=0-a=-\frac{1}{2};\quad c=10$$

Reemplazamos

$$t_n=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+10$$

Luego, del dato del problema

bacterias tipo A=2 (bacterias tipo B)

$$n^2+2=2\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+10\right)$$

$$\cancel{n^2}+2=\cancel{n^2}-n+20$$

$\therefore\ n=18$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Un millonario extravagante hace lo siguiente: El 1 de enero compra 16 televisores y regala 4; el 2 de enero, 18 televisores y regala 8; el día siguiente, 22 y regala 14; luego compra 28 y regala 22; y así sucesivamente. Hasta que cierto día compró cierta cantidad de televisores y los regaló todos, ¿qué día fue ese?

A) 8 enero
B) 10 enero
C) 11 enero
D) 19 enero
E) 7 enero

Resolución

Se pide la fecha del día que regaló todos los televisores que compró.

Del enunciado del problema se sabe que compra una cierta cantidad de televisores por día y regala otra cantidad también por día, estas cantidades son

$$\begin{array}{lccccccc} & \text{1 enero} & & \text{2 enero} & & \text{3 enero} & & \text{4 enero} \\ \text{compra:} & 16 & & 18 & & 22 & & 28\ \ldots \\ & & +2 & & +4 & & +6 & \\ \text{regala:} & 4 & & 8 & & 14 & & 22\ \ldots \\ & & +4 & & +6 & & +8 & \end{array}$$

Se observa que ambas sucesiones formadas son del mismo tipo (sucesiones cuadráticas). Como se pide la fecha en que la cantidad de televisores que compra y regala sea la misma, se puede establecer una nueva sucesión que relacione ambas cantidades por día, esta relación puede ser obtenida mediante la diferencia por día, es decir,

iguales cantidades

	1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°
compra:	16	18	22	28			
regala:	4	8	14	22			
diferencia:	12	10	8	6	4	2	0

$$12\xrightarrow{-2}10\xrightarrow{-2}8\xrightarrow{-2}6\xrightarrow{-2}4\xrightarrow{-2}2\xrightarrow{-2}0$$

Por lo tanto, el 7 de enero regaló todos los televisores que compró.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 40

En una sucesión aritmética se tiene que el segundo, el cuarto y el octavo término forman una sucesión geométrica. Si el segundo término es la cuarta parte del octavo y la razón de la sucesión aritmética es 3, halle el décimo octavo término de la sucesión aritmética.

A) 39
B) 37
C) 50
D) 45
E) 54

Resolución

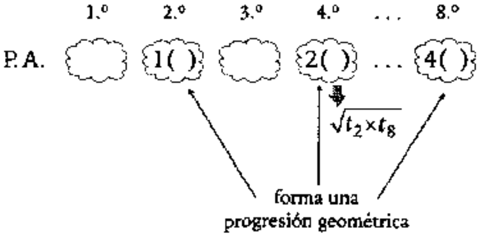
Se pide el décimo octavo término: t_{18}

Se sabe que:

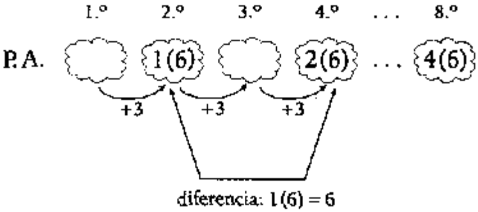
I. El 2.°, 4.° y 8.° término de una P.A. forman una P.G.

II. Razón de la P.A. es 3.

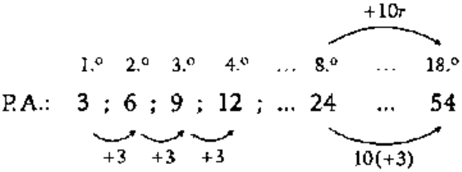
Por dato, también se sabe que



Del segundo dato, se deduce que la diferencia entre el t_4 y t_2 (en ese orden) es 6, entonces



Luego, para hallar el t_{18} realizamos



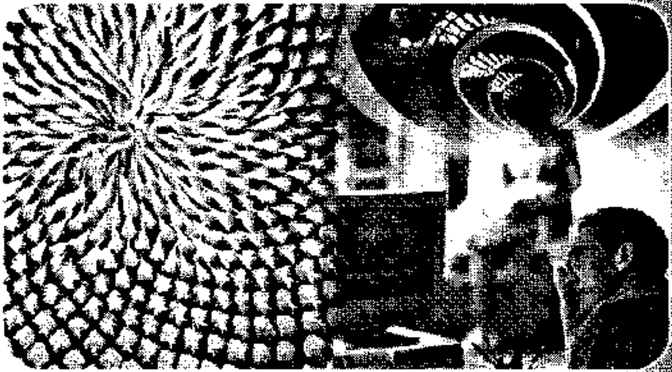
$\therefore\ t_{18}=54$

Clave E

Capítulo

14

Series y sumatorias



Existe una relación estrecha entre las series y las sucesiones numéricas, ya que la primera es la adición indicada de los términos de esta última, en donde su resultado se conoce como valor de la serie, o simplemente suma. Es en ese sentido que se sustenta la relación entre ambas. Aquí, mediante la resolución de los problemas, trataremos procedimientos para el cálculo del valor de los diferentes tipos de series, sea aritmética, cuadrática, geométrica, etc. Asimismo, analizaremos el uso de una representación de las series a través del símbolo Σ (sigma), que representa una sumatoria, y desarrollaremos algunas de sus propiedades. El reconocimiento y la correcta aplicación de las series y sumas notables en la resolución de problemas también serán desarrollados en el presente capítulo.

Capítulo 14

Series y sumatorias

PROBLEMA N.° 1

De un libro se arrancan 61 hojas de la parte final. Si se sabe que en la numeración de éstas (hojas arrancadas) se han usado 365 tipos, halle la cantidad total de hojas de dicho libro.

A) 120 B) 110 C) 210
D) 240 E) 180

Resolución

Se pide la cantidad total de hojas del libro.
De los datos del problema, realizamos el siguiente esquema

$$\text{páginas del libro}\quad 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots\ \underbrace{\overbrace{\text{hojas arrancadas}}^{\overset{\times 2}{61\text{ hojas}=122\text{ páginas}}}}_{\substack{365\text{ tipos de imprenta}\\ \text{(cifras)}}}$$

Para conocer la cantidad de hojas del libro, utilizaremos el dato de los 365 tipos de imprenta. Con ello, hallamos las páginas que comprende de la siguiente manera:

- Si las 122 páginas tuvieran 2 cifras cada una,
  → 122 (2 cifras) = 244 cifras < 365 (dato)
- Si las 122 páginas tuvieran 3 cifras cada una,
  → 122 (3 cifras) = 366 cifras > 365
  ↑ una cifra más

Se concluye entonces que: una página es de 2 cifras y el resto de 3 cifras.

$$1(2\text{ cif.})+121(3\text{ cif.})=365\text{ cifras (verifica)}$$

$$\begin{array}{l} \text{págs}\\ \text{del}\\ \text{libro}\end{array}:\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots;\ \overbrace{99;\ 100;\ 101;\ \ldots;\underset{\text{última página}}{\boxed{220}}}^{122\text{ páginas}}$$

Total de páginas = 220

$$\therefore\ \text{Total de hojas}=\frac{220}{2}=110$$

Clave B

PROBLEMA N.° 2

Halle el valor aproximado de

$$S=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots$$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3
D) 1/5 E) 1/6

Resolución

Se pide el valor aproximado de S

$$S=\frac{1}{9}\underset{\times\frac{1}{3}}{\frown}+\frac{1}{27}\underset{\times\frac{1}{3}}{\frown}+\frac{1}{81}\underset{\times\frac{1}{3}}{\frown}+\frac{1}{243}+\ldots$$

Se deduce de la comparación de los términos.

Como $0<\frac{1}{3}<1$, nos encontramos frente a una serie geométrica decreciente infinita. Para calcular su valor aproximado hacemos lo siguiente.

$$S=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}\begin{matrix}\longleftarrow \text{primer término}\\[2ex] \longleftarrow \text{razón geométrica}\end{matrix}\quad \rightarrow \quad S=\frac{\frac{1}{\cancel{9}}}{\frac{2}{\cancel{3}}}=\frac{1}{6}$$

$\therefore\ S=1/6$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 3

Halle la suma de los 15 primeros términos de la serie: $S=1+7+17+31+\ldots$

A) 1250 B) 940 C) 3500 D) 2465 E) 435

Resolución

Se pide la suma de los 15 primeros términos de $S=1+7+17+31+\ldots$

Una forma de calcular el valor de una serie que no es aritmética (como es el caso de S) es tomar los términos y encontrar el término enésimo que los relaciona mediante los procedimientos tradicionales. La otra manera sería mediante algunos artificios.

Veamos: si cada término fuera una unidad más de los que en realidad es, tendríamos:

$$S'=2+8+18+32+\ldots$$

Ahora, todos los términos tienen mitad exacta, entonces factorizemos 2 a cada uno.

$$S'=2(1)+2(4)+2(9)+2(16)+\ldots$$

cuadrados perfectos

Entonces, S lo expresaremos así: $S=\overset{1.^{\circ}}{2(1^2)-1}+\overset{2.^{\circ}}{2(2^2)-1}+\overset{3.^{\circ}}{2(3^2)-1}+\overset{4.^{\circ}}{2(4^2)-1}+\overset{\cdots}{\cdots}+\overset{\overset{\text{se deduce}}{15.^{\circ}}}{2(15^2)-1}$

Ordenamos los cuadrados perfectos factorizando el 2.

$$S=2(\underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+15^2}_{\text{suma de cuadrados}})-(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{\text{15 sumandos}})$$

Aplicamos sumas notables

$$S=2\left(\frac{15(16)(31)}{6}\right)-15(1)$$

$\therefore\ S=2465$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 4

Calcule S en
$S=5+5+20+50+95+...$ (20 sumandos)

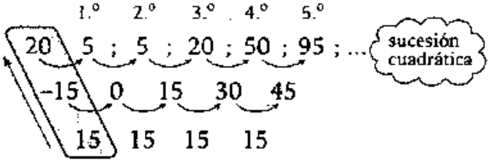
A) 15 400 B) 24 350 C) 17 200
D) 3540 E) 44 320

Resolución

Se pide el valor de

$$S=5+5+20+50+95+... \text{ (20 sumandos)}$$

En este caso vamos a calcular el término enésimo que contiene a los sumandos de la serie, para lo cual realizamos lo siguiente:



De donde

$$t_n=\frac{15}{2}n^2+\left(-15-\frac{15}{2}\right)n+20$$

$$t_n=\frac{15}{2}n^2-\frac{45}{2}n+20$$

Luego

$$S=\sum_{n=1}^{20}(t_n)=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{15}{2}n^2-\frac{45}{2}n+20\right)$$

Aplicamos propiedades de la sumatoria

$$S=\frac{15}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{20}(n^2)}_{\substack{\text{suma de}\\\text{cuadrados}\\\text{(20 primeros)}}}-\frac{45}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{20}(n)}_{\substack{\text{suma de}\\\text{naturales}\\\text{(20 primeros)}}}+\sum_{n=1}^{20}(20)$$

$$S=\frac{15}{2}\left(\frac{20\times21\times41}{6}\right)-\frac{45}{2}\left(\frac{20\times21}{2}\right)+20(20)$$

Al operar y reducir se obtiene

$$S=17\,200$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 5

La suma de los terceros términos de dos P.A. cuyas razones se diferencian en 2 es 33. Halle la suma de los 10 primeros términos de una nueva P.A., que se forma al sumar términos correspondientes de las dos P.A. antes mencionadas sabiendo, además, que la suma de los términos anteriores al primero de las primeras P.A. es −3.

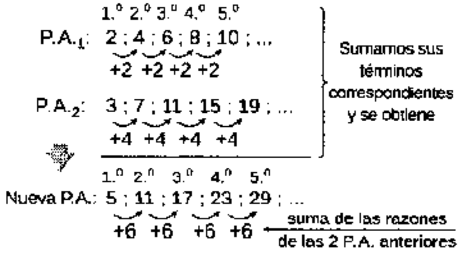
A) 550
B) 620
C) 580
D) 630
E) 610

Resolución

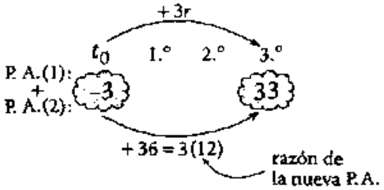
Se pide la suma de los 10 primeros términos de una P.A. que se origina al sumar los 10 términos correspondientes de otras dos P.A.

Recuerda

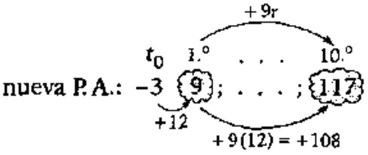
Si se tiene dos progresiones aritméticas:



De los datos, se conoce la suma de los términos anteriores al primero (t_0) y de los terceros términos; con ellos calculamos la razón de la nueva P.A.



Conociendo la razón de la nueva P.A. hallaremos su primer y décimo término para calcular lo pedido.



Sea S la suma de los 10 primeros términos de la nueva P.A.

$$\therefore\ S=\left(\frac{9+117}{2}\right)\times 10=630$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 6

Cuando la suma de los 10 primeros términos de una P.A. es igual a cuatro veces la suma de los cinco primeros, ¿cuál es la razón geométrica entre el primer término y la diferencia común?

A) 2/3 B) 1/5 C) 1/2
D) 2/7 E) 5/9

Resolución

Se pide la razón geométrica entre el primer término y la diferencia común (r) de una P.A.: $\frac{t_1}{r}$

Dato:

$$\begin{pmatrix}\text{Suma de los 10 primeros}\\ \text{términos de una P.A.}\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}\text{Suma de los 5 primeros}\\ \text{términos de dicha P.A.}\end{pmatrix}$$

Sea la P.A. de 10 términos

$$\begin{array}{l}
\quad\ \ 1.^\circ\quad 2.^\circ\quad 3.^\circ\quad 4.^\circ\quad 5.^\circ\quad 6.^\circ\quad 7.^\circ\quad 8.^\circ\quad 9.^\circ\quad 10.^\circ\\
\text{P.A.: } t_1\ ;\ t_2\ ;\ t_3\ ;\ t_4\ ;\ t_5\ ;\ t_6\ ;\ t_7\ ;\ t_8\ ;\ t_9\ ;\ t_{10}\\
\qquad\ \downarrow\quad\ \downarrow\quad\ \searrow\quad\ \searrow\quad\ \searrow\quad\ \searrow\qquad\qquad\quad\ \downarrow\\
\text{P.A.: } t_1;\ t_1+r;\ t_1+2r;\ t_1+3r;\ t_1+4r;\ t_1+5r;\ ...;\ t_1+9r
\end{array}$$

Del dato se cumple lo siguiente

$$\left(\frac{t_1+\overset{t_{10}}{(t_1+9r)}}{\cancel{2}}\right)\times\cancel{10}=\overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{t_1+\overset{t_5}{(t_1+4r)}}{\cancel{2}}\right)\times\cancel{5}$$

$$2t_1+9r=2(2t_1+4r)$$

$$2t_1+9r=4t_1+8r$$

$$r=2t_1$$

$$\therefore\ \frac{t_1}{r}=\frac{1}{2}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

Calcule el valor de
$S=9+12+17+24+...+177$

A) 814 B) 910 C) 873
D) 913 E) 923

Resolución

Se pide valor de $S=9+12+17+24+...+177$

Hallamos la forma general que relaciona a todos los sumandos de S, asociando a cada uno de ellos con un término de una sucesión notable (números cuadrados, cubos, triangulares, etc). Por ejemplo, con los cuadrados:

$$S=\overset{1.^{\circ}}{(1+8)}+\overset{2.^{\circ}}{(4+8)}+\overset{3.^{\circ}}{(9+8)}+\overset{4.^{\circ}}{(16+8)}+\overset{...}{\cdots}+\overset{13.^{\circ}}{(169+8)}$$

$$S=(1^2+8)+(2^2+8)+(3^2+8)+(4^2+8)+\cdots+(13^2+8)$$

Ordenamos la serie S así

$$S=(\underbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+...+13^2}_{\text{suma de cuadrados}})+(\underbrace{8+8+8+8+...+8}_{\text{13 sumandos}})$$

$$S=\frac{13\times14\times27}{6}+13\times8$$

$\therefore\ S=923$

Clave B

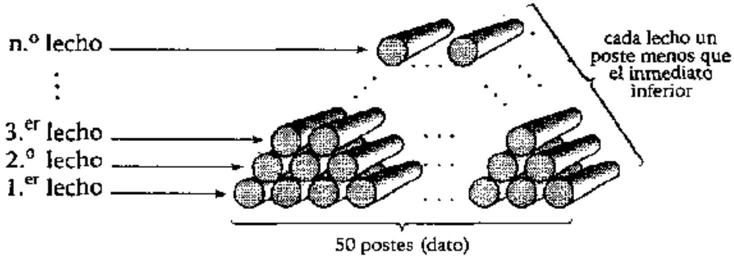
PROBLEMA N.° 8

Se deben almacenar 810 postes cilíndricos en un espacio abierto, formando así el primer lecho horizontal de 50 postes y cada lecho sucesivo debe contener un poste menos que el precedente para no derrumbarse. ¿Cuántos lechos pueden formarse?

A) 81 B) 27 C) 35 D) 44 E) 20

Resolución

Se pide cantidad de lechos de postes cilíndricos: n.
Graficamos según los datos:



Del gráfico, se tiene:

se observa que
n.° lech. + n.° postes = 51

$$\overset{1.^{er}\text{ lech.}}{50}+\overset{2.^{o}\text{ lech.}}{49}+\overset{3.^{er}\text{ lech.}}{48}+\overset{4.^{to}\text{ lech.}}{47}+\overset{\dots}{\dots}+\overset{n.^{o}\text{ lech.}}{51-n}=810$$

$$\underbrace{50+49+48+47+\dots+51-n}_{\text{serie aritmética decreciente }(n<51)}$$

Sumamos los n términos de la serie y obtenemos:

$$\left(\frac{50+(51-n)}{2}\right)n=810 \rightarrow (101-n)n=2(810) \rightarrow 101n-n^2=1620$$

Factorizamos mediante el aspa simple

$$n^2-101n+1620=0$$

$$\begin{array}{lllll} n & \times & -81 & \rightarrow n=81 & \text{(no cumple)} \\ n & & -20 & \rightarrow n=20 & \checkmark \end{array}$$

Por lo tanto, existen 20 lechos de postes cilíndricos.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 9

En el siguiente arreglo numérico, halle la suma de los términos de la fila veinte.

F_1: 1

F_2: 3 5

F_3: 7 9 11

F_4: 13 15 17 19

F_5: 21 23 25 27 29

A) 7000
B) 8000
C) 1250
D) 4320
E) 3560

Resolución

Se pide la suma de los términos de la fila 20 en el siguiente arreglo: S_{20}

$$\begin{array}{lll} & & \text{suma de términos} \\ F_1: & 1 & \longrightarrow 1=1^3 \\ F_2: & 3\ \ 5 & \longrightarrow 8=2^3 \\ F_3: & 7\ \ 9\ \ 11 & \longrightarrow 27=3^3 \\ F_4: & 13\ \ 15\ \ 17\ \ 19 & \longrightarrow 64=4^3 \\ F_5: & 21\ \ 23\ \ 25\ \ 27\ \ 29 & \longrightarrow 125=5^3 \\ \vdots & \vdots\ \ \vdots & \\ F_{20}: & \boxed{\qquad\qquad\qquad} & \longrightarrow S_{20}=20^3 \end{array}$$

$\therefore$ $S=20^3=8000$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 10

Calcule la suma de $S=7\times31+9\times29+11\times27+13\times25+...+31\times7$

A) 3955 B) 3965 C) 3945 D) 3975 E) 3985

Resolución

Se pide el valor de $S=7\times31+9\times29+11\times27+13\times25+...+31\times7$

Se observa que cada sumando está compuesto por dos factores cuya suma es 38 (constante). Veamos:

1.° sumando : $7+31=38$
2.° sumando : $9+29=38$
3.° sumando : $11+27=38$
⋮ ⋮
último sumando: $31+7=38$

Entonces, cada sumando lo expresamos de la siguiente forma:

$$S=7(38-7)+9(38-9)+11(38-11)+13(38-13)+...+31(38-31)$$

$$S=\underline{7(38)}-7^2+\underline{9(38)}-9^2+\underline{11(38)}-11^2+\underline{13(38)}-13^2+...+\underline{31(38)}-31^2$$

Agrupamos de manera que

$$S=38(\underbrace{7+9+11+13+...+31}_{13\text{ sumandos}})-(7^2+9^2+11^2+13^2+...+31^2)$$

Recuerda

$$\underbrace{1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}_{n\text{ primeros impares}}=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

Calculamos para luego reemplazar en S el valor de

$$7^2+9^2+11^2+...+31^2=(\underbrace{1^2+3^2+5^2+7^2+...+31^2}_{n=16\text{ sumandos}})-(1^2+3^2+5^2)$$

$$7^2+9^2+11^2+...+31^2=\frac{1}{3}(16)(31)(33)-35 \rightarrow 7^2+9^2+11^2+...+31^2=5421$$

Reemplazamos en

$$S=38\left(\frac{(7+31)}{2}\times13\right)-5421$$

$\therefore$ $S=3965$

Clave B

PROBLEMA N.° 11

Halle la suma de

$$S=\underbrace{1\times3-3\times5+5\times7-7\times9+\ldots}_{40\text{ sumandos}}$$

A) 3280 B) 1570 C) 1250 D) 3500 E) −3280

Resolución

Se pide la suma de:

$$S=1\times3-3\times5+5\times7-7\times9+\ldots \quad \text{(40 sumandos)}$$

Expresamos los términos empleando números cuadrados.

$$S=\overset{1.^{\circ}}{1\times3}-\overset{2^{\circ}}{3\times5}+\overset{3^{\circ}}{5\times7}-\overset{4^{\circ}}{7\times9}+\overset{5^{\circ}}{9\times11}-\overset{6^{\circ}}{11\times13}+\ldots+\overset{39^{\circ}}{\boxed{}}-\overset{40^{\circ}}{\boxed{}}$$

$$S=(2^2-1)-(4^2-1)+(6^2-1)-(8^2-1)+(10^2-1)-(12^2-1)+\ldots+(78^2-1)-(80^2-1)$$

Quitamos los paréntesis y tendremos

$$S=2^2-\cancel{1}-4^2+\cancel{1}+6^2-\cancel{1}-8^2+\cancel{1}+10^2-\cancel{1}-12^2+\cancel{1}+\ldots+78^2-\cancel{1}-80^2+\cancel{1}$$

$$S=2^2-4^2+6^2-8^2+10^2-12^2+\ldots+78^2-80^2$$

$$S=(2\times1)^2-(2\times2)^2+(2\times3)^2-(2\times4)^2+(2\times5)^2-(2\times6)^2+\ldots+(2\times39)^2-(2\times40)^2$$

Factorizamos el 2^2

$$S=2^2\left(1^2-\underline{2^2+3^2}-\underline{4^2+5^2}-6^2+\ldots+39^2-40^2\right)$$

$$S=2^2\left[(\underbrace{1+5+9+13+\ldots+77}_{\substack{\text{serie aritmética}\\ \text{(20 sumandos)}}})-40^2\right]$$

$$S=4\left[\left(\frac{1+77}{2}\right)20-1600\right]$$

$$S=4[-820]$$

$$\therefore\ S=-3280$$

Clave E

PROBLEMA N.° 12

Se tiene la siguiente sucesión: 1; 5; 15; 34; 65; 111; ...
Halle:

a. El término de número ordinal 20.
b. La suma de los 20 primeros términos.

A) 4010; 22 155   B) 2050; 21 215   C) 315; 1510   D) 7050; 180   E) 3290; 35 710

Resolución

Se pide el término 20 y la suma de los 20 primeros términos de la sucesión.

1; 5; 15; 34; 65; 111; ....

Conociendo el término enésimo de la sucesión, se hallaría el del lugar 20 y la suma de los 20 primeros aplicando las sumas notables. Para hallar el término enésimo, busquemos relacionar a los términos de la sucesión con algunas sucesiones notables. Veamos:

- Comparamos con los números cuadrados perfectos y cubos.

En el primer caso se van quedando los cuadrados y en el segundo, los términos se van alejando.

1.°	2°	3°	4°	5°	6°	
1;	5;	15;	34;	65;	111; ...	
1;	4;	9 ;	16;	25;	36; ...	(números cuadrados)
1;	8;	27;	64;	125;	216; ...	(números cúbicos)

Entonces hagamos lo siguiente: dupliquemos los términos de la sucesión dada

1.°	2°	3°	4°	5°	6°
2;	10;	30;	68;	130;	222; ...

Observamos números cercanos a los cubos, ahora los indicamos así

1.°	2°	3°	4°	5°	6°
1^3+1;	2^3+2;	3^3+3;	4^3+4;	5^3+5;	6^3+6; ...

Pero son el doble de los números originales, por ello, hacemos lo siguiente:

$$\overset{1.^\circ}{\frac{1^3+1}{2}};\ \overset{2^\circ}{\frac{2^3+2}{2}};\ \overset{3^\circ}{\frac{3^3+3}{2}};\ \overset{5^\circ}{\frac{4^3+4}{2}};\ \overset{4^\circ}{\frac{5^3+5}{2}};\ \overset{6^\circ}{\frac{6^3+6}{2}};\ \ldots;\ \overset{20^\circ}{\frac{20^3+20}{2}}$$

$$\therefore\ t_{20}=\frac{20^3+20}{2}=4010$$

La suma de los 20 primeros términos es lo que falta

$$S=\frac{1^3+1}{2}+\frac{2^3+2}{2}+\frac{3^3+3}{2}+\frac{4^3+4}{2};\ldots;\frac{20^3+20}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}[(\underbrace{1^3+2^3+3^3+\ldots+20^3}_{\text{suma de cubos}})+(\underbrace{1+2+3+4+\ldots+20}_{\text{suma de naturales}})]$$

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cancel{20}(21)}{\cancel{2}}\right)^2+\frac{20\times21}{2}\right]=\frac{1}{2}(44\,310)$$

$\therefore\ S=22\,155$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 13

Si:

$\overline{1ab}+\overline{2ab}+\overline{3ab}+\ldots+\overline{9ab}=\overline{4cd7};\ a\neq b;\ c\neq d>0\ \wedge\ \overline{n1n}+\overline{n2n}+\overline{n3n}+\ldots+\overline{n9n}=\overline{xyz4}$

Calcule $c+d+a+b+x+y+z$

A) 29 B) 73 C) 45 D) 38 E) 41

Resolución

Se pide el valor de $c+d+a+b+x+y+z$

Datos:

$\overline{1ab}+\overline{2ab}+\overline{3ab}+\ldots+\overline{9ab}=\overline{4cd7};\ a\neq b;\ c\neq d>0\ \wedge\ \overline{n1n}+\overline{n2n}+\overline{n3n}+\ldots+\overline{n9n}=\overline{xyz4}$

Las expresiones del dato las escribiremos en forma vertical, ya que de ese modo se puede observar con mayor facilidad la relación entre sus sumandos. Es decir:

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 2}\ \ \\
\overline{1ab}\ +\\
\overline{2ab}\ \ \\
\overline{3ab}\ \ \\
\vdots\ \vdots\ \ \\
\overline{9ab}\ \ \\
\hline
\overline{4cd7}\ \
\end{array}$$

Unidades: Al sumar las cifras de las unidades, se tiene

$$9b=\ldots7\ \rightarrow\ 9\underset{\substack{\downarrow\\3}}{b}=27\qquad b=3$$

Decenas:

$9\underset{\downarrow}{a}+2=\overline{\ldots\underset{\downarrow}{d}}$ (número de 2 cifras necesariamente)

$9\times2+2=20$ (I)

$9\times4+2=38$ (II)

$9\times5+2=47$ (III)

Veamos cada caso:

- Caso I: si $a=2$
- Caso II: si $a=4$
- Caso III: si $a=5$

$$\begin{array}{r} \overline{1ab}\ + \\ \overline{2ab} \\ \overline{3ab} \\ \vdots\ \vdots \\ \overline{9ab} \\ \hline \overline{4cd7} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \overset{2\,2}{123}\ + \\ 223 \\ 323 \\ \vdots\ \vdots \\ 923 \\ \hline 4707 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{3\,2}{143}\ + \\ 243 \\ 343 \\ \vdots\ \vdots \\ 943 \\ \hline 4887 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{4\,2}{153}\ + \\ 253 \\ 353 \\ \vdots\ \vdots \\ 953 \\ \hline 4977 \end{array}$$

$d>0$ (no cumple)   iguales (no cumple)   diferentes (cumple)

$\rightarrow\ c=9\quad d=7$

Ahora con la expresión

$$\begin{array}{r} \overline{n1n}\ + \\ \overline{n2n} \\ \overline{n3n} \\ \vdots\ \vdots \\ \overline{n9n} \\ \hline \overline{xyz4} \end{array}$$

Unidades: al sumar las cifras de las unidades se tiene

$$9n=\ldots4\ \rightarrow\ \underset{\substack{\downarrow \\ 6}}{9n=54}\qquad n=6$$

Decenas: se incluye el 5 que llevaba de las unidades.

$$45+5=\overline{5z}$$

$$\rightarrow\ z=0$$

Reemplazamos en la expresión y se obtiene

$$\begin{array}{r} \overset{5\,5}{616}\ + \\ 626 \\ 636 \\ \vdots\ \vdots \\ 696 \\ \hline 5904 \end{array}$$

de donde

$\rightarrow\ x=5$

$\rightarrow\ y=9$

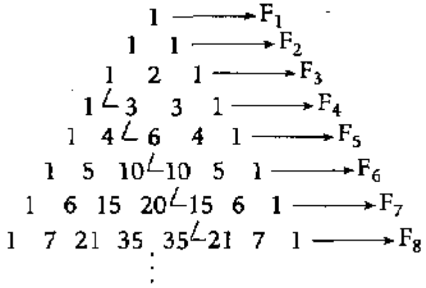
$\rightarrow\ z=0$

$\therefore\ c+d+a+b+x+y+z=9+7+5+3+5+9+0=38$

Clave D

PROBLEMA N.° 14

Calcule la suma de todos los términos unidos por la línea demarcada hasta la fila 20.

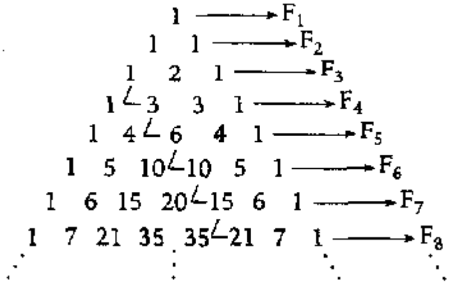


A) 1320 B) 3150 C) 5985

D) 4270 E) 7250

Resolución

Se pide la suma de todos los términos unidos por la línea hasta la fila 20 en el siguiente arreglo



Con los términos que se deben sumar, formaremos una serie en el orden de las filas.

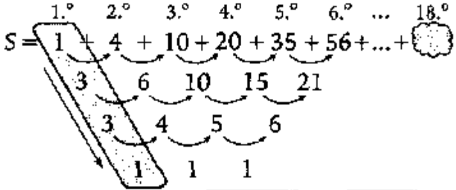
$$S=\overset{F_3}{1}+\overset{F_4}{(1+3)}+\overset{F_5}{(4+6)}+\overset{F_6}{(10+10)}+\overset{F_7}{(20+15)}+$$

$$+\overset{F_8}{(35+21)}+\overset{\dots}{\dots}+\overset{F_{20}}{(\quad)}$$

de F_3 a F_{20} hay 18 términos

$$S=\overset{1.°}{1}+\overset{2.°}{4}+\overset{3.°}{10}+\overset{4.°}{20}+\overset{5.°}{35}+\overset{6.°}{56}+\overset{\dots}{\dots}+\overset{18.°}{\{\quad\}}$$

Hallamos el valor de la serie aplicando la fórmula de los números combinatorios, para ello hacemos lo siguiente:



como se pide la suma de los 18 primeros términos...

$$S=1C_1^{18}+3C_2^{18}+3C_3^{18}+1C_4^{18}$$

$$S=1\times\frac{18}{1}+3\times\frac{18\times17}{2\times1}+3\times\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}+$$

$$+1\times\frac{18\times17\times16\times15}{4\times3\times2\times1}$$

Operamos y reducimos

$\therefore\ S=5985$

Clave C

PROBLEMA N.° 15

Calcule el valor de

$S=3+10+29+66+\dots+1730$

A) 3215 B) 6108 C) 4320

D) 8250 E) 1308

Resolución

Se pide el valor de

$$S=3+10+29+66+\dots+1730$$

Para encontrar la forma general de los términos de la serie, buscaremos relacionarlos con números notables (cuadrados, cubos, triangulares). Por ejemplo, los términos se pueden escribir así:

$$S=(1+2)+(8+2)+(27+2)+(64+2)+...+(1728+2)$$

$$S=\underbrace{(1^3+2)+(2^3+2)+(3^3+2)+(4^3+2)+\ldots+(12^3+2)}_{\text{12 sumandos}}$$

se deduce de la base de los números cubos

Ordenamos y agrupamos, de donde se obtiene

$$S=\underbrace{(1^3+2^3+3^3+\ldots+12^3)}_{\text{suma de cubos}}+\underbrace{(2+2+2+\ldots+2)}_{\text{12 sumandos}} \rightarrow S=\left(\frac{12(13)}{2}\right)^2+2(12)$$

$\therefore\ S=6108$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 16

Ana va al cine durante tres días alternadamente en una semana, y lo hace al mes en tres semanas consecutivas. Si el segundo día de un cierto mes es jueves y la suma de las fechas de los días que fue al cine en ese mes es 198. ¿Qué fecha y día será la séptima vez que fue al cine en dicho mes, si asiste siempre los mismos días?

A) lunes 27
B) martes 12
C) jueves 7
D) sábado 15
E) lunes 8

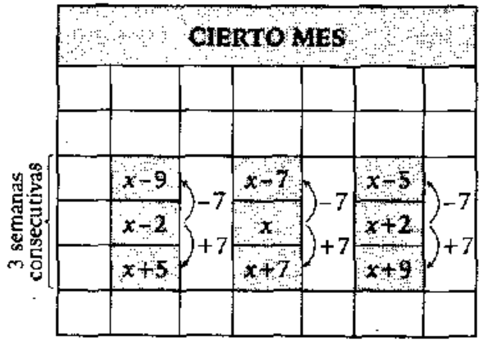
Resolución

Se pide fecha y día de la séptima vez que fue al cine en el mes.

Datos:

- El segundo día del mes es jueves.
- Suma de las fechas de los días que va al

A partir del segundo dato, distribuimos los días del mes en el que Ana va al cine, comenzando en el día central: x (5.° día).



Del dato:

$$x-\cancel{9}+x-\cancel{7}+x-\cancel{5}+x-\cancel{2}+x+x+\cancel{2}+$$
$$+x+\cancel{5}+x+\cancel{7}+x+\cancel{9}=198$$

$9x=198$

$x=22$

Construimos dicho mes cuyo segundo día es jueves, y reemplazando el valor de x identificamos los días que Ana va al cine.

CIERTO MES						
D	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

séptimo día que va al cine

Por lo tanto, la fecha es lunes 27.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

En un torneo de fútbol de dos ruedas participaron 14 equipos. Al final del mismo se observó que cada equipo tenía un punto menos que el que le antecedía en la tabla de puntuaciones, excepto con el último que hizo cero puntos. Cuántos puntos hizo el campeón, si la puntuación por partido ganado es de 2 puntos?

A) 72 B) 28 C) 34
D) 57 E) 43

Resolución

Se pide la cantidad de puntos que hizo el campeón.
Datos:

- Participan 14 equipos en un torneo de dos ruedas.
- Al final, cada equipo tenía un punto menos que el anterior.
- Puntos por partido ganado=2.

Calculamos el número de partidos en total

$$\text{N.° de partidos} = \overset{\text{n.° ruedas}}{\cancel{2}}\times\overset{\text{n.° partidos / rueda}}{\left(\frac{14\times13}{\cancel{2}}\right)}$$

Entonces

$$\text{Total de puntos}=(14\times13)\times\overset{\text{puntos por partido}}{2}=28\times13$$

Luego, la distribución de puntos será

$$\begin{array}{lcccccccc|c}
\text{puesto:} & 1.^\circ & 2.^\circ & 3.^\circ & 4.^\circ\ldots & \overset{t_c}{7.^\circ}\ldots & 12.^\circ & 13.^\circ & & 14.^\circ \\
\text{puntos:} & x+6 & x+5 & & & x & & & & 0 \\
 & \multicolumn{8}{c|}{\underbrace{\quad -1 \quad -1 \quad -1 \qquad\qquad -1 \quad}_{\text{P.A.}}} &
\end{array}$$

Suma de puntos

$t_c\times13=28\times13$

$t_c=28=x$

Por lo tanto, el ganador obtuvo

$x+6=34$ puntos

Clave **C**

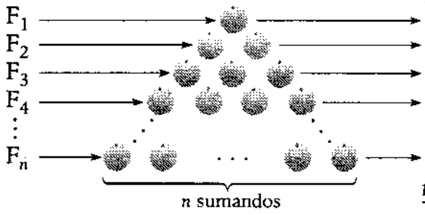
PROBLEMA N.° 18

En una canasta hay 60 duraznos. Evelyn los va colocando por fila de la siguiente manera: en la primera fila pone un durazno; luego toma 2 duraznos de la canasta y los pone en la segunda fila; y así sucesivamente hasta donde le sea posible. ¿Cuántos duraznos sobrarán en la canasta?

A) 5 B) 7 C) 9
D) 1 E) 3

Resolución

Se pide la cantidad de duraznos que sobran en la canasta.
De los datos del problema, se colocan los duraznos de la siguiente forma



total de duraznos

$$\begin{array}{r} 1\ + \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n \\ \hline \dfrac{n(n+1)}{2}\le 60 \end{array}$$

total de duraznos en la canasta

$$\times 2:\ \underset{\substack{\downarrow\\ 10}}{n}(n+1)\le 120$$

Entonces, el total de duraznos ordenados en fila es $\frac{10\times 11}{2}=55$

Por lo tanto, la cantidad de duraznos sobrantes es $60-55=5$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 19

Anita llega al colegio con cierto retraso diariamente. El primer día llegó 1 minuto tarde; el segundo día, 2 minutos tarde; el tercer día, 3 minutos tarde, y así sucesivamente. Al cabo de 20 días de asistencia, ¿cuánto tiempo ha perdido por las tardanzas?

A) 2,5 h B) 8 h
C) 5 h
D) 1 h E) 3,5 h

Resolución

Se pide el tiempo total perdido por tardanzas.
Se sabe que

$$\begin{array}{ll} \text{N.° día} & :\ 1.°\ \ 2.°\ \ 3.°\ \ 4.°\ \ ...\ \ 20.° \\ \text{Cantidad} & :\ 1+2+3+4+...+20=\dfrac{20\times 21}{2} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad =210\ \text{min} \end{array}$$

Por lo tanto, el tiempo total perdido es
210 min < > 3,5 h

Clave **E**

PROBLEMA N.° 20

La suma de los n primeros términos de una serie geométrica en donde los términos son números enteros es 31. Luego de calcular el primer término y n, dar el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

De los datos del problema se sabe que los términos de la serie geométrica son números enteros, por lo tanto, la razón de esta también será entera.

Ahora, los términos de una serie geométrica sabemos que forman una P.G., entonces, sea la P.G. $a; aq; aq^2; aq^3$; ... cuya suma de sus términos es 31, hallaremos cuántas progresiones existen. En

- P.G.: $a; aq; aq^2; aq^3; aq^4$; ... como la razón es entera, el menor valor que puede asignársele es 2, y se debe cumplir que:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=31$$

$$a(\overset{1.^\circ}{1}+\overset{2.^\circ}{q}+\overset{3.^\circ}{q^2}+\overset{4.^\circ}{q^3}+\overset{5.^\circ}{q^4})=31$$

solo puede ser 5 términos ya que $2^5 > 31$.

$$a(\underbrace{1+2+2^2+2^3+2^4}_{31})=31$$

$$a=1$$

$$\rightarrow\ 1+2+2^2+2^3+2^4=31$$

- Veamos ahora para $q=3$

$$a+aq+aq^2+aq^3=31$$

solo puede ser hasta el 4.° término ya que $3^4 > 31$.

$$a(\underbrace{1+3+3^2+3^3}_{40})=31$$

$\rightarrow$ $a \neq$ entero ¡no cumple!

$$a(\underbrace{1+3+3^2}_{13})=31$$

$\rightarrow$ $a \neq$ entero ¡no cumple!

Por lo tanto, no existirá una serie de razón 3 que cumpla las condiciones.

- Análogamente, se descarta que exista solución para $q=4$

- Para que $q=5$

$$a(\underbrace{1+5+5^2}_{31})=31 \ \rightarrow\ a=1$$

$$\rightarrow\ 1+5+5^2=31$$

Por lo tanto, existen dos soluciones.

Clave B

PROBLEMA N.° 21

La suma de 81 números pares consecutivos es igual a 171 veces el primer número. Halle la suma de las cifras del término central.

A) 5 B) 4 C) 9 D) 7 E) 8

Resolución

Se pide la suma de cifras del término central.

Según el enunciado, planteamos lo siguiente:

$$\underbrace{\overset{1.^\circ}{2n}+\overset{2.^\circ}{(2n+2)}+\overset{3.^\circ}{(2n+4)}+\overset{4.^\circ}{(2n+6)}+\overset{\ldots}{\ldots}+\overset{81.^\circ}{(2n+160)}}_{\substack{+2 \qquad +2 \qquad +2 \\ \text{serie aritmética}}}=171(2n)$$

Tenemos

$$\left(\frac{2n+(2n+160)}{2}\right)\times 81=171(2n)$$

$$(2n+80)\times 81=171(2n)$$

$$\underline{81(2n)}+81\times 80=171(2n)$$

$$\overset{9}{\cancel{81}}\times 8\cancel{0}=\cancel{9}\cancel{0}(2n)$$

$2n=72$ (primer término)

Luego, el término central (t_c) es

$$t_c=\frac{t_1+t_{81}}{2}=\frac{72+(72+160)}{2}$$

$t_c=152$

Por lo tanto, la suma de cifras del

$t_c=1+5+2=8$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 22

Halle el valor aproximado de

$$S=\frac{9}{20}+\frac{18}{80}+\frac{36}{320}+\frac{72}{1280}+\dots$$

A) 1/19 B) 5/19 C) 3/19
D) 7/19 E) 9/10

Resolución

Se pide valor aproximado de

$$S=\frac{9}{20}+\frac{18}{80}+\frac{36}{320}+\frac{72}{1280}+\dots$$

En la serie mostrada se puede deducir por simple observación el tipo de serie que es. Veamos:

$$S=\frac{9}{20}\underbrace{+}_{\times\frac{2}{4}}\frac{18}{80}\underbrace{+}_{\times\frac{2}{4}}\frac{36}{320}\underbrace{+}_{\times\frac{2}{4}}\frac{72}{1280}+\dots\left(\begin{array}{c}\text{serie geométrica}\\\text{decreciente infinita}\end{array}\right)$$

Entonces, el valor aproximado de

$$S=\frac{\frac{9}{20}}{1-\frac{2}{4}}=\frac{9}{10}$$

$\therefore\ S=9/10$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Halle el menor valor de x

$S=69+67+65+63+\dots+x=1000$

A) −29 B) 39 C) 31
D) 29 E) −19

Resolución

Se pide el menor valor de x.

Dato:

$S=69+67+65+63+\dots+x=1000$

Del dato, se deduce lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{c}\text{serie}\\\text{aritmética}\end{array}\right)\ \overset{1.^\circ}{69}\underbrace{+}_{-2}\overset{2.^\circ}{67}\underbrace{+}_{-2}\overset{3.^\circ}{65}\underbrace{+}_{-2}\overset{4.^\circ}{63}+\overset{\dots}{\dots}+\overset{n.^\circ}{x}=1000$$

$t_n=-2n+(69-(-2))\ \dashrightarrow\ x=t_n=71-2n$

Entonces, al sumar los términos se tiene

$$\left(\frac{69+\overbrace{(71-2n)}^{x}}{2}\right)\times n=1000$$

$$(70-n)\times n=1000=50\times 20=20\times 50$$

$\rightarrow\ n=20\ \vee\ n=50$

Si $n=20$

$x=71-2n=31$

Si $n=50$

$x=71-2n=-29$

Por lo tanto, el menor valor de x es −29

Clave **A**

PROBLEMA N.° 24

Si: $A=4+7+10+13+\ldots$

$B=2+4+7+11+\ldots$

$C=3+6+12+24+\ldots$

y cada serie posee 10 sumandos, halle $A+B+C$.

A) 1250 B) 2578 C) 3474

D) 4512 E) 5218

Resolución

Se pide valor de $A+B+C$.

Dato:

Cada una de las series siguientes tiene 10 sumandos.

$A=4+7+10+13+\ldots$

$B=2+4+7+11+\ldots$

$C=3+6+12+24+\ldots$

Hallamos el valor de cada serie, reconociendo el tipo al que pertenece:

$$\overset{+9r}{\curvearrowright}$$

$$\text{I. } A=\overset{1.^{\circ}}{4}+\overset{2.^{\circ}}{7}+\overset{3.^{\circ}}{10}+\overset{4.^{\circ}}{13}+\overset{\ldots}{\ldots}+\overset{10.^{\circ}}{\boxed{31}}\ \text{(serie aritmética)}$$

$$\underbrace{+3\quad +3\quad +3\qquad\qquad +3}_{9\ \text{veces}}$$

$$A=\left(\frac{4+31}{2}\right)\times 10=175$$

$$\text{II. } B=\overset{1.^{\circ}}{2}+\overset{2.^{\circ}}{4}+\overset{3.^{\circ}}{7}+\overset{4.^{\circ}}{11}+\overset{\ldots}{\cdots}+\overset{10.^{\circ}}{\bigcirc}$$

$$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow\qquad\qquad\uparrow$$

$$B=\underbrace{\frac{1^2+3}{2}+\frac{2^2+4}{2}+\frac{3^2+5}{2}+\frac{4^2+6}{2}+\cdots+\frac{10^2+12}{2}}_{\text{(serie cuadrática)}}$$

$$B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+10^2)\\+(3+4+5+\ldots+12)\end{bmatrix}$$

$$B=\frac{1}{2}\left[\frac{10\times 11\times 21}{6}+\left(\frac{3+12}{2}\right)\times 10\right]$$

$$B=230$$

$$\text{III. } C=\underset{\times 2}{\overset{1.^{\circ}}{3}+\overset{2.^{\circ}}{6}}+\underset{\times 2}{\overset{3.^{\circ}}{12}}+\underset{\times 2}{\overset{4.^{\circ}}{24}}+\overset{\ldots}{\ldots}+\overset{10.^{\circ}}{\bigcirc}\ \left(\begin{matrix}\text{serie geométrica}\\ \text{finita}\end{matrix}\right)$$

$$C=\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3069$$

$\therefore\ A+B+C=3474$

Clave C

PROBLEMA N.° 25

Encontrar un número de 3 cifras divisible por 11 y tal que permutando la cifra de las decenas con las de las unidades se obtiene un número cuyas tres cifras están en progresión aritmética. Indique la suma de las cifras de dicho número.

A) 6; 12; 18 B) 3; 14; 15

C) 7; 11; 15

D) 9; 13; 17 E) 7; 12; 17

Resolución

Si pide la suma de cifras de $\overline{abc}$: $a+b+c$

Dato:

$$\overline{abc}=\begin{cases}\text{divisible por 11} & \text{(I)}\\ \text{si } \overline{acb}\text{, entonces, } a, c \text{ y } b \text{ forman una}\\ \text{P.A.} & \text{(II)}\end{cases}$$

Del dato (I):

$a+c-b=\overset{o}{\overline{11}}$ (criterio de divisibilidad por 11)

Del dato (II):

$$c=\frac{a+b}{2}\quad \text{(término central)}$$

Reemplazamos en (I):

$$a+\frac{a+b}{2}-b=\overset{\circ}{11}$$

$$\times 2:\ 3a-b=\overset{\circ}{11}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \downarrow\ \downarrow & & \\ 1\ \ 3 \rightarrow c=2 & \rightarrow & \overline{abc}=132 \\ 2\ \ 6 \rightarrow c=4 & \rightarrow & \overline{abc}=264 \\ 3\ \ 9 \rightarrow c=6 & \rightarrow & \overline{abc}=396 \end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{encontramos 3}\\ \text{números con}\\ \text{cifras diferentes}\end{array}$$

Por lo tanto, la suma de cifras de $\overline{abc}$ es

6; 12; 18

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Halle

$$S=\underbrace{3+33+333+3333+\ldots+333\ldots3}_{n\text{ sumandos}}$$

A) $\dfrac{10^n-1}{9}$

B) $\dfrac{10^{n+1}-9n}{27}$

C) $\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$

D) $\dfrac{10^n-9n}{27}$

E) $\dfrac{10^{n+1}+9n-10}{9}$

Resolución

Se pide el valor de S

$$S=\underbrace{3+33+333+3333+\ldots+333\ldots33}_{n\text{ sumandos}}$$

Multiplicamos por 3 a cada sumando y se obtiene

$$3S=\overset{1.^\circ}{9}+\overset{2.^\circ}{99}+\overset{3.^\circ}{999}+\overset{4.^\circ}{9999}+\overset{\ldots}{\ldots}+\overset{n.^\circ}{999\ldots99}$$

Se observa que la nueva serie está formada por números máximos, con lo que cada término se puede expresar así

$$3S=(10^1-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+$$
$$+(10^4-1)+\ldots+(10^n-1)$$

Ordenamos y agrupamos

$$3S=\underbrace{(10+10^2+10^3+10^4+\ldots+10^n)}_{\substack{\times10\ \ \times10\ \ \times10\ \ \times10\\ \text{serie geométrica}}}-\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\text{ sumandos}}$$

$$3S=\frac{10\overset{\frown}{(10^n-1)}}{10-1}-n(1)$$

$$3S=\frac{10^{n+1}-10}{9}-n$$

$$3S=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$$

$$\therefore\quad S=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 27

He repartido un total de 1900 caramelos entre los 25 sobrinos que tengo, dándole a cada uno 3 caramelos más que al anterior. ¿Cuántos caramelos les di a los 10 primeros?

A) 815
B) 420
C) 720
D) 535
E) 180

Resolución

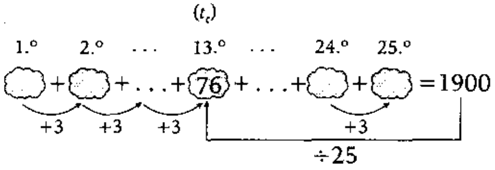
Se pide la cantidad de caramelos repartidos a los 10 primeros sobrinos: S

Se sabe lo siguiente:

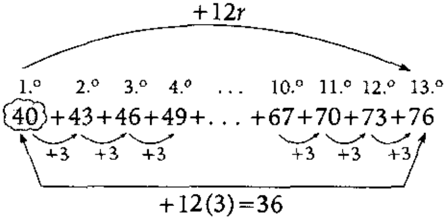
I. Total de caramelos repartidos entre los 25 sobrinos: 1900

II. Cada sobrino recibe 3 más que el anterior.

Con el dato I, hallamos el término central de la siguiente forma:



Luego, se puede completar los términos que piden sumar a partir del término de lugar 13 (central):



De donde

$$S=\overset{1.^\circ}{40}+\overset{2.^\circ}{43}+\overset{3.^\circ}{46}+\overset{4.^\circ}{49}+\ldots+\overset{9.^\circ}{64}+\overset{10.^\circ}{67}\ \begin{pmatrix}\text{serie}\\ \text{aritmética}\end{pmatrix}$$

$$S=\left(\frac{40+67}{2}\right)\times 10$$

$\therefore\ S=535$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 28

La suma de los cuadrados de los n primeros números enteros positivos es igual a la suma de los primeros $2n$ números enteros positivos. Halle n.

A) 5 B) 4 C) 6
D) 9 E) 8

Resolución

Se pide el valor de n.

Se sabe por dato que:

$$\begin{pmatrix}\text{suma de los } n \text{ primeros}\\ \text{números cuadrados}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{suma de los } 2n \text{ primeros}\\ \text{números enteros positivos}\end{pmatrix}$$

Entonces

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=1+2+3+4+\ldots+2n$$

$$\frac{\cancel{n}(n+1)\cancel{(2n+1)}}{6}=\frac{\cancel{2}\cancel{n}\cancel{(2n+1)}}{\cancel{2}}$$

$$n+1=6$$

$\therefore\ n=5$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

Se contrata a un obrero para cavar en busca de fósiles, prometiéndole pagar una suma por el primer fósil que encuentre y que luego se le irá duplicando dicha suma por cada nuevo fósil encontrado.

Si encuentra 12 fósiles y recibe 12 285 soles, ¿cuánto le pagaron por el octavo fósil hallado que encontró?

A) S/.380
B) S/.384
C) S/.360
D) S/.400
E) S/.420

Resolución

Se pide el monto pagado por el 8.° fósil: t_8

Sea el monto pagado por el 1.^{er} fósil: S/.a

Las cantidades pagadas por los 12 fósiles, según dato del problema, forman una P.G. donde:

uno menos que su respectivo lugar

1.° 2.° 3.° 4.° ... 7.° 8.° ... 12.°

P.G: $a + 2^1a + 2^2a + 2^3a + \ldots + 2^6a + 2^7a + \ldots + 2^{11}a = 12\,285$ (dato)

×2 ×2 ×2 ... ×2 ×2 ×2 ... ×2

Calculamos el valor de la serie geométrica

$$\frac{a(2^{12}-1)}{2-1}=12\,285 \;\rightarrow\; a(4095)=12\,285 \;\rightarrow\; a=3$$

$\therefore\; t_8=2^7a=384$ soles

Clave **B**

PROBLEMA N.° 30

Dados $S_1=10\times11+11\times12+12\times13+...+20\times21$; $S_2=1\times2+2\times3+3\times4+...+20\times21$

Halle $S_2\div S_1$

A) 28/33 B) 25/24 C) 25/27 D) 28/25 E) 28/27

Resolución

Se pide resultado de $S_2\div S_1$

$S_1=10\times11+11\times12+12\times13+...+20\times21$ $S_2=1\times2+2\times3+3\times4+...+20\times21$

Calculamos el valor de la serie S_1 de la siguiente forma

$$S_1=\underbrace{(1\times2+2\times3+...+9\times10+10\times11+11\times12+12\times13+...+20\times21)}_{\text{suma notable (20 términos)}}-\underbrace{(1\times2+2\times3+...+9\times10)}_{\text{9 términos}}$$

$$S_1=\frac{20\times21\times22}{3}-\frac{9\times10\times11}{3} \;\rightarrow\; S_1=2750$$

Ahora, el valor de la serie S_2 es

$$S_2=\frac{20\times21\times22}{3}=3080$$

Finalmente

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\cancel{3080}}{\cancel{2750}}$$

$$\therefore\; \frac{S_2}{S_1}=\frac{28}{25}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

La suma en el límite de los términos de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos es m veces la suma de sus n primeros términos. Halle la razón de la P.G.

A) $\sqrt[n]{\dfrac{m-1}{m}}$ B) $\sqrt[n]{m-1}$ C) $\sqrt[n]{\dfrac{m-1}{2m}}$ D) $\sqrt[n]{\dfrac{m+1}{m}}$ E) $\sqrt[n]{\dfrac{m-1}{m+1}}$

Resolución

Se pide la razón de la P.G.: q $(0 < q < 1)$

Por dato del problema se sabe lo siguiente:

$$\overbrace{\underset{\times q\ \ \times q\ \ \times q\ \ \times q}{a+aq+aq^2+aq^3+aq^4}+\ldots}^{\text{serie geométrica decreciente infinita}}=m(\overset{1.°}{a}+\overset{2.°}{aq}+\overset{3.°}{aq^2}+\overset{\ldots}{\ldots}+\overset{n.°}{aq^{n-1}})$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\times q\ \ \times q\ \ \times q$$

Hallamos ahora la suma en cada serie

$$\frac{\cancel{a}}{1-q}=m\times\frac{\cancel{a}\left(q^n-1\right)}{q-1}\ \rightarrow\ \frac{1}{\cancel{1-q}}=m\left(\frac{1-q^n}{\cancel{1-q}}\right)\ \rightarrow\ \frac{1}{m}=1-q^n$$

$$q^n=1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m}$$

$$\therefore\quad q=\sqrt[n]{\frac{m-1}{m}}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 32

Augusto y Celia leen una novela de 3000 páginas. Augusto lee 100 páginas diarias y Celia lee 10 páginas el primer día, 20 el segundo día, 30 el tercero y, así sucesivamente. Si ambos comienzan el 22 de febrero de un año bisiesto, ¿en qué fecha coincidirán en leer la misma página por primera vez, y cuántas páginas, habrán leído hasta ese día?

A) 10 de marzo; 1800 B) 12 de marzo; 1600 C) 11 de marzo; 1600

D) 10 de marzo; 1900 E) 11 de marzo; 1900

Resolución

Se pide la fecha en que coincidirán en leer la misma página por primera vez y el total de páginas leídas. Para que ambas personas (Augusto y Celia) coincidan en leer la misma página, leyendo cantidades diferentes de páginas por día, deben acumular el mismo total de páginas leídas luego de un cierto número de días; en consecuencia, la diferencia de sus totales será cero.

Ejemplos

$$\begin{array}{rl} & 1.^\circ \quad\; 2.^\circ \quad\; 3.^\circ \quad \text{total}\\ A: & 10+10+10=30\\ \underline{\quad B:} & \underline{5}+\underline{10}+\underline{15}=\underline{30}\\ A-B: & \underbrace{5+0+-5}_{3\text{ términos}}=0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 1.^\circ \quad\; 2.^\circ \quad\; 3.^\circ \quad\; 4.^\circ \quad\; 5.^\circ \quad \text{total}\\ A: & 12+12+12+12+12=60\\ \underline{\quad B:} & \underline{4}+\underline{8}+\underline{12}+\underline{16}+\underline{20}=\underline{60}\\ A-B: & \underbrace{8+4+0\quad -4\quad -8}_{5\text{ términos}}=0 \end{array}$$

En el problema, aplicamos lo visto en los ejemplos, de tal forma que al trabajar con las diferencias se hallará el total de días:

se deduce de las 19 diferencias entre las páginas de Augusto y Celia

$$\begin{array}{lcl} \text{N.° día} & : & 1.^\circ \quad 2.^\circ \quad 3.^\circ \quad \dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 19.^\circ\\ \text{Augusto} & : & 100+100+100+\dots+100+100+100+100+\dots+\boxed{100}=S\\ \underline{\text{Celia}} & : & \underline{10}+\underline{20}+\underline{30}+\dots+\underline{90}+\underline{100}+\underline{110}+\underline{120}+\dots+\underline{\boxed{190}}=\underline{S}\\ \begin{array}{c}\text{Diferencia}\\ \text{entre cantidad}\\ \text{de páginas}\\ \text{(Aug.- Celia)}\end{array} & : & \underbrace{90+80+70+\dots+10+0-10-20\ \dots\ -90}_{19\text{ sumandos}}=0 \end{array}$$

Entonces, el total de páginas leídas es 100×19=1900

Luego de 19 días de leer la novela, coincidirán en la misma página por primera vez. Hallamos la fecha de ese día:

$$\begin{array}{cc} \text{febrero (bisiesto)} & \text{marzo}\\ \text{inicio} \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad \text{final} \end{array}$$

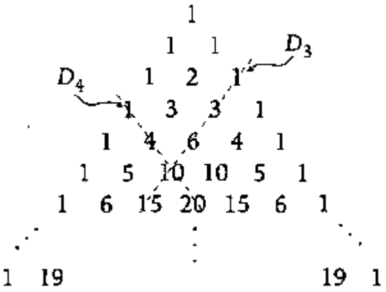
$$\boxed{}\underbrace{\boxed{22}\boxed{23}\boxed{\dots}\boxed{29}\quad\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\dots}\boxed{10}\boxed{11}}_{19\text{ días}}\boxed{}$$

Por lo tanto, la fecha será el 11 de marzo y habrán leído 1900 páginas.

Clave E

PROBLEMA N.° 33

Calcule S_1+S_2 siendo
S_1: la suma de términos de D_3
S_2: la suma de términos de D_4

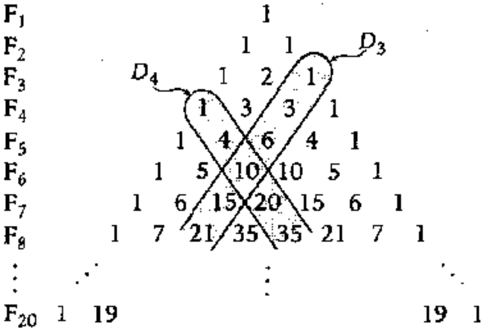


A) 5985
B) 5855
C) 5900
D) 6985
E) 5585

Resolución

Se pide el valor de S_1+S_2

En el arreglo triangular mostrado



S_1: suma de términos de D_3
S_2: suma de términos de D_4
(un término menos que D_3)

Ordenamos los términos a considerar en cada caso y formamos las series cuya suma es lo que debemos hallar.

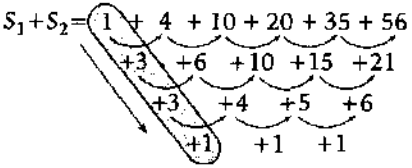
F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	...	F_{20}
1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	...	18.°

$$S_1 = 1+3+6+10+15+21+\ldots+\bigcirc$$

$$S_2 = 1+4+10+20+35+\ldots+\bigcirc$$

$$S_1+S_2 = 1+4+10+20+35+56+\ldots+\bigcirc$$

Ahora, aplicamos la fórmula de los números combinatorios y hallaremos el valor de la serie



$$S_2+S_2=1C_1^{18}+3C_2^{18}+3C_3^{18}+1C_4^{18}$$

$$S_2+S_2=1\times\frac{18}{1}+3\times\frac{18\times17}{2\times1}+3\times\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}+$$

$$+1\times\frac{18\times17\times16\times15}{4\times3\times2\times1}$$

Operando y reduciendo

$S_1+S_2=5985$

Clave A

PROBLEMA N.° 34

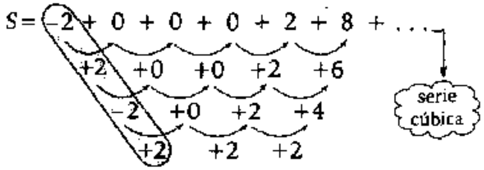
Calcule la suma de los 20 primeros términos de
$-2; 0; 0; 0; 2; 8; \ldots$

A) 7730
B) 7570
C) 7700
D) 7750
E) 7755

Resolución

Se pide suma de los 20 primeros términos de $S=-2; 0; 0; 0; 2; 8; \ldots$

Para saber que tipo de serie es, utilizaremos las diferencias sucesivas entre los términos, es decir:



Calculamos el valor de la serie con el método de los números combinatorios

$$S=-2C_1^{20}+2C_2^{20}-2C_3^{20}+2C_4^{20} \;\rightarrow\; S=-2\times\frac{20}{1}+2\times\frac{20\times19}{2\times1}-2\times\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}+2\times\frac{20\times19\times18\times17}{4\times3\times2\times1}$$

Operamos y reducimos de tal forma que $S=7750$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 35

Calcule $S=1+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{24}+\ldots$ (20 sumandos)

A) $\frac{3\times2^{21}-43}{3\times2^{20}}$ B) $\frac{5\times2^{20}-45}{3\times2^{19}}$ C) $\frac{3\times2^{20}-53}{3\times2^{19}}$ D) $\frac{3\times2^{21}-50}{3\times2^{20}}$ E) $\frac{3\times2^{21}-53}{3\times2^{20}}$

Resolución

Se pide el valor de S. $S=1+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{9}{24}+\ldots$ (20 sumandos)

$$5\xrightarrow{+2}7\xrightarrow{+2}9 \qquad 6\xrightarrow{\times2}12\xrightarrow{\times2}24$$

Hallamos algunos términos de la serie y el último término

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & 1.° & & 2.° & & 3.° & & 4.° & & 5.° & & 6.° & & 20.° \\ S= & \frac{3}{3} & + & \frac{5}{6} & + & \frac{7}{12} & + & \frac{9}{24} & + & \frac{11}{48} & + & \frac{13}{96} & +\ldots+ & \end{array}$$

2(20)+1

$$S=\frac{3}{3}+\frac{5}{3\times2^1}+\frac{7}{3\times2^2}+\frac{9}{3\times2^3}+\frac{11}{3\times2^4}+\frac{13}{3\times2^5}+\ldots+\frac{41}{3\times2^{19}}$$

uno menos que el lugar

$$\times2 \qquad (-) \quad (-) \quad (-) \quad (-) \quad (-)$$

$$2S=\frac{6}{3}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3\times2^1}+\frac{9}{3\times2^2}+\frac{11}{3\times2^3}+\frac{13}{3\times2^4}+\ldots+\frac{41}{3\times2^{18}}$$

Restamos ambas expresiones de manera conveniente, como se indica

$$S=\frac{6}{3}+\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{2}{3\times 2^1}+\frac{2}{3\times 2^2}+\frac{2}{3\times 2^3}+\frac{2}{3\times 2^4}+\ldots+\frac{2}{3\times 2^{18}}}_{\text{serie geométrica finita }\left(q=\frac{1}{2}\right)}-\frac{41}{3\times 2^{19}} \quad\rightarrow\quad S=2+\frac{2}{3}\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{41}{3\times 2^{19}}$$

Operamos y reducimos, con lo cual

$$S=\frac{5\times 2^{20}-45}{3\times 2^{19}}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 36

La suma de los términos de la última fila del arreglo triangular mostrado es 9520. ¿Cuántas filas tiene el arreglo?

$$\begin{array}{lcc}
F_1 & \longrightarrow & 4 \\
F_2 & \longrightarrow & 8 \quad 12 \\
F_3 & \longrightarrow & 12 \quad 16 \quad 20 \\
F_4 & \longrightarrow & 16 \quad 20 \quad 24 \quad 28 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

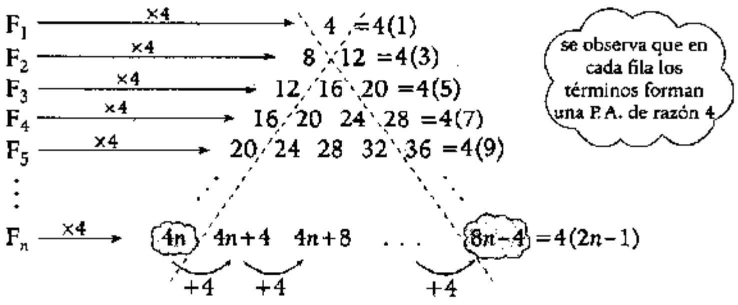
A) 40 B) 38 C) 35 D) 42 E) 50

Resolución

Se pide cantidad de filas del arreglo: n

Dato: suma de términos en la fila n=9520

En el arreglo triangular, hallamos el primer y último término de la fila n a partir de lo siguiente:



Del dato:

$$\underbrace{\overset{1.^\circ}{4n}+\overset{2.^\circ}{(4n+4)}+\overset{3.^\circ}{(4n+8)}+\overset{...}{...}+\overset{n.^\circ}{(8n-4)}}_{\text{serie aritmética}}=9520$$

$$\left(\frac{4n+(8n-4)}{2}\right)\times n=9520$$

$$(6n-2)\times n=9520$$

$$(3n-1)\times n=4760=119(40)$$

$\therefore$ $n=40$ filas

Clave **A**

PROBLEMA N.° 37

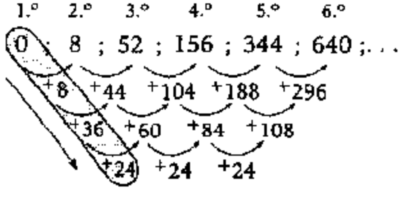
Calcule la suma de los n términos de la sucesión:
0; 8; 52; 156; 344; 640; ...

- A) n^4-n^2+2n
- B) n^4-3n^2+2n
- C) n^4+n^2+2n
- D) n^4-3n^2+n
- E) n^4+3n^2

Resolución

Se pide la suma de los n términos de 0; 8; 52; 156; 344; 640; ...

Para hallar la suma, aplicamos el método de los números combinatorios.



$$S=\cancel{0C_1^n}+8C_2^n+36C_3^n+24C_4^n$$

Efectuamos

$$S=8\frac{n(n-1)}{2\times1}+36\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}+$$
$$+24\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}$$

Operamos y reducimos de tal forma que

$$S=n^4-3n^2+2n$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 38

Calcule A en

$$A=\sum_{J=1}^{10}\sum_{n=1}^{J}[n(3n-1)]$$

A) 3040	B) 3140	C) 3400
D) 3420		E) 3410

Resolución

Se pide el valor de $A=\sum_{J=1}^{10}\sum_{n=1}^{J}[n(3n-1)]$

Realizamos el cálculo del valor de A por partes; es decir, comenzaremos con

$$M=\sum_{n=1}^{J}[n(3n-1)]=\sum_{n=1}^{J}[3n^2-n]$$

Aplicando las propiedades se tiene

$$M=3\underbrace{\sum_{n=1}^{J}n^2}_{\substack{\text{suma de}\\\text{cuadrados}\\\text{(los } J \text{ primeros)}}}-\underbrace{\sum_{n=1}^{J}n}_{\substack{\text{suma de}\\\text{naturales}\\\text{(los } J \text{ primeros)}}}$$

$$M=\cancel{3}\times\frac{J(J+1)(2J+1)}{\cancel{6}_2}-\frac{J(J+1)}{2}$$

Reducimos y obtenemos

$$M=J^2(J+1)$$

Luego, reemplazamos en A

$$A=\sum_{J=1}^{10}\underbrace{\sum_{n=1}^{J}[n(3n-1)]}_{M}\ \rightarrow\ A=\sum_{J=1}^{10}\left[J^2(J+1)\right]=\sum_{J=1}^{10}\left[J^3+J^2\right]\ \rightarrow\ A=\underbrace{\sum_{J=1}^{10}J^3}_{\substack{\text{suma de los}\\ \text{10 primeros}\\ \text{cubos}}}+\underbrace{\sum_{J=1}^{10}J^2}_{\substack{\text{suma de los}\\ \text{10 primeros}\\ \text{cuadrados}}}$$

$$A=\left(\frac{10(11)}{2}\right)^2+\frac{10(11)(21)}{6}\ \rightarrow\ A=3025+385$$

$\therefore\ A=3410$

Clave E

PROBLEMA N.° 39

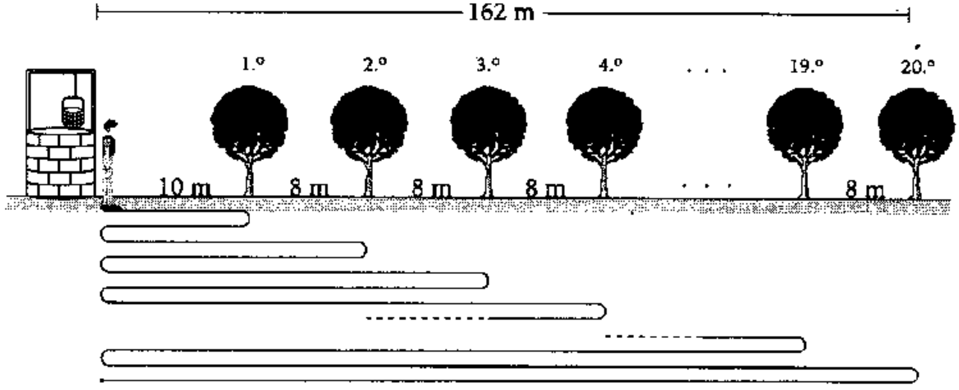
Una persona debe vaciar un balde de agua a cada uno de los 20 árboles que están sembrados en fila y separados uno del otro 8 m. Si la persona en cada viaje solo puede llevar un balde con agua y el pozo donde sacará el agua está a 10 m del primer árbol, ¿qué distancia habrá recorrido después de haber terminado con su tarea y haber devuelto el balde al pozo?

A) 3420 B) 3500 C) 3440 D) 3400 E) 3600

Resolución

Se pide distancia total recorrida por la persona: R.

De los datos del problema, realizaremos el siguiente gráfico para señalar el recorrido de la persona.



Se observa que el recorrido realizado hasta regar cada árbol y volver al pozo es

$$R=\overset{\text{1.}^{\text{er}}\text{ árbol}}{2\times 10}+\overset{\text{2.}^{\text{o}}\text{ árbol}}{2\times 18}+\overset{\text{3.}^{\text{o}}\text{ árbol}}{2\times 26}+\overset{\text{4.}^{\text{o}}\text{ árbol}}{2\times 34}+\overset{\dots}{\dots}+\overset{\text{20.}^{\text{o}}\text{ árbol}}{2\times 162}$$

Factorizamos el 2

$$R=2\underbrace{(\underset{+8}{10+18}\underset{+8}{+26}\underset{+8}{+34}+...+162)}_{\text{serie aritmética}}$$

$$R=2\times\left[\frac{(10+162)}{2}\times 20\right]$$

$\therefore\ R=3440$

Clave C

PROBLEMA N.° 40

Rebeca, al ganarse el premio mayor, lo reparte entre sus sobrinos de la siguiente manera: al 1.°, S/.100; al 2.°, S/.200; al 3.°, S/.300, y así sucesivamente en P.A., teniendo en cuenta que cuando ya no se pueda continuar con los que siguen, se continuará repartiendo de la manera descrita anteriormente y así sucesivamente, hasta agotar todo el premio cuyo valor asciende a S/.22 900. ¿Cuántos sobrinos se beneficiaron?

A) 24
B) 26
C) 28
D) 27
E) 30

Resolución

Se pide la cantidad de sobrinos beneficiados. De las condiciones del problema, el reparto se realiza de la siguiente forma

$$\underbrace{\overset{1.°}{100}+\overset{2.°}{200}+\overset{3.°}{300}+\overset{...}{\cdots}+\overset{n.°}{100n}}_{\text{serie aritmética}}\leq 22\,900$$

Tenemos

$$100\frac{n(n+1)}{2}\leq 22\,900$$

$$n(n+1)\leq 458$$

$$\downarrow$$

20 (máximo) → 20 sobrinos beneficiados

Entonces, el total repartido hasta ese momento es $100\frac{(20)(21)}{2}=21\,000$

De lo que concluimos que falta repartir

$22\,900-21\,000=1900$

Como no se puede continuar el reparto inicial con esta cantidad que falta repartir, iniciamos un nuevo reparto para otros sobrinos. Nuevamente comenzamos con S/.100, luego S/.200, así sucesivamente:

$$\overset{1.°}{100}+\overset{2.°}{200}+\overset{3.°}{300}+\overset{4.°}{400}+\overset{5.°}{500}=1500$$

Entonces **5** sobrinos más

Además, falta repartir ahora:

$1900-1500=400$

Luego, con lo que falta volvemos a iniciar desde S/.100

$\overset{1.°}{100}+\overset{2.°}{200}=300$ → **2** sobrinos más

De lo que se concluye que falta repartir finalmente:

$400-300=100$ (para un sobrino más)

Por lo tanto, el total de sobrinos beneficiados es

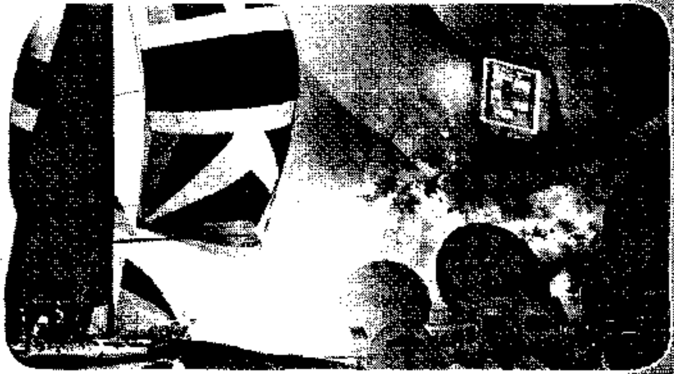
$20+5+2+1=28$

Clave C

Capítulo

15

Conteo de figuras



La observación de nuestro entorno, acompañada de un adecuado nivel de abstracción, nos permite encontrar diversas formas o figuras que nos crean interés y que luego serán empleadas en la construcción de nuevas formas; es mediante el conteo de figuras que desarrollaremos aún más este tipo de capacidades. Aquí veremos métodos para realizar el conteo de figuras, según sea el grado de complejidad de estas, así como también la forma particular que ellas pueden adoptar en los problemas. Nos referimos a los siguientes métodos:

- Conteo simple: por inspección y por combinación.
- Conteo por inducción.

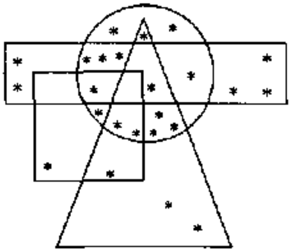
Estos métodos de conteo debemos tenerlos en cuenta, ya que no solo servirán para figuras planas, sino también para figuras con cierto volumen, ya sean cubos, paralelepípedos, pirámides, etc.

Capítulo 15

Conteo de figuras

PROBLEMA N.° 1

Dada la siguiente figura



Encuentre:

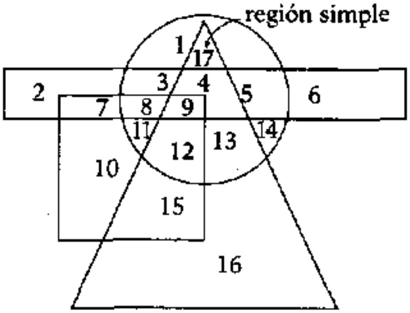
I. ¿Cuántas regiones simples tiene?
II. ¿Cuántas figuras geométricas básicas se han tomado en consideración para construirla?
III. ¿Cuántos asteriscos hay en total?
IV. ¿En cuántas regiones simples no hay más de un asterisco?
V. ¿Cuántos asteriscos se encuentra dentro del rectángulo y fuera del triángulo pero en el interior del cuadrado?

A) 16 - 5 - 24 - 10 - 1
B) 17 - 4 - 24 - 9 - 1
C) 16 - 5 - 24 - 10 - 1
D) 16 - 4 - 24 - 10 - 1
E) 16 - 4 - 24 - 11 - 2

Resolución

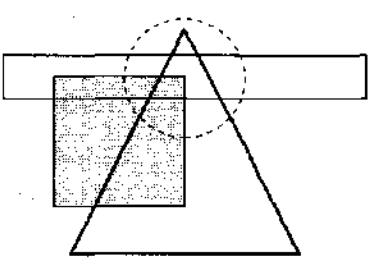
Se tiene el gráfico:

I. Se pide el total de regiones simples.
Contamos las regiones simples asignándole un número a cada una, es decir



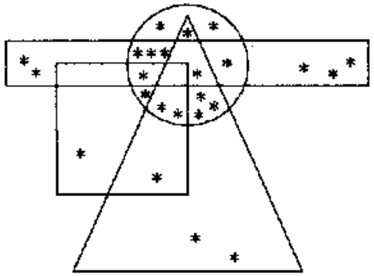
→ total=17

II. Se pide el número de figuras geométricas básicas.
En el gráfico se han utilizado circunferencia, triángulo y 2 cuadriláteros.



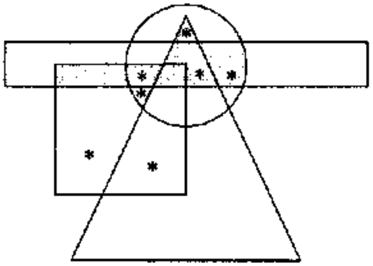
→ total=4

III. Se pide la cantidad total de *.
Contando directamente en el gráfico, se tiene:



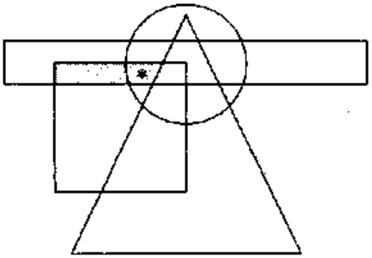
Total de * = 24

IV. Se pide el número de regiones simples con no más de un asterisco.
En el gráfico, indicamos lo pedido:



Total de regiones: 9

V. Se pide el número de asteriscos dentro del rectánguloy del cuadrado pero fuera del triángulo. Se observa solo un asterisco.

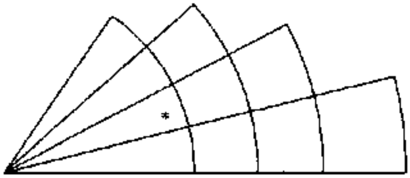


∴ 17 - 4 - 24 - 9 - 1

Clave **B**

PROBLEMA N.° 2

¿Cuántos sectores circulares presentan en su interior al asterisco?

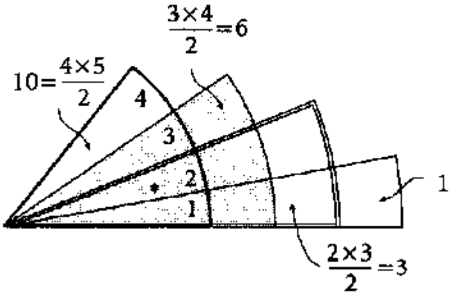


A) 20
B) 16
C) 14
D) 12
E) 8

Resolución

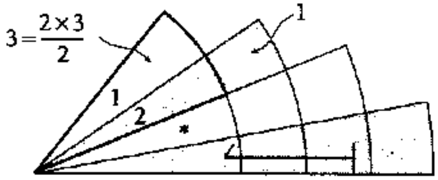
Se pide el número de sectores circulares con el asterisco en su interior.
Contaremos en el gráfico el total de sectores circulares y le restaremos aquellos que no presentan el asterisco en su interior.

- Hallaremos el total de sectores en el gráfico:



total de sectores circulares:
$\rightarrow$ $10+6+3+1=20$

- Ahora, se halla el total de sectores sin asterisco:



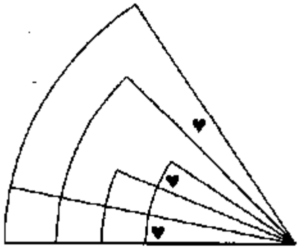
total de sectores circulares sin el asterisco:
$\rightarrow\ 3+1+4=8$

Por lo tanto, número de sectores circulares con el asterisco en su interior:
$20-8=12$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

¿Cuántos sectores circulares contienen a lo más 2 corazones en su interior?



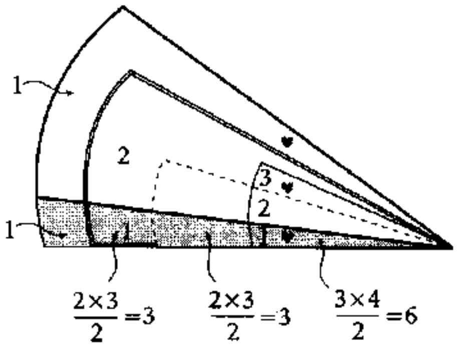
A) 15
B) 14
C) 13
D) 11
E) 10

Resolución

Se pide el número de sectores circulares con a lo más 2 corazones en su interior.

La expresión: **a lo más dos corazones**, implica 2 corazones (máximo), un corazón y ningún corazón.

En el gráfico, hallaremos lo pedido directamente:

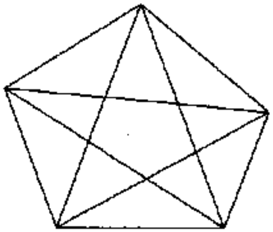


Por lo tanto, número de sectores circulares con a lo más 2 corazones:
$1+1+3+3+6=14$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

Halle el número total de triángulos.

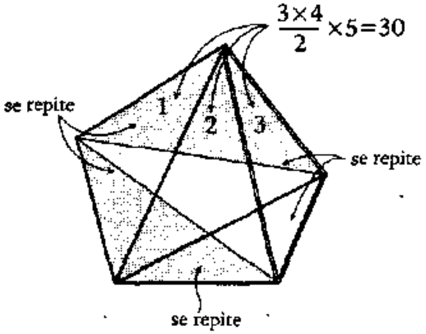


A) 40
B) 37
C) 35
D) 32
E) 34

Resolución

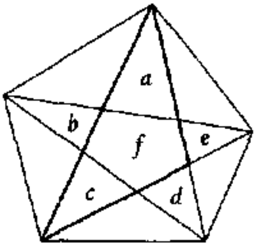
Se pide el total de triángulos en el gráfico.
Para apreciar con claridad el total de triángulos, realizamos el conteo por partes:

- Contamos triángulos aplicando la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, para $n=3$, es decir,



$\rightarrow$ total de triángulos: $30-\overbrace{5}^{\text{se repiten}}=25$

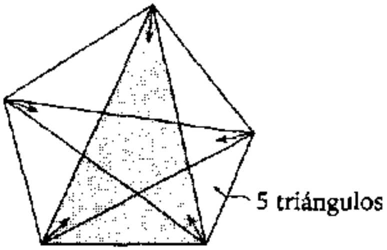
- En la parte que tiene forma de estrella, incluimos letras en cada región simple:



Aquí contemos los triángulos que tienen solo 3 letras en su interior, como muestra el gráfico (estos no fueron incluidos en el caso anterior):

afc, *afd*, *bfe*, *bfd*, *cfe*=5 triángulos

- Solo faltan contar aquellos triángulos como el que se muestra sombreado. Las flechas pueden servir de referencia para identificarlos.



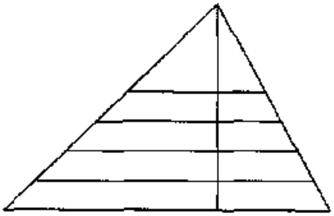
Por lo tanto, total de triángulos

$25+5+5=35$

Clave $\boxed{C}$

PROBLEMA N.° 5

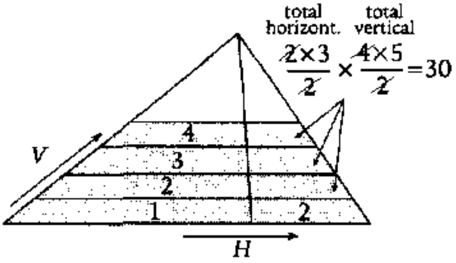
Halle el número total de cuadriláteros.



A) 30
B) 29
C) 28
D) 27
E) 26

Resolución

Se pide el número total de cuadriláteros.
En el gráfico, calculemos el total de cuadriláteros de la siguiente forma:

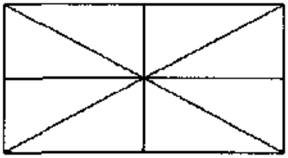


Por lo tanto, el número total de cuadriláteros es 30.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

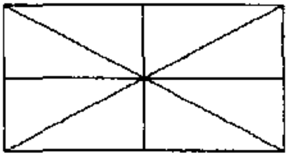
Halle el número total de cuadriláteros.



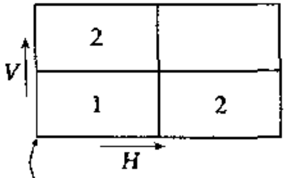
A) 16 B) 18 C) 17
D) 9 E) 10

Resolución

Se pide el número total de cuadriláteros.
Del gráfico, contamos los cuadriláteros de la siguiente manera:

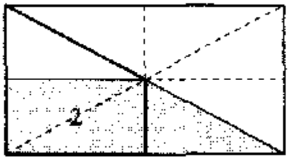


- Obviamos las diagonales del gráfico original y por fórmula tenemos que:



$$\text{total de cuadriláteros: } \overset{H}{\frac{2\times3}{2}}\times\overset{V}{\frac{2\times3}{2}}=9$$

- También se observan otros cuadriláteros; estos los contaremos así:



- Cada cuadrilátero pequeño de las esquinas genera dos cuadriláteros (trapecios), entonces, total$=2\underbrace{(4)}_{\text{esquinas}}=8$.

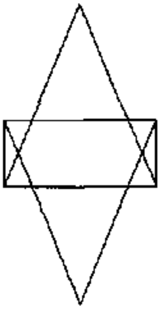
Por lo tanto, el total de cuadriláteros es
9+8=17

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

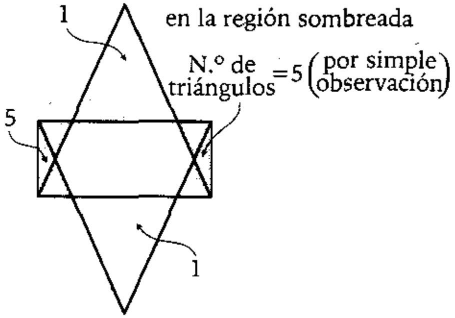
Calcule la cantidad total de triángulos en la figura.

A) 11
B) 10
C) 12
D) 8
E) 6



Resolución

Se pide el número total de triángulos.
En el gráfico, se observan triángulos pequeños (simples y compuestos) en la parte sombreada, además de los triángulos grandes resaltados.

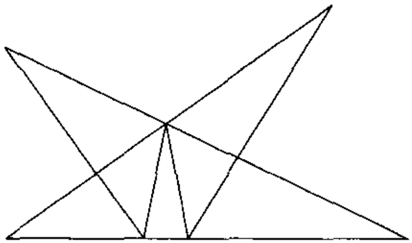


Por lo tanto, el número total de triángulos:
$2(5+1)=12$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

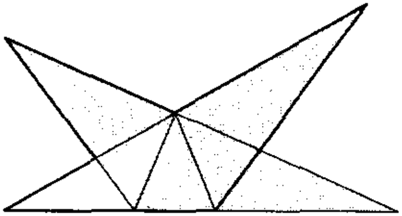
Calcule la cantidad total de hexágonos en la figura.



A) 3
B) 2
C) 4
D) 5
E) 1

Resolución

Se pide el total de hexágonos.



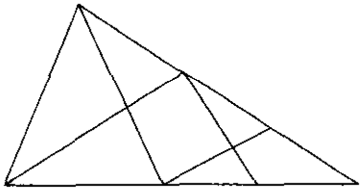
En el gráfico, los únicos hexágonos (polígonos de 6 lados) que se observan son los indicados con la región sombreada y el polígono resaltado.

Por lo tanto, el total de hexágonos=2.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

Calcule la cantidad total de hexágonos en la figura.



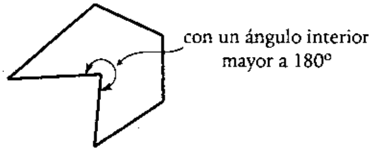
A) 12
B) 8
C) 7
D) 11
E) 5

Resolución

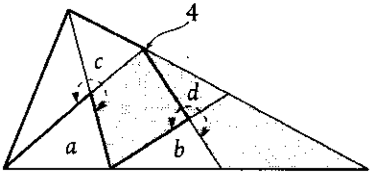
Se pide la cantidad total de hexágonos.

El conteo de hexágonos en el gráfico lo iremos realizando por partes.

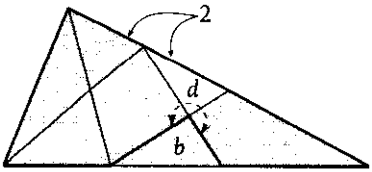
- Comenzamos contando los hexágonos de la forma:



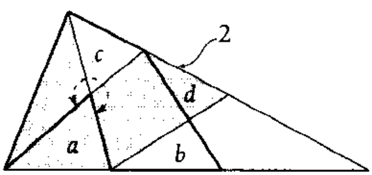
Encontramos 2 hexágonos de la forma indicada, señalados en el gráfico mediante lo sombreado y el polígono resaltado (como referencia podemos decir que se forman sin considerar las regiones simples con letras *a* y *b*). En forma análoga, se contarán 2 hexágonos, los cuales se forman sin considerar las regiones simples con letras *c* y *d*.



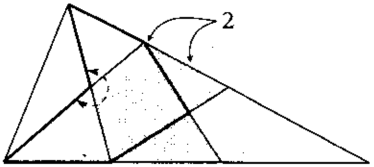
Ahora, tenemos otros 2 hexágonos, resaltados en el gráfico, en los cuales no se incluyen las regiones con letra *b* para uno, y sin la región con letra *d*.



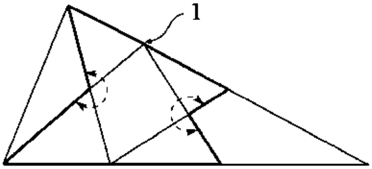
También observamos otros 2 hexágonos indicados en el gráfico: uno que no incluye a las regiones simples con letras *a* y *d*, y el otro que no incluye a las regiones simples con letras *b* y *c*.



Otros dos hexágonos con un ángulo interior mayor a 180° indicados mediante el polígono resaltado y la parte sombreada.



- Hexágonos con dos ángulos, internos mayores a 180°. Solo encontramos uno.



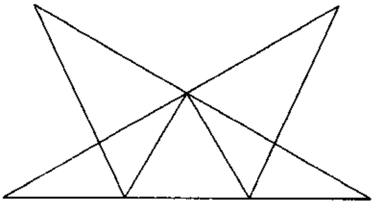
Por lo tanto, el total de hexágonos:

$4+3(2)+1=11$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

Halle el número total de triángulos.

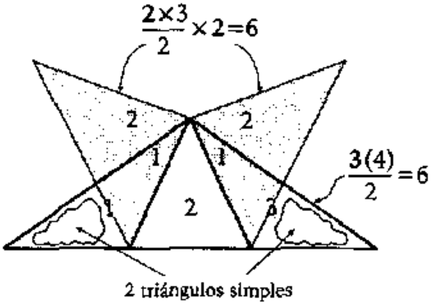


A) 15
B) 16
C) 14
D) 20
E) 28

Resolución

Se pide el número total de triángulos.

En el gráfico, contamos los triángulos con la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, es decir:



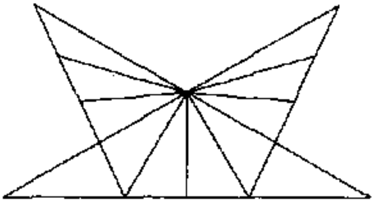
Por lo tanto, el número total de triángulos:

$2(6)+2=14$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 11

Halle el número total de triángulos.

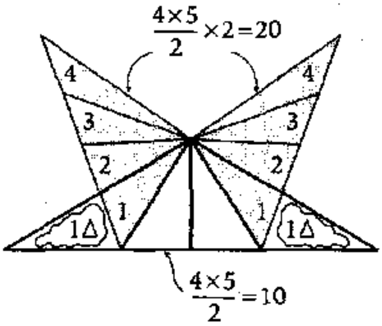


A) 32
B) 10
C) 12
D) 25
E) 19

Resolución

Se pide el número total de triángulos.

En el gráfico, se puede aplicar el conteo de triángulos por la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, para $n=4$ en los tres casos señalados (los sombreados y el resaldo).



Además, se observan otros 2 triángulos simples señalados en la parte inferior del gráfico.

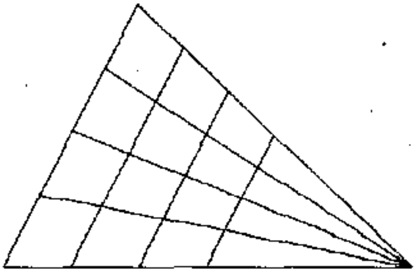
Por lo tanto, número total de triángulos:

$20+10+2=32$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

Halle el número total de triángulos.

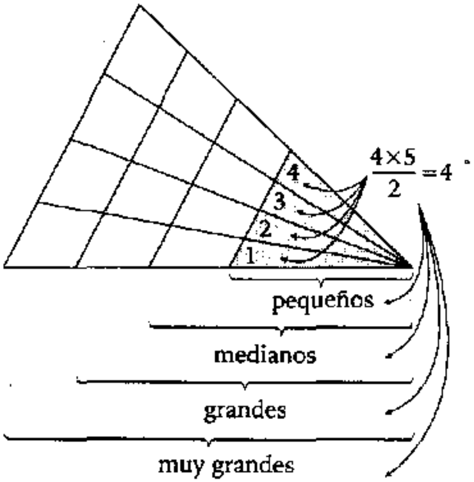


A) 16
B) 26
C) 32
D) 8
E) 40

Resolución

Se pide el número total de triángulos.

Se aplica directamente la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ (para $n=4$ en este caso) en la parte sombreada y encontramos 4 tamaños distintos (pequeños, medianos, grandes y muy grandes).



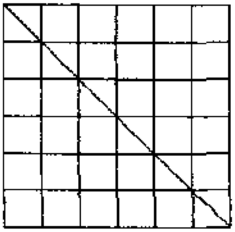
Por lo tanto, el total de triángulos:

$$\frac{4\times5}{2}\times4=40$$

Clave B

PROBLEMA N.° 13

Halle el número total de triángulos.



A) 44

B) 36

C) 38

D) 40

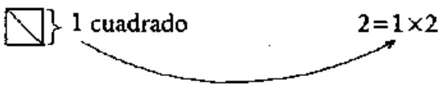
E) 42

Resolución

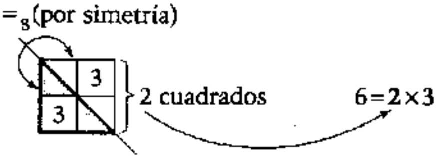
Se pide el número total de triángulos.

En este caso, vamos a realizar el conteo de triángulos por inducción.

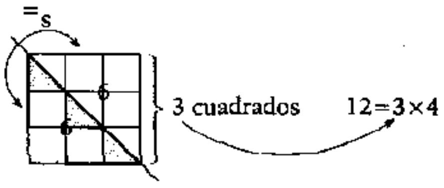
Caso 1: Total de triángulos



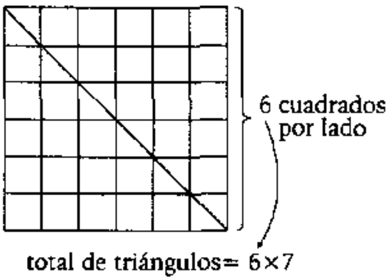
Caso 2:



Caso 3:



En el gráfico original

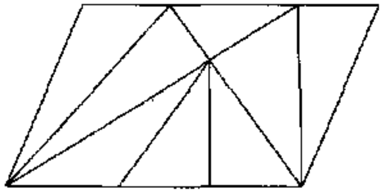


Por lo tanto, el total de triángulos es 42.

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 14

Halle el número total de triángulos.

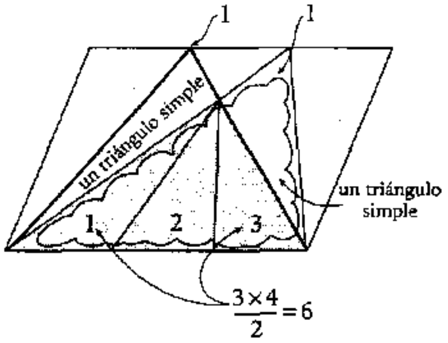


A) 17
B) 20
C) 22
D) 16
E) 14

Resolución

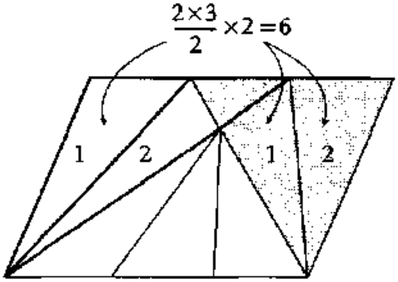
Se pide el número total de triángulos.
Realizamos el conteo de triángulos de la siguiente manera:

- En el gráfico resaltado y en el sombreado se tiene:

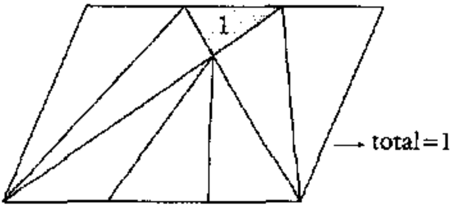


→ total: $\underbrace{6+1+1+2}_{\text{los indicados en letras}}=10$

- Aplicamos la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ en la parte resaltada y en la sombreada.



- Solo falta contar el triángulo sombreado.



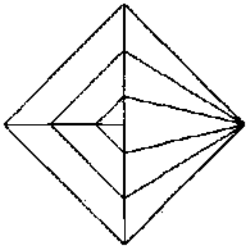
Por lo tanto, el total de triángulos:
$10+6+1=17$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

Calcule el número total de cuadriláteros en la figura.

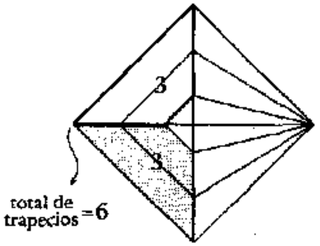
A) 9
B) 12
C) 8
D) 6
E) 15



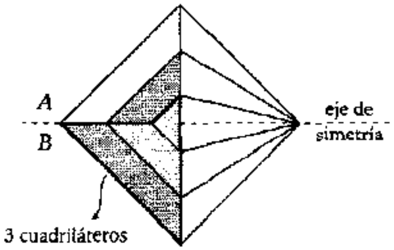
Resolución

Se pide el número total de cuadriláteros.
Realizamos el conteo por partes, de la siguiente forma:

- Por simple observación, contaremos trapecios.

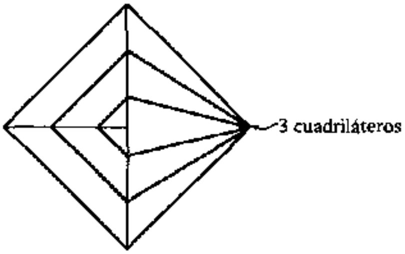


- En el gráfico, consideramos un eje de simetría para indicar que en la parte *A* se cuenta la misma cantidad de cuadriláteros que en *B*.



Total de cuadriláteros cóncavos: 3(2)=6.

- Solo falta contar los cuadriláteros convexos resaltados.

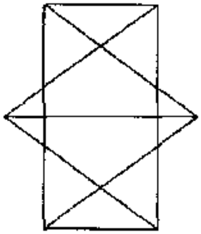


Por lo tanto, el número total de cuadriláteros:
6+6+3=15

Clave E

PROBLEMA N.° 16

Calcule el número total de cuadriláteros en la figura.

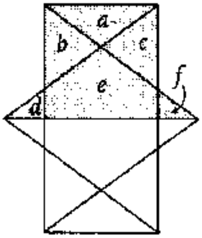


A) 28
B) 23
C) 30
D) 25
E) 20

Resolución

Se pide el número total de cuadriláteros.
Realizamos el conteo de total de cuadriláteros de la siguiente manera:

- Vamos a contar primero en la parte sombreada; por ser simétrica, con la parte no sombreada, se contará la misma cantidad.

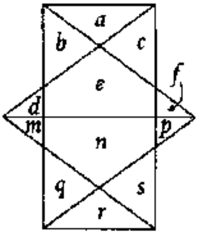


El conteo lo realizamos por combinación de regiones simples, es decir:

- Con 2 letras (2 regiones simples)
  be, ce, de, ef → 4
- Con 4 letras (4 regiones simples)
  abce, bdef, cdef → 3

  Entonces, total: $(4+3)\times2=14$

- Ahora, los cuadriláteros faltantes son:
  - Con 4 letras (4 regiones simples)
    bens, cenq, benq, cens → 4
  - Con 5 letras (5 regiones simples)
    befnp, cedmn, efnpq, demns → 4
  - Con 6 letras (6 regiones simples)
    defmnp, benqrs, cenqrs, abcenq, abcens → 5
  - Con 8 letras (8 regiones simples)
    abcenqsr → 1



→ total: $2(4)+5+1=14$

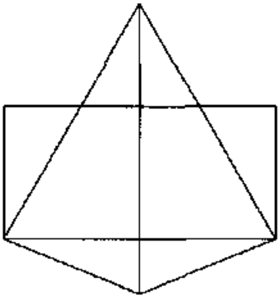
Por lo tanto, el número de cuadriláteros:

$14+14=28$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 17

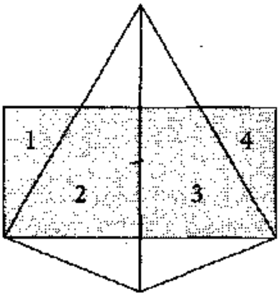
Calcule el número total de cuadriláteros en la figura.



A) 10 B) 12 C) 11
D) 13 E) 14

Resolución

Se pide el número total de cuadriláteros.
El conteo lo realizamos de la siguiente manera:



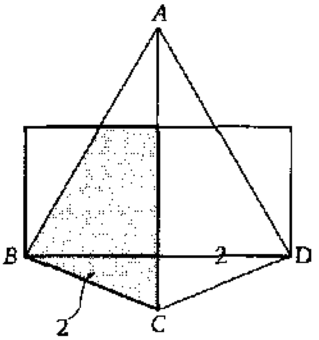
- En la parte sombreada, contaremos cuadriláteros aplicando el $\frac{n(n+1)}{2}$. Para ello, supondremos que todas las regiones simples son cuadriláteros, quitando al final aquellas que no lo son realmente. Es decir,

$$\text{total cuadriláteros}: \frac{4\times5}{2}-2=8$$

- Además, reconocemos dos cuadriláteros más, el sombreado y el resaltado. Por simetría, considerando como el eje de simetría al segmento $\overline{AC}$, tenemos otros 2 cuadriláteros más.

  Entonces

  total: $2\times2+\underset{\llcorner\text{⏢ ABCD}}{1}=5$



Por lo tanto, número total de los cuadriláteros:

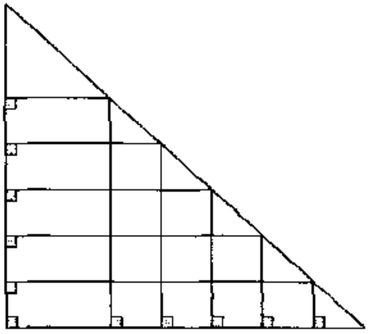
$8+5=13$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

¿Cuántos segmentos hay en la siguiente figura?

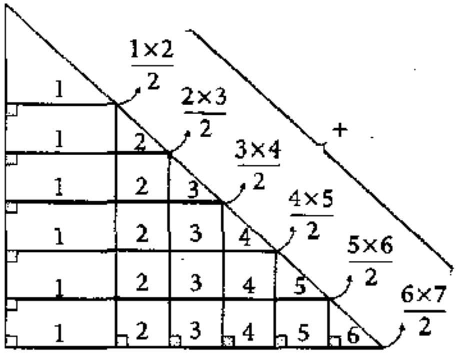
A) 168
B) 153
C) 133
D) 127
E) 116



Resolución

Se pide la cantidad total de segmentos.

En el gráfico se puede diferenciar 3 tipos de segmentos: horizontales (–), verticales (|) y diagonales (\), por ello, contaremos por partes:

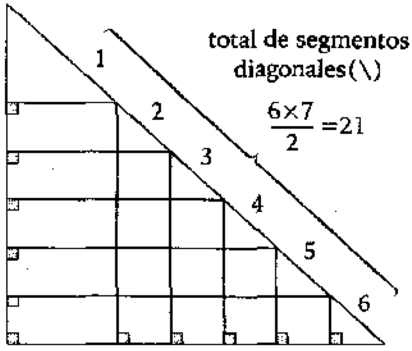


Entonces, el total de segmentos horizontales (__):

$$\frac{6\times7\times8}{6}=56$$

En forma análoga, contamos los segmentos verticales (|)

Entonces, el total de segmentos verticales (|)=56, luego



Por lo tanto, total de segmentos:

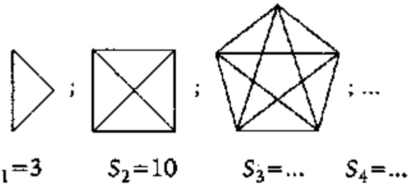
$56+56+21=133$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

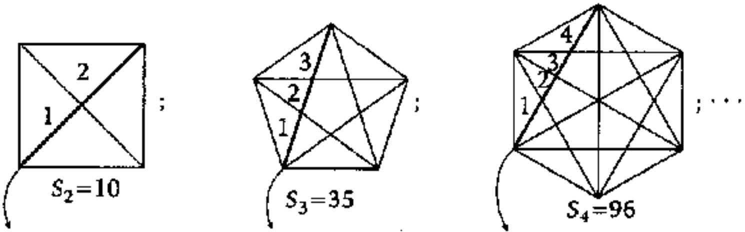
Calcule hasta S_{20} sabiendo que S_n es igual al número máximo de segmentos en figuras geométricas regulares.

A) 42 810
B) 43 672
C) 44 732
D) 43 912
E) 43 812



Resolución

Se pide S_{20}
Dato: S_n es el número total de segmentos en el polígono de $(n+2)$ lados al trazar todas sus diagonales.
De los casos mostrados se deduce que, para calcular el total de segmentos, se necesita saber la cantidad de diagonales del polígono, además, de aplicar la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ para la cantidad de segmentos en ellas. Veamos:



$\left(\frac{2\times3}{2}\right)\times2+4=10$ $\left(\frac{3\times4}{2}\right)\times5+5=35$ $\left(\frac{4\times5}{2}\right)\times9+6=96$

N.º de lados
N.º de diagonales
N.º de segmentos/diagonal (N.º triangular)

En general $\boxed{S_n=\left(\begin{matrix}\text{enésimo N.º}\\ \text{triangular}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{N.º de diagonales del}\\ \text{polígono de } (n+2) \text{ lados}\end{matrix}\right)+(n+2)}$ para $n\geq 2$

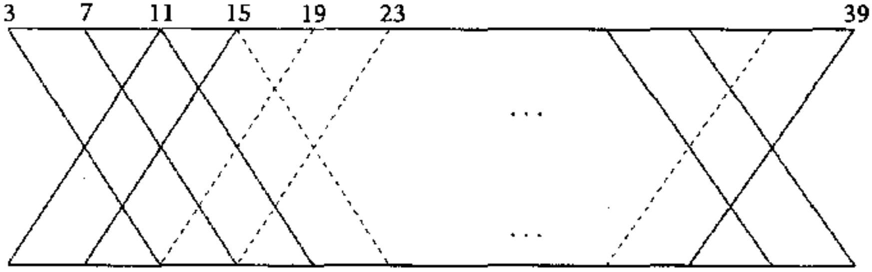
Para $n=20$

$$S_{20}=\left(\frac{20\times21}{2}\right)\left(\frac{22(19)}{2}\right)+22=43\,912$$

Clave D

PROBLEMA N.° 20

¿Cuántos segmentos en total hay en la figura?



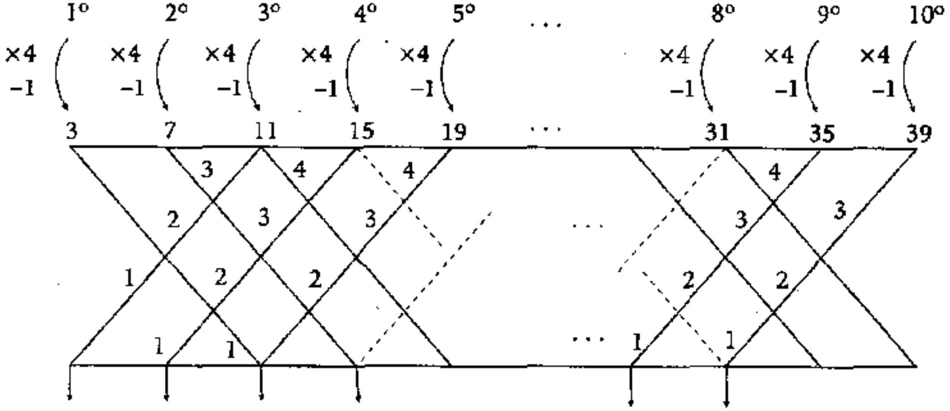
A) 96 B) 234 C) 141 D) 128 E) 106

Resolución

Se pide la cantidad total de segmentos.

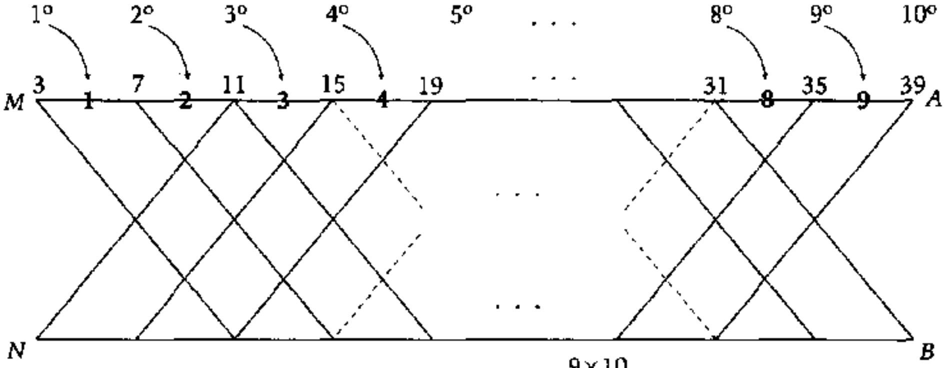
En el gráfico realizamos el conteo de segmentos del siguiente modo:

- Contemos el total de segmentos en diagonal (\) o (/) con la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, para $n=4$ (en su mayoría) y $n=3$ para los extremos:



$$2\times\left(\frac{3\times4}{2}+\underbrace{\frac{4\times5}{2}+\frac{4\times5}{2}+\frac{4\times5}{2}+\ \ldots\ +\frac{4\times5}{2}}_{\text{6 veces}}+\frac{3\times4}{2}\right)=72\times\underset{\substack{\text{conteo en las dos}\\ \text{diagonales, (\textbackslash) y (/)}}}{2}=144$$

- Faltan contar aquellos segmentos horizontales (–), en la parte superior e inferior.



total segmentos horizontales: $\frac{9\times 10}{2}\times 2=90$

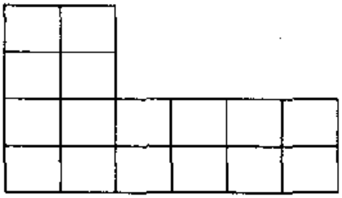
en $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$

Por lo tanto, cantidad total de segmentos: 144+90=234

Clave **B**

PROBLEMA N.° 21

¿Cuántas diagonales se puede trazar en los cuadriláteros existentes de la siguiente figura?

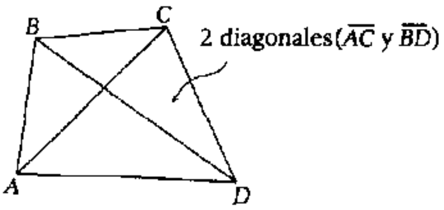


A) 32
B) 64
C) 128
D) 180
E) 168

Resolución

Se pide la cantidad de diagonales.

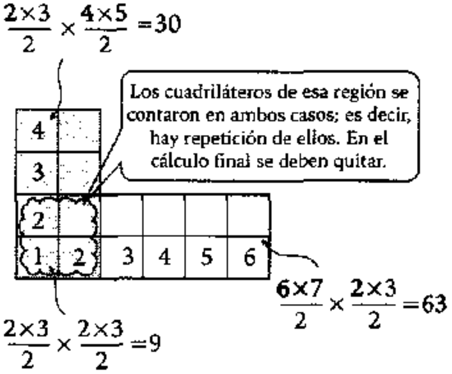
Sabemos que en todo cuadrilátero se pueden trazar solo dos diagonales, es decir,



2 diagonales($\overline{AC}$ y $\overline{BD}$)

Entonces, en el gráfico, calcularemos el total de cuadriláteros que presenta y a este resultado lo duplicamos; con ello se obtendría lo pedido.

Este conteo de cuadriláteros lo realizamos de la siguiente manera:



$$\frac{2\times3}{2}\times\frac{4\times5}{2}=30$$

Los cuadriláteros de esa región se contaron en ambos casos; es decir, hay repetición de ellos. En el cálculo final se deben quitar.

$$\frac{6\times7}{2}\times\frac{2\times3}{2}=63$$

$$\frac{2\times3}{2}\times\frac{2\times3}{2}=9$$

Del gráfico

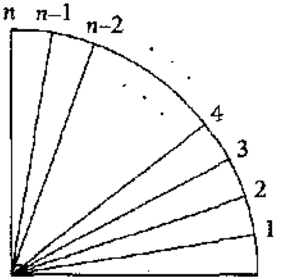
$$\text{Total de cuadriláteros: } 63+30-\overset{\text{repetidos}}{9}=84$$

Por lo tanto, el total de digonales es $2(84)=168$.

Clave E

PROBLEMA N.° 22

¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?

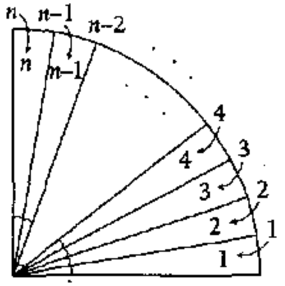


A) $\frac{n^2+n}{2}$ B) $\frac{n^2+n-2}{2}$ C) $\frac{n^2-n-2}{2}$

D) n E) $n+n^2$

Resolución

Se pide el total de ángulos agudos del gráfico.



Se oberva en el gráfico que cada sector circular simple contiene ángulos agudos así como los sectores circulares compuestos. Entonces

$$\begin{matrix}\text{Total de ángulos}\\ \text{agudos}\end{matrix}=\frac{n(n+1)}{2}-\overset{\text{ángulo recto}}{1}$$

Por lo tanto, el total de ángulos agudos es:

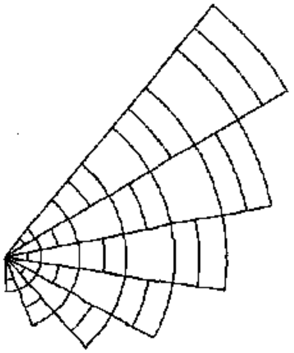
$$\frac{n^2+n-2}{2}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 23

En la figura, halle el número de sectores circulares.

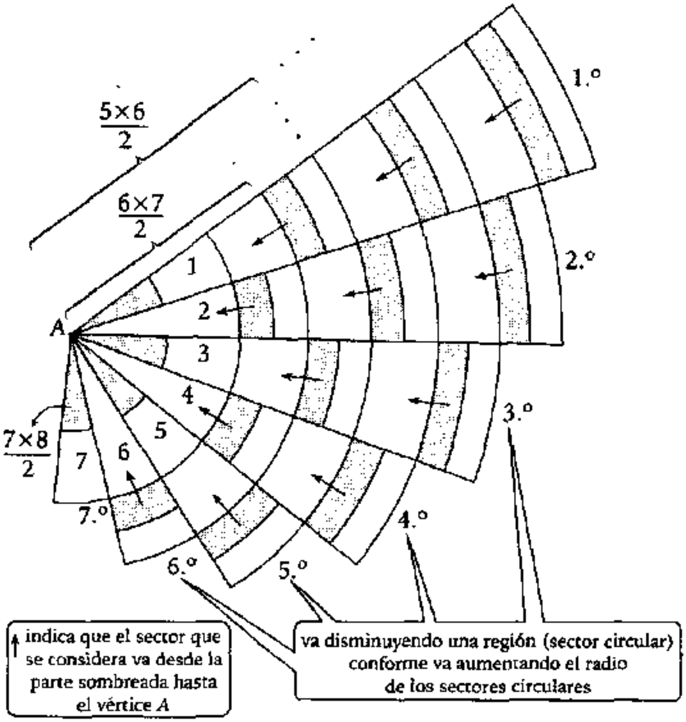
A) 258
B) 364
C) 216
D) 72
E) 100



Resolución

Se pide el número total de sectores circulares.

- Primero contamos los sectores circulares utilizando la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, es decir:



↑ indica que el sector que se considera va desde la parte sombreada hasta el vértice *A*

va disminuyendo una región (sector circular) conforme va aumentando el radio de los sectores circulares

Entonces, total de sectores circulares

$$\overset{1.^{\circ}}{\frac{1\times2}{2}}+\overset{2.^{\circ}}{\frac{2\times3}{2}}+\overset{3.^{\circ}}{\frac{3\times4}{2}}+\dots+\overset{6.^{\circ}}{\frac{6\times7}{2}}+\overset{7.^{\circ}}{\frac{7\times8}{2}}=\frac{7\times8\times9}{6}=84$$

- Faltan contar los sectores circulares que tienen una parte sombreada, los cuales hacen un total de 16 sectores.

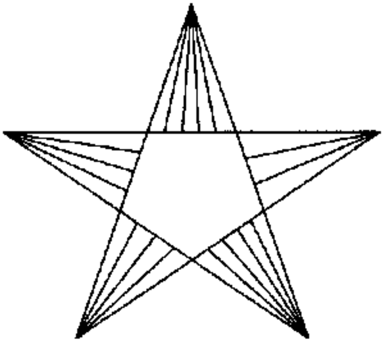
Por lo tanto, número total de sectores circulares: 84+16=100.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 24

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

A) 56
B) 26
C) 61
D) 52
E) 36

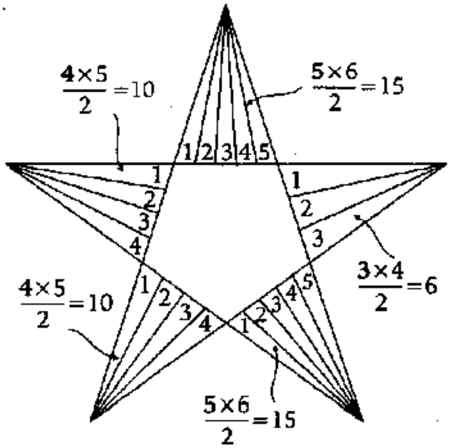


Resolución

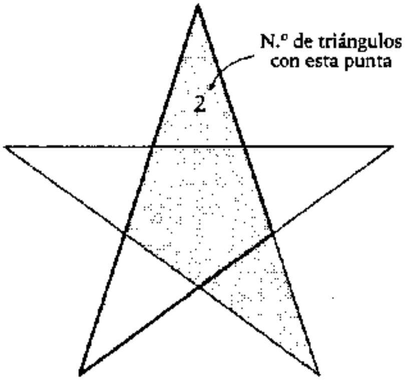
Se pide el total de triángulos en el gráfico.

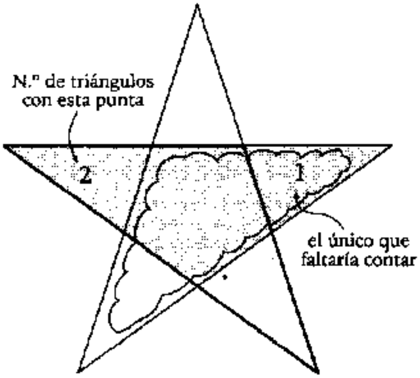
- Comenzamos contando los triángulos que se encuentran en las puntas de la estrella. Entonces el total:

  $$2(10)+2(15)+6=56$$



- Ahora, contemos los triángulos que se forman combinando las puntas de la estrella:





→ total: $2+2+1=5$

Por lo tanto, el total de triángulos es

$$56+5=61$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

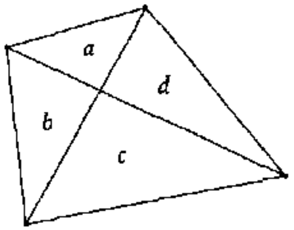
Se ubica sobre un plano 4 puntos no colineales de tal modo que, al unirlos 2 a 2 mediante líneas rectas, se forman la mayor cantidad posible de triángulos. Indique dicha cantidad.

A) 4
B) 6
C) 8
D) 7
E) 5

Resolución

Se pide la cantidad de triángulos.

Del enunciado graficaremos de la siguiente manera:



Al formar el gráfico asignamos una letra a cada región simple y contamos triángulos...

- con una letra: *a*, *b*, *c*, *d* → 4
- con dos letra: *ab*, *bc*, *cd*, *ad* → 4

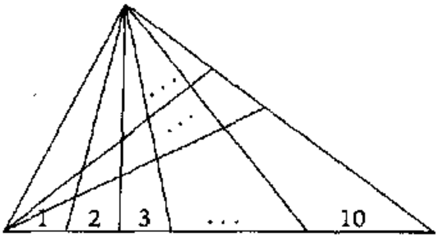
Por lo tanto, la cantidad total de triángulos:

$4+4=8$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 26

¿Cuántos triángulos se cuenta en la siguiente figura?



A) 110 B) 61 C) 55

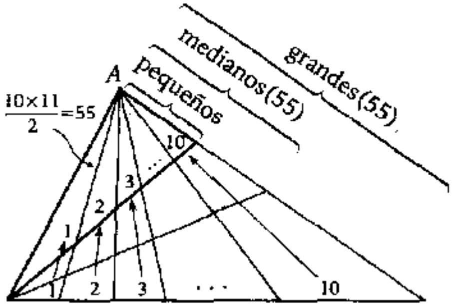
D) 195 E) 175

Resolución

Se pide la cantidad total de triángulos que hay en el gráfico.

- Comenzamos contando triángulos donde uno de sus vértices es *A*.

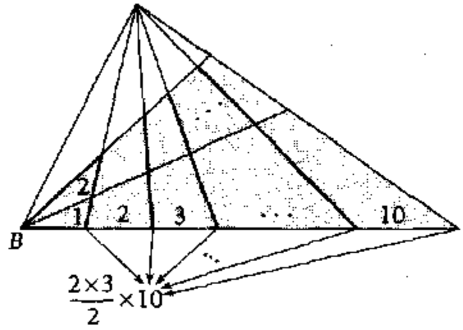
  Estos los encontraremos en 3 tamaños: pequeños, medianos y grandes. Entonces,



$$\text{total de triángulos con un vértice en } A = 3(55)=165$$

¡Pero no son todos!

- Ahora contamos los triángulos con uno de sus vértices en B, pero solo los que se encuentran en la parte sombreada del gráfico, porque los otros ya fueron contados en el paso anterior.



$$\rightarrow \text{ total: } \frac{2\times3}{2}\times10=30$$

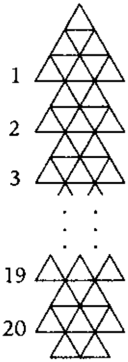
Por lo tanto, el total de triángulos:

$165+30=195$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 27

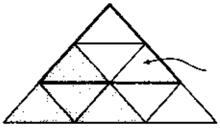
En la figura mostrada, ¿cuántos triángulos se puede contar en total?



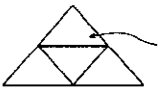
A) 260 B) 261 C) 270
D) 263 E) 265

Resolución

Se pide la cantidad total de triángulos.
En el gráfico, se observa un cierto patrón (o figura base) que genera, por su repetición, a ella (gráfico original). Esto nos permitirá realizar el conteo de triángulos por inducción, pero antes contemos triángulos en los siguientes gráficos.



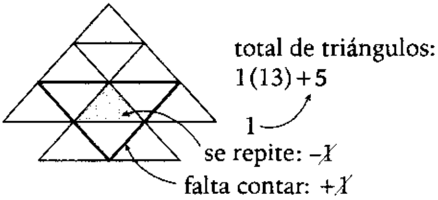
triángulos simples → 9 +
triángulos compuestos por dos filas → 3
triángulos formado por todos los triángulos simples → 1
Total → 13



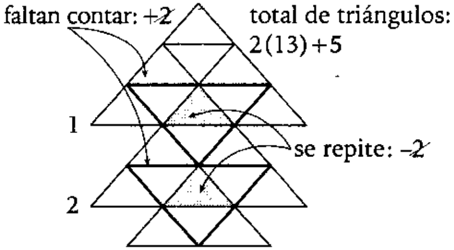
triángulos simples → 4 +
triángulos formados por todos los triángulos simples → 1
Total → 15

Ahora sí comenzamos a realizar el conteo por inducción:

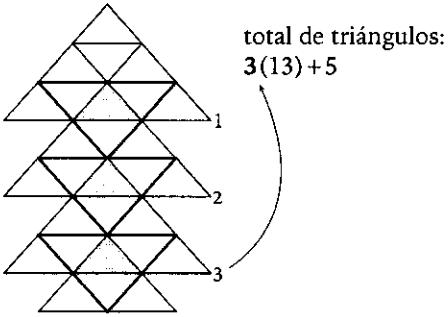
Caso 1:



Caso 2:



Caso 3:



En forma análoga a los dos casos anteriores,
se repiten faltan contar

$$\cancel{-3} \quad + \quad \cancel{+3} \quad =0$$

Luego, para el problema, la enumeración que sirve de referencia es hasta 20.

Por lo tanto, el total de triángulos:

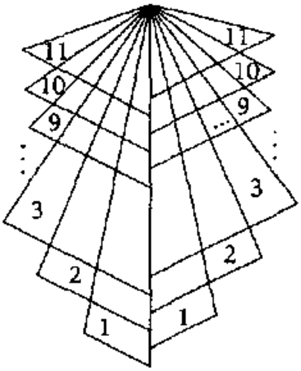
$$20(13)+5=265$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 28

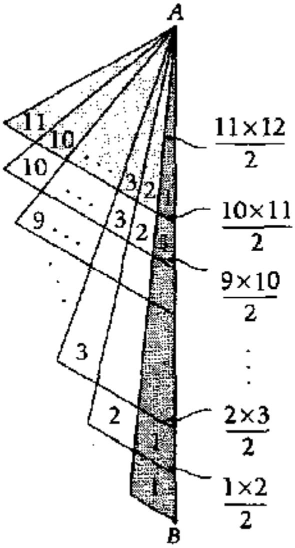
En la figura, halle el número total de triángulos.

A) 488
B) 476
C) 582
D) 572
E) 518



Resolución

Se pide el número total de triángulos.
Se observa en el gráfico, si lo dividimos en dos partes a partir del eje $\overline{AB}$, que bastará calcular el número de triángulos en una de las partes, ya que este resultado se repetirá en la otra por tener la misma estructura. Entonces,



Total de triángulos:

$$\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\ldots+\frac{11\times12}{2}=$$

$$=\frac{11\times12\times13}{6}=286$$

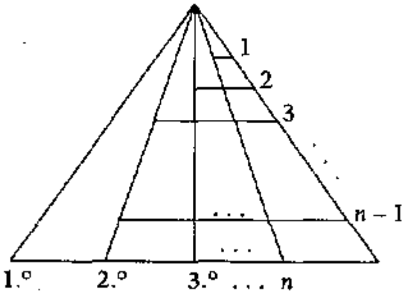
Por lo tanto, número total de triángulos:

$$\overset{\text{dos partes}}{2}(286)=572$$

Clave D

PROBLEMA N.° 29

Calcule el número total de triángulos.



A) n^2+n+1

B) $\frac{n(n+1)}{2}$

C) $n(n+1)$

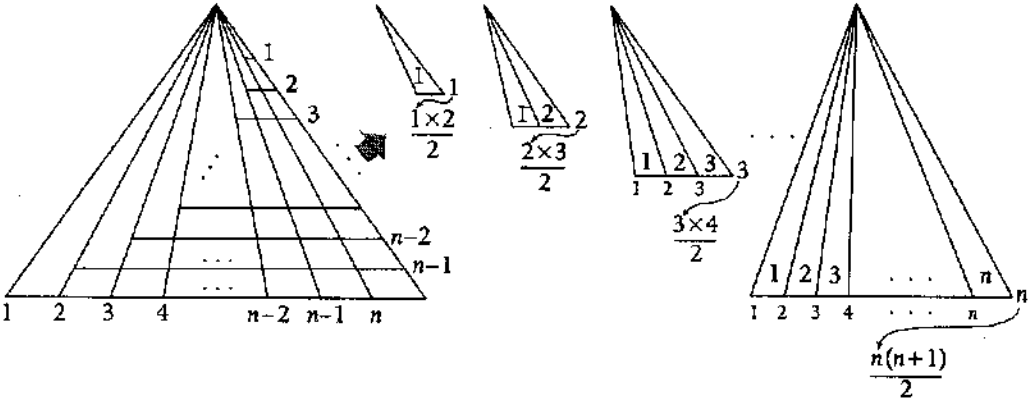
D) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

E) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Resolución

Se pide el número total de triángulos.

Contamos el total de triángulos, sacando de manera referencial, los diferentes tamaños de triángulos que se observan, es decir:



Del gráfico

número total de triángulos: $\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}$ (suma de triángulares)

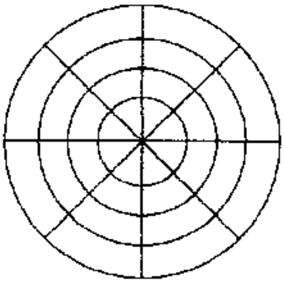
Por lo tanto, número total de triángulos: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 30

¿Cuántos semicírculos hay en total?

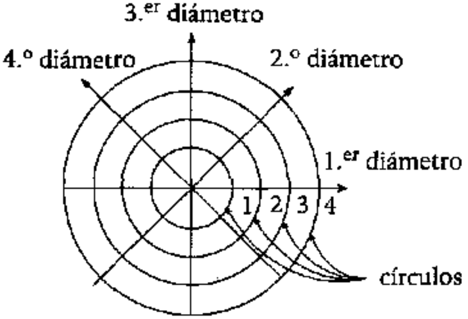
A) 16
B) 24
C) 32
D) 64
E) 48



Resolución

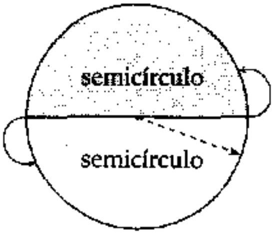
Se pide la cantidad total de semicírculos.

En el gráfico:



Consideremos lo siguiente:

- En un círculo trazamos su diámetro. Observamos que se generan dos semicírculos:



- Concluimos que cada diámetro divide al círculo en dos semicirculos.

Luego,
con un círculo y 4 diámetros se cuentan

8 semicírculos

$2(1 \times 4) = 8$

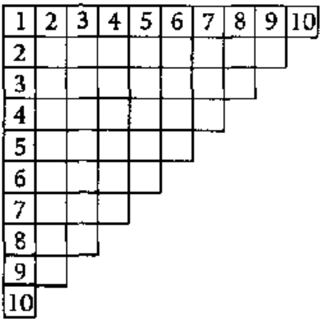
en cuatro círculos y cuatro diámetros

$2(4 \times 4) = 32$ semicírculos

Clave **C**

PROBLEMA N.° 31

A partir del gráfico:

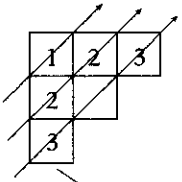


Calcule el número de cuadrados. Considere que los cuadriláteros simples son cuadrados.

A) 95 B) 125 C) 91 D) 110 E) 90

Resolución

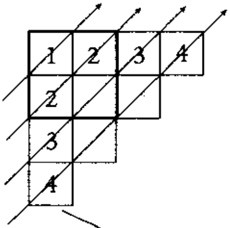
Se pide el número de cuadrados en el gráfico.
Calculamos lo pedido a partir de hacer un análisis por inducción, es decir:



cuadrados simples: $1+2+3=\dfrac{3(4)}{2}$

cuadrados compuestos: $1=\dfrac{1(2)}{2}$
(2 cuadrados por lado)

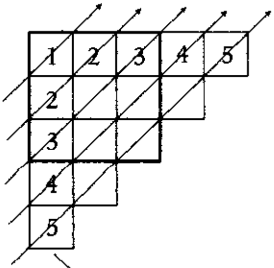
$\therefore$ total de cuadrados $=\dfrac{3(4)}{2}+\dfrac{1(2)}{2}$



cuadrados simples: $1+2+3+4=\dfrac{4(5)}{2}$

cuadrados compuestos: $1+2=\dfrac{2(3)}{2}$
(2 cuadrados por lado)

$\therefore$ total de cuadrados $=\dfrac{4(5)}{2}+\dfrac{2(3)}{2}$



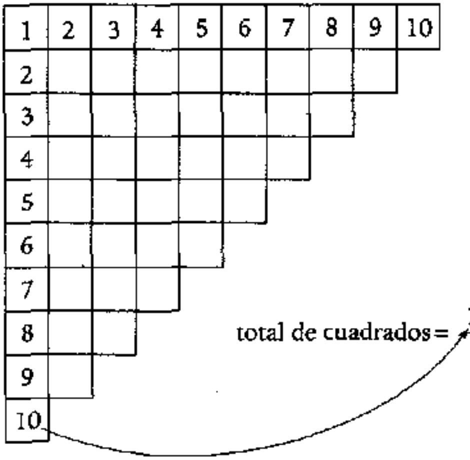
cuadrados simples: $1+2+3+4+5=\dfrac{5(6)}{2}$

cuadrados compuestos: $1+2+3=\dfrac{3(4)}{2}$
(2 cuadrados por lado)

cuadrados compuestos: $1=\dfrac{1(2)}{2}$
(3 cuadrados por lado)

$\therefore$ total de cuadrados $=\dfrac{5(6)}{2}+\dfrac{3(4)}{2}+\dfrac{1(2)}{2}$

Para el problema, el gráfico es:



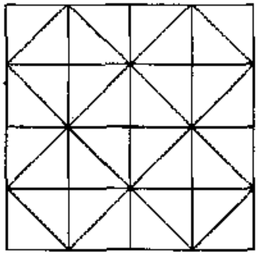
$$\text{total de cuadrados} = \frac{10(11)}{2} + \frac{8(9)}{2} + \frac{6(7)}{2} + \frac{4(5)}{2} + \frac{2(3)}{2} = 125$$

Por lo tanto, el total de cuadrados es 125.

Clave B

PROBLEMA N.° 32

Calcule el número total de cuadrados.



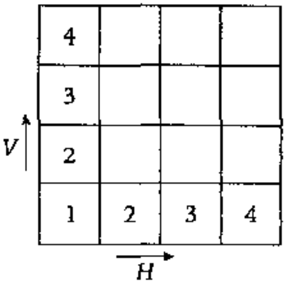
A) 25 B) 22 C) 30
D) 35 E) 36

Resolución

Se pide el número total de cuadrados.

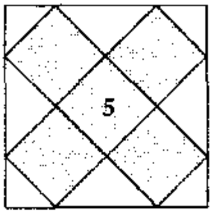
El gráfico original lo desdoblaremos en dos partes, en las cuales se podrá apreciar con claridad los cuadrados que presenta. Nótese que al juntar ambas partes no se genera algún cuadrado, por ello, bastará encontrar la cantidad de cuadrados en cada caso y sumar dichos resultados.

Entonces



Cuando la cantidad de regiones simples horizontales (*H*) y verticales (*V*) son iguales, se aplicará directamente la suma de cuadrados:

$$1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{4(5)(9)}{6}=30$$

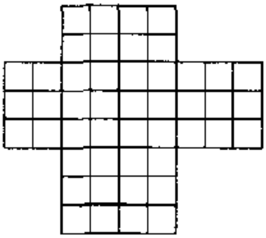


En la región sombreada, se cuenta por simple inspección 5 cuadrados.
Por lo tanto, el total de cuadrados: 30+5=35

Clave **D**

PROBLEMA N.° 33

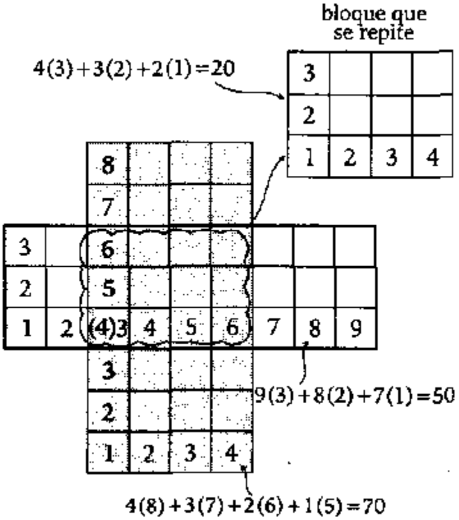
¿Cuántos cuadrados en total hay en la siguiente figura?
Obs: Los cuadriláteros simples son cuadrados.



A) 120 B) 100 C) 110
D) 90 E) 125

Resolución

Se pide el total de cuadrados.
El conteo lo realizamos por partes, en el gráfico resaltado y en la parte sombreada, restando lo que se repite.



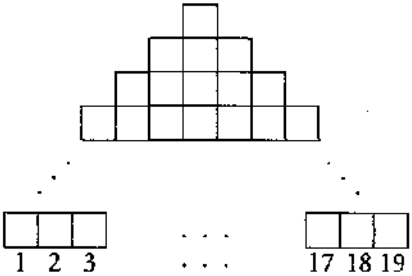
Por lo tanto, total de cuadrados:

$$50+70-\overset{\text{se repiten}}{20}=100$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 34

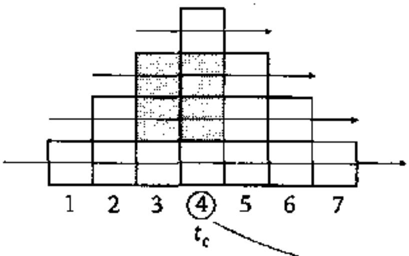
Si la figura está formada por cuadraditos iguales, ¿cuántos cuadrados se contarán en total?



A) 403 B) 274 C) 350
D) 324 E) 460

Resolución

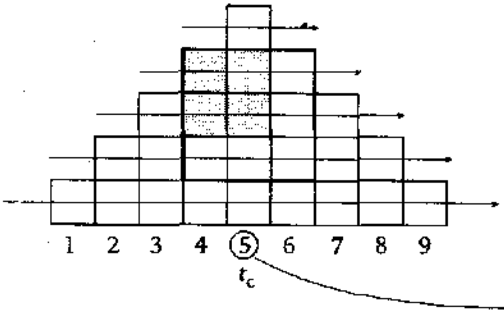
Se pide el número total de cuadrados.
Realizamos el conteo de cuadrados por inducción de la siguiente manera:



- cuadrados simples = $1+3+5+7=4^2$
- cuadrados compuestos: $2+4=6$
  2 cuadrados por lado

  cuadrados compuestos: 1^2
  3 cuadrados por lado

total : $\underbrace{4^2+2(3)+1^2}_{-3}$

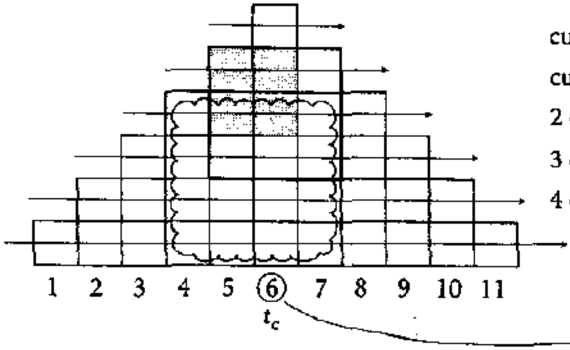


- cuadrados simples = $1+3+5+7+9=5^2$
- cuadrados compuestos:

  2 cuadrados por lado: $2+4+6=12$

  3 cuadrados por lado: $1+3=2^2$

total : $\underbrace{\overbrace{5^2+3}^{-2}(4)+2^2}_{-3}$



cuadrados simples = $1+3+5+7+9+11=6^2$

cuadrados compuestos:

2 cuadrados por lado: $2+4+6+8=20$

3 cuadrados por lado: $1+3+5=3^2$

4 cuadrados por lado: 2

total: $\underbrace{\overbrace{6^2+4}^{-2}(5)+3^2}_{-3}+1(2)$ $\quad \overbrace{4(5)+3^2+1}^{-3}$

En el problema, la numeración va hasta

$$1\ 2\ 3\ 4 \ldots \overset{t_c}{⑩} \ldots 15\ 16\ 17\ 18\ 19$$

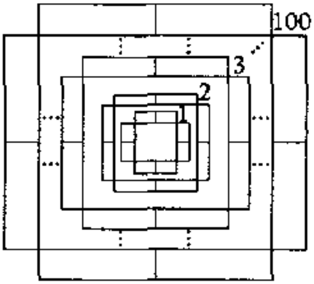
$$\text{Total de cuadrados}: \overset{-2\qquad\quad -3\qquad\qquad -3}{\underset{-3\qquad\qquad -3\qquad\qquad -3}{10^2+8(9)+7^2+5(6)+4^2+2(3)+1^2}}$$

Por lo tanto, el total de cuadrados: 274

Clave ■

PROBLEMA N.° 35

Halle el número total de cuadriláteros en



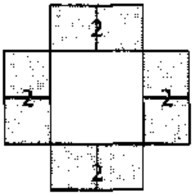
A) 1100
B) 1900
C) 1500
D) 1700
E) 2100

Resolución

Se pide el número total de cuadriláteros.

En el gráfico, se observa un mismo patrón o figura base la cual solo aumenta de tamaño de tal forma que al juntar 100 de ellas se obtiene el gráfico original.

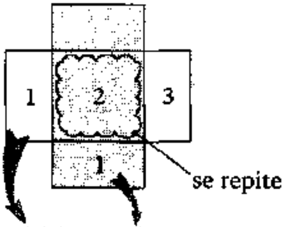
Entonces, lo que haremos es encontrar el total de cuadriláteros de la figura base, para lo cual, realizamos el cálculo por partes del siguiente modo:



En cada parte sombreada contamos 2 cuadriláteros simples, el cuadrilátero compuesto que se forma en cada parte lo contaremos en el otro gráfico. Entonces,

n.° de cuadriláteros simples: $4(2)=8$

El total de cuadriláteros se puede contar aplicando el $\frac{n(n+1)}{2}$, es decir



$$\frac{3(4)}{2}+\frac{3(4)}{2}-1=11$$

De donde, el total de cuadriláteros en la figura base: $8+11=19$

Finalmente, en el gráfico original hay 100 de estas figuras bases.

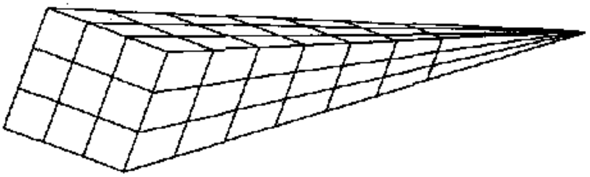
Por lo tanto, el número total de cuadriláteros:

$100(19)=1900$

Clave ■

PROBLEMA N.° 36

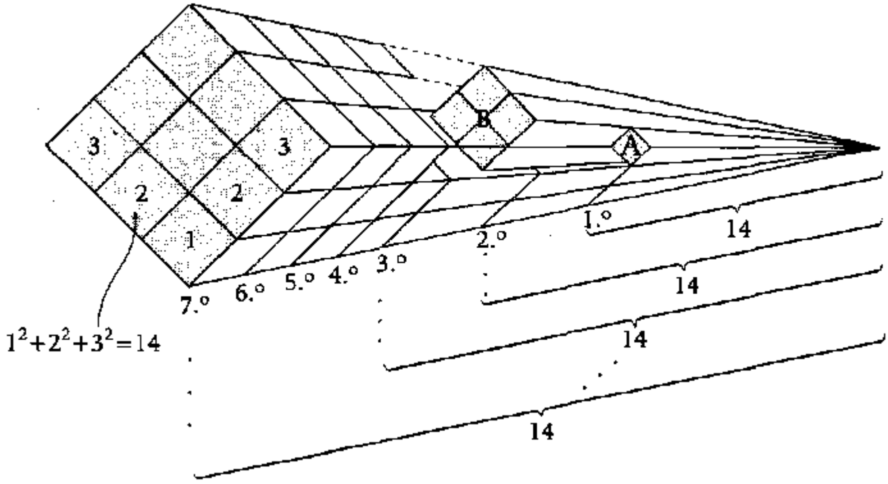
¿Cuántas pirámides de base cuadrada hay en el sólido mostrado?



A) 63 B) 70 C) 77 C) 98 E) 105

Resolución

Se pide la cantidad de pirámides de base cuadrada.
En el gráfico, encontramos pirámides de varios tamaños y cuyas bases son cuadradas. Por ejemplo, las bases cuadradas pueden ser originadas sola por cuadrados simples (*A*), también por cuadrados compuestos (*B*).
De lo anterior, el total de pirámides con base cuadrada lo calcularemos hallando el total de cuadrados en la base sombreada, teniendo en cuenta que a dicha cantidad resultante le corresponde un tamaño distinto (7 en total). Veamos:

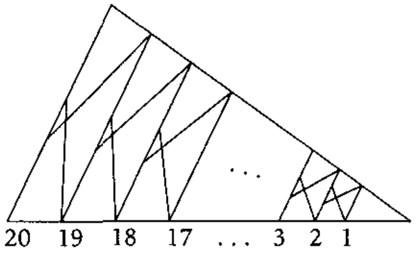


Por lo tanto, total de pirámides de base cuadrada: $14(7)=98$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 37

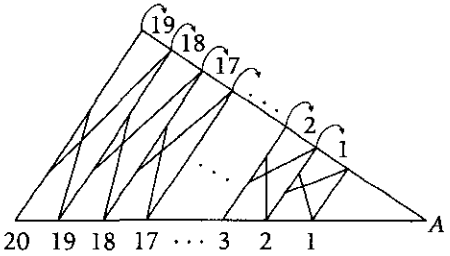
Halle el número total de cuadriláteros en:



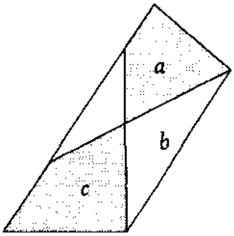
A) 268 B) 323 C) 230
D) 266 E) 226

Resolución

Se pide el número total de cuadriláteros.
En el gráfico, reconocemos tres tipos de cuadriláteros que son:



- Tipo 1

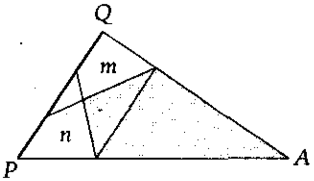


Cada una de estas figuras presenta 4 cuadriláteros en su interior, sin considerar el cuadrilátero mayor (el que las contiene).

Entonces

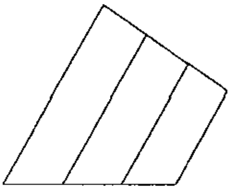
ab; *bc* y los 2 sombreados son 4 cuadriláteros.

- Tipo 2



Esta figura formada a partir del vértice *A* junto con cada segmento como *PQ* contiene 3 cuadriláteros. El sombreado solo y este combinado con *m* y *n* por separado.

- Tipo 3



Finalmente, los cuadriláteros que se observan son los que aparecen adyacentes dos a dos y donde se puede aplicar la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ para hallar el total.

En la figura, número total de cuadriláteros

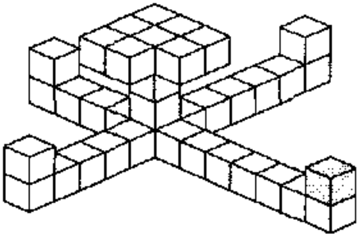
$$\overset{\text{Tipo 1}}{4\times19} + \overset{\text{Tipo 2}}{3\times19} + \overset{\text{Tipo 3}}{\frac{19\times20}{2}} = 323$$

Por lo tanto, el número total de cuadriláteros es 323.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 38

La estructura mostrada ha sido construida con bloques cúbicos de yeso como el sombreado.



I. ¿Cuántos bloques cúbicos están en contacto directo con el piso?

II. ¿Cuántos bloques cúbicos se han utilizado en la construcción de la escultura?

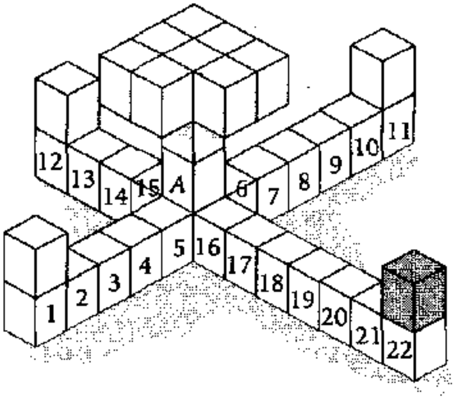
A) 23 - 37 B) 25 - 37 C) 25 - 36
D) 24 - 37 E) 23 - 36

Resolución

Se pide:

I. Número total de bloques cúbicos en contacto con el piso.

II. Número total de bloques cúbicos utilizados.



I. Enumeramos los bloques cúbicos en contacto con el piso y se cuentan en total: 22+el que se encuentra debajo del bloque *A*.
→ total=23

II. El total de cubitos se calculará sumándole a la cantidad anterior los que se encuentran sobre el bloque *A* (que son 9), además del bloque *A*, y los 4 en los extremos de sus prolongaciones.

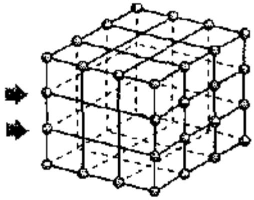
$$\rightarrow \text{Total utilizados: } 23 + \overset{\text{sobre } A}{9} + \overset{A}{1} + \overset{\text{extremos}}{4} = 37$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

La figura mostrada es una estructura metálica en forma de cubo, construida con varillas de acero de igual longitud, y los puntos señalados indican los puntos de soldadura de la varilla que la une con otras varillas. Considerando las caras y las aristas de este cubo, ¿cuántos segmentos en total pueden contarse?

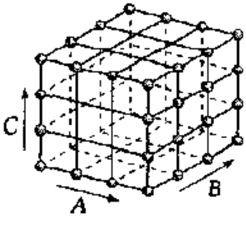
A) 288
B) 256
C) 236
D) 206
E) 216

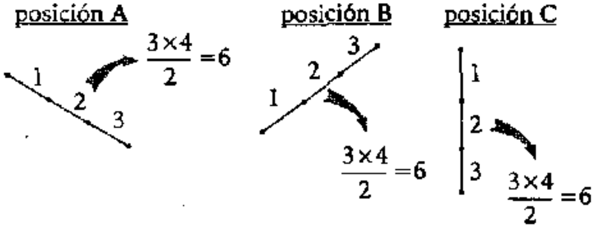


Resolución

Se pide el número total de segmentos.

En el gráfico, observamos 3 posiciones distintas de las varillas donde aplicaremos el $\frac{n(n+1)}{2}$ para calcular el total de segmentos.





Cada una de las posiciones indicadas, aparece 12 veces, entonces:

Número total de segmentos: $\overset{A}{}\ \overset{B}{}\ \overset{C}{}$ $12(6+6+6)=216$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 40

Considerando los datos del problema 19, calcule la suma de todos los segmentos hasta S_{20} (sugerencia: aplique series).

A) 201 144 B) 202 144 C) 201 036 D) 212 441 E) 202 336

Resolución

Se pide $M=S_1+S_2+S_3+...+S_{20}$ (referencia problema 19)
De la fórmula deducida en el problema 19

$$\boxed{S_n=\left(\begin{matrix}\text{enésimo N.°}\\ \text{triangular}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{N.° de diagonales del}\\ \text{polígono de }(n+2)\text{ lados}\end{matrix}\right)+(n+2)}\ \forall\, n\geq 2$$

$$S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)+(n+2)\ \ \rightarrow\ \ S_n=\frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{4}+(n+2)$$

Aplicamos sumatorias para hallar lo pedido, obteniendo

$$M=S_1+\sum_{n=2}^{20}S_n\ \ \rightarrow\ \ M=S_1+\sum_{n=2}^{20}\left[\frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{4}+(n+2)\right]$$

$$M=S_1+\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{20}(n-1)(n)(n+1)(n+2)+\sum_{n=2}^{20}(n+2)$$

Resolvemos las sumatorias, y se obtiene

$$M=3+\frac{1}{4}\left(\frac{19\times20\times21\times22\times23}{5}\right)+\left(\frac{4+22}{2}\right)(20-2+1)$$

$\therefore$ $M=202\ 144$

Clave **B**

Capítulo

16

Introducción a la topología

En la vida diaria nosotros, nos encontramos frente a un itinerario de recorridos de un lugar a otro: a mi centro de estudios, a casa, a recrearme con mis amigos, a la biblioteca a estudiar, etc. El hombre siempre ha buscado minimizar los tiempos; por ello busca minimizar el desplazamiento para poder realizar todos los recorridos en el menor tiempo posible.

Con la misma disyuntiva se encontró Euler para poder resolver el famoso "problema de los siete puentes de Königsberg", demostrando teóricamente la imposibilidad de realizar el recorrido y dando bases para lo que nosotros hoy en día conocemos como "recorridos eulerianos".

En el presente capítulo se desarrollarán los postulados de Euler que permiten determinar a priori la posibilidad de la formación de grafos de un solo trazo.

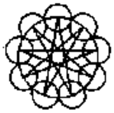
Capítulo **16**

Introducción a la topología

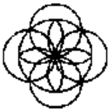
PROBLEMA N.° 1

Indique cuál de las siguientes figuras no puede realizarse de un solo trazo:

I.

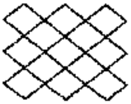


II.

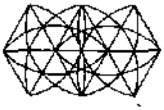


III.

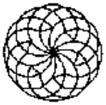
IV.



V.



VI.



A) solo I
B) solo II
C) II y III
D) I y III
E) solo III

Resolución

Piden: ¿cuál de las siguientes figuras no puede realizarse de un solo trazo?

Analizamos los gráficos, teniendo:

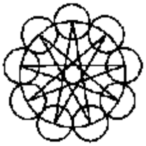


fig. I

- Todos sus puntos son pares.
  Entonces, sí se puede realizar de un solo trazo.

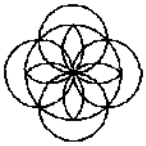


fig. II

- Todos sus puntos son pares.
  Entonces, sí se puede realizar de un solo trazo.

fig. III

- Presenta 8 puntos impares.
  Entonces, no se puede realizar de un solo trazo.

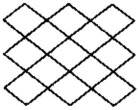


fig. IV

- Todos sus puntos son pares.
  Entonces, sí se puede realizar de un solo trazo.

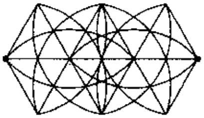


fig. V

- Presenta 2 puntos impares.
  Entonces, sí se puede realizar de un solo trazo.

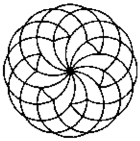


fig. VI

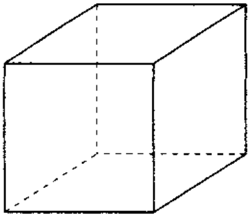
- Todos sus puntos son pares.
  Entonces, sí se puede realizar de un solo trazo.

Por lo tanto, solo la figura III no se puede realizar de un solo trazo.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 2

El cubo mostrado está hecho de alambre y su arista mide 10 cm. Una hormiga tarda 5 minutos en recorrer todas las aristas del cubo, caminando con rapidez constante.
Calcule la menor rapidez de la hormiga.



A) 30 cm/min
B) 20 cm/min
C) 10 cm/min
D) 5 cm/min
E) 40 cm/min

Resolución

Piden la menor rapidez de la hormiga.

Datos:

- La arista del cubo mide 10 cm.
- Tiempo empleado por la hormiga = 5 min.

Se observa que la figura presenta 8 puntos impares, por lo tanto, no se podrá recorrer de un solo trazo, se tendrá que repetir una cierta cantidad de líneas.

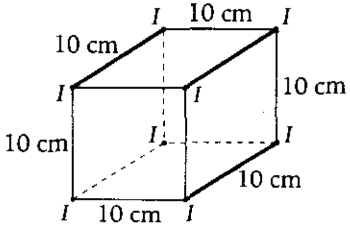
Para que la rapidez empleada sea la mínima en un tiempo constante, es necesario que la distancia a recorrer sea mínima, es decir, que se repitan la menor cantidad de líneas.

Entonces

$$\begin{array}{c}\text{N.°}\\ \text{mínimo}\\ \text{de líneas}\\ \text{a repetir}\end{array} = \frac{I}{2} - 1 = \frac{8}{2} - 1 = 3 \text{ líneas}$$

I: Número de puntos impares.

Así



$$\begin{matrix}\text{Recorrido}\\\text{mínimo}\end{matrix}=\underbrace{12\times(10\text{ cm})}_{\text{longitud total}}+\underbrace{3\times(10\text{ cm})}_{\text{líneas repetidas}}$$

$$\rightarrow \begin{matrix}\text{Recorrido}\\\text{Mínimo}\end{matrix}=150\text{ cm}$$

$$\begin{matrix}\text{Rapidez mínima}\\\text{de la hormiga}\end{matrix}=\frac{\begin{matrix}\text{recorrido}\\\text{mínimo}\end{matrix}}{\text{tiempo}}=\frac{150\text{ cm}}{5\text{ min}}$$

$$\rightarrow \begin{matrix}\text{Rapidez mínima}\\\text{de la hormiga}\end{matrix}=30\text{ cm/mín}$$

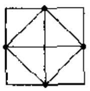
Por lo tanto, la menor rapidez de la hormiga es 30 cm/min.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras pueden realizarse de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel ni pasar 2 veces por una misma línea.

I



II

III

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) II y III

Resolución

Piden: ¿cuál o cuáles de las siguientes figuras pueden realizarse de un solo trazo?

Analizamos las figuras

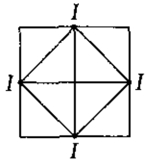


fig. 1

- Presenta 4 puntos impares.
  Entonces no se puede realizar de un solo trazo.

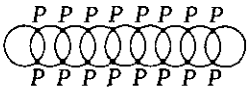


fig. II

- Presenta todos sus puntos pares.
  Entonces, sí se puede realizar de un solo trazo.

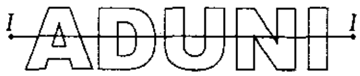


fig. III

- Presenta solo 2 puntos impares.
  Entonces, sí se puede realizar de un solo trazo.

Por lo tanto, las figuras II y III sí se pueden realizar de un solo trazo.

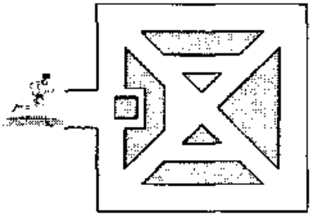
Clave **E**

PROBLEMA N.° 4

Un maratonista desea recorrer una ciudad con la condición de pasar tan solo una vez por cada calle o avenida, ¿podrá lograrlo?

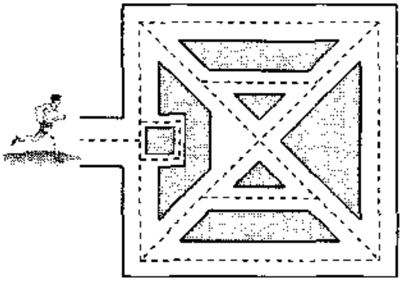
A) sí

B) no

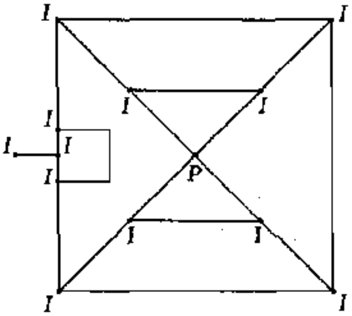


Resolución

Piden: ¿podrá el maratonista recorrer cada calle o avenida una sola vez?



Diseñamos el grafo que representa el recorrido a realizar.

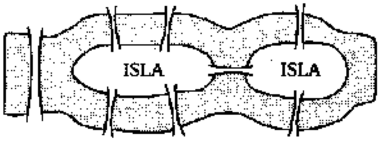


Presenta 12 puntos impares, entonces no se puede realizar de un solo trazo.
Por lo tanto, no podrá recorrer la ciudad pasando una sola vez por cada calle.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

La figura muestra un río y 8 puentes.



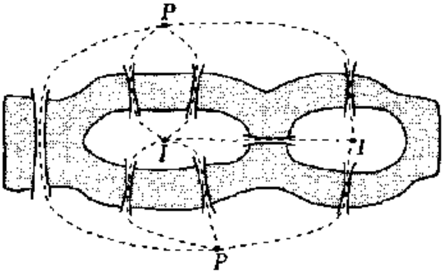
¿Se podrá hacer un paseo pasando por todos los puentes tan solo una vez, teniendo en cuenta que se comienza el paseo por una de las islas mostradas?

A) sí
B) no

Resolución

Piden: ¿se podrá hacer un paseo por todos los puentes (una sola vez), comenzando por una de las islas mostradas?

Diseñamos el grafo que representa al recorrido a realizar.

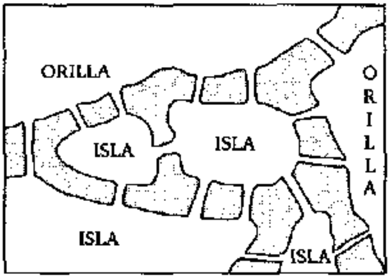


Se observa que el grafo presenta 2 puntos impares; por el segundo postulado de Euler, sí se puede realizar el grafo de un solo trazo iniciando en uno de los puntos impares (isla).
Por lo tanto, sí se puede recorrer todos los puentes (una sola vez) iniciando en una de las islas.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Cuatro islas están unidas entre sí y con las orillas del río mediante 15 puentes, conforme se muestra:



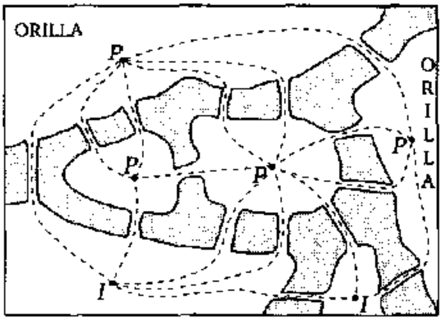
¿Será posible en un solo recorrido pasar por todos los puentes, sin hacerlo por ninguno de ellos más de una vez? Se debe partir de la orilla.

A) sí

Resolución

Piden:
¿Será posible en un solo recorrido pasar por todos los puentes (una sola vez) iniciando en una de las orillas?

Diseñamos el gráfico que representa el recorrido.



El grafo podría ser realizado de un solo trazo solo si iniciara en uno de los puntos impares (en el caso del problema, estos puntos impares le corresponden a islas).

Por lo tanto, no se podrá recorrer todos los puentes si iniciamos en alguna de las orillas.

Clave **B**

Capítulo

17

Razonamiento geométrico

La historia del origen de la Geometría es muy similar a la de la Aritmética, cuyos conceptos más antiguos son consecuencia del desarrollo de las actividades cotidianas. Así, los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza.

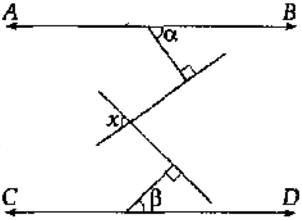
El sabio griego Eudemo de Rodas atribuyó a los egipcios el descubrimiento de la geometría, ya que, según él, necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del Nilo borraban continuamente sus fronteras. Recordemos que, precisamente, la palabra geometría significa `medida de tierras´. De aquello nosotros no somos ajenos en la actualidad, todo lo que observamos tiene forma geométrica: la ventana de nuestro dormitorio, los escalones del vehículo que empleamos, el tarifario del transporte, la puerta de nuestro centro de estudios, etc. A través de aplicaciones diversas asociaremos las figuras con las características particulares de su forma.

Capítulo **17**

Razonamiento geométrico

PROBLEMA N.° 1

Si $\overline{AB}//\overline{CD}$, además $\alpha+\beta=140°$.
Calcule x



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 30°

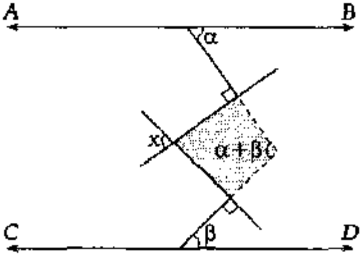
Resolución

Piden calcular x

Datos:

- $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$
- $\alpha+\beta=140°$

Prolongando los segmentos de recta, tenemos:



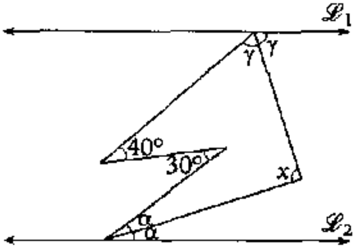
En el cuadrilátero sombreado, se cumple:

$$x+\underbrace{(\alpha+\beta)}_{140°}=180° \qquad \therefore \quad x=40°$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

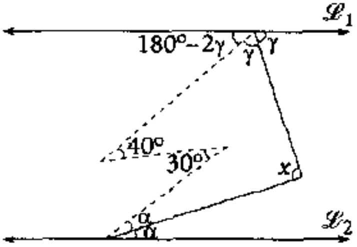
En el gráfico mostrado $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1//\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$
Calcule x



A) 85° B) 80° C) 75°
D) 60° E) 45°

Resolución

Piden calcular x.
Dato: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1//\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$



De la línea punteada:

$(180°-2\gamma)+30°=40°+2\alpha$

$170°=2\alpha+2\gamma$

$\rightarrow\ \alpha+\gamma=85°$

De la línea continua:

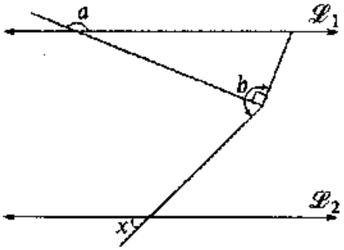
$x=\alpha+\gamma$

$\therefore\ x=85°$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

Calcule x, si se sabe que: $a+b=300°$
Además $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

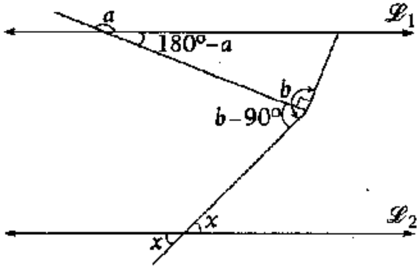
Resolución

Piden calcular x

Datos

- $a+b=300°$
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

Completamos las medidas angulares



Por propiedad:

$(180°-a)+x=b-90°$

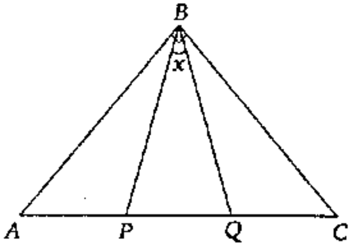
$x=\underbrace{a+b}_{300°}-270°$

$\therefore\ x=30°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 4

En el gráfico $AB=BC$ y $AP=PQ=QC$.
Calcule x



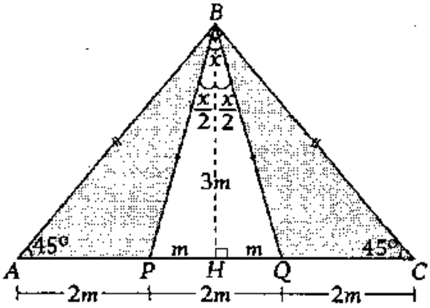
A) 53°/2 B) 37°/2 C) 37°
D) 53° E) 45°

Resolución

Piden calcular x

Datos:

- $AB=BC$
- $AP=PQ=QC$



⊿ABC: notable de 45°

$\rightarrow\ m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BCA = 45°$

$\triangle ABP \cong \triangle CBQ$ (L. A. L.)

$\rightarrow\ BP = BQ$

$\triangle PBQ$(isósceles): se traza $\overline{BH} \perp \overline{PQ}$

($\overleftrightarrow{BH}$: mediatriz)

⊿BHC: notable de 45°

$\rightarrow\ BH = HC = 3m$

⊿BHQ: notable de $\left(\frac{37°}{2}\right) \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{37°}{2}$

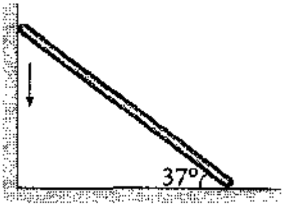
$\therefore\ x = 37°$

Clave C

PROBLEMA N.° 5

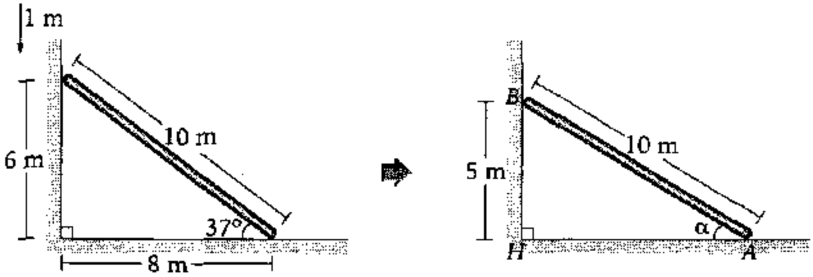
El gráfico muestra una barra de 10 m de longitud, que forma 37° con el piso. Si su extremo superior se desliza verticalmente 1 m hacia el piso, ¿qué ángulo formará ahora con el piso?

A) 15°
B) 30°
C) 45°
D) 33°
E) 53°



Resolución

Piden, el ángulo que forma (la barra) finalmente con el piso.



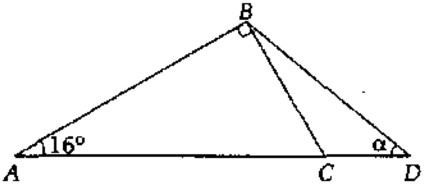
⊿AHB: notable de 30° y 60°

$\therefore\ \alpha = 30°$

Clave B

PROBLEMA N.° 6

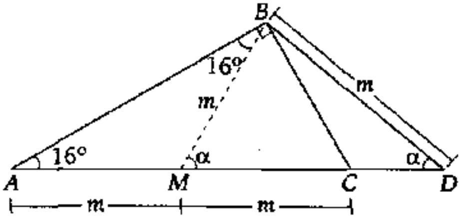
Halle α, si $AC=2(BD)$.



A) 15° B) 16° C) 24°
D) 32° E) 8°

Resolución

Piden hallar α
Dato: $AC=2(BD)$



Se traza la mediana relativa a la hipotenusa en ⊾ABC

$\rightarrow\ AM=MC=BM=m$

Por dato:

$AC=2(BD)\ \rightarrow\ BD=m$

$\triangle MBD$(isósceles): $m\sphericalangle BMD=m\sphericalangle BDM=\alpha$

$\triangle AMB$(isósceles): $m\sphericalangle BAM=m\sphericalangle ABM=16°$

Por ángulo exterior:

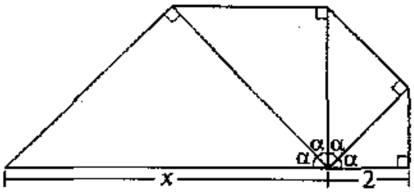
$\alpha=16°+16°$

$\therefore\ \alpha=32°$

Clave D

PROBLEMA N.° 7

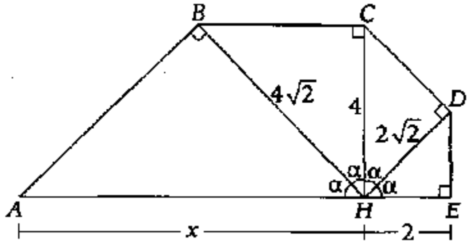
En el gráfico, calcule x.



A) 6
B) 8
C) 10
D) $4\sqrt{2}$
E) $6\sqrt{2}$

Resolución

Piden calcular x.



Por ángulos suplementarios: $4\alpha=180°$

$\alpha=45°$

⊾HED(notable 45°): $HD=2\sqrt{2}$

⊾HDC(notable 45°): $HC=(2\sqrt{2})\sqrt{2}=4$

⊾BCH(notable 45°): $BH=4\sqrt{2}$

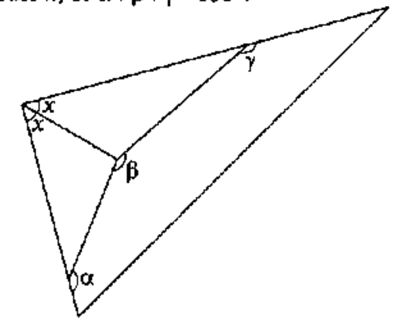
⊾ABH(notable 45°): $x=(4\sqrt{2})(\sqrt{2})$

$\therefore\ x=8$

Clave B

PROBLEMA N.° 8

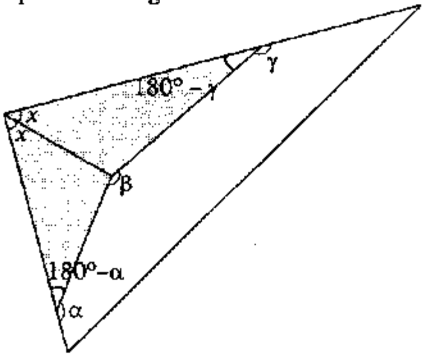
Calcule x, si $\alpha+\beta+\gamma=400°$.



A) 30° B) 40° C) 15°
D) 20° E) 25°

Resolución

Piden calcular x
Dato: $\alpha+\beta+\gamma=400°$
Completamos ángulos:



Por propiedad:

$$\beta=(2x)+(180°-\gamma)+(180°-\alpha)$$

$$\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{400°}=2x+360°$$

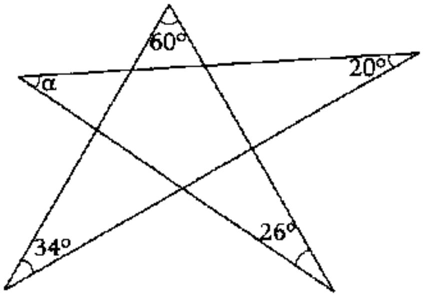
$$40°=2x$$

$$\therefore\ x=20°$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

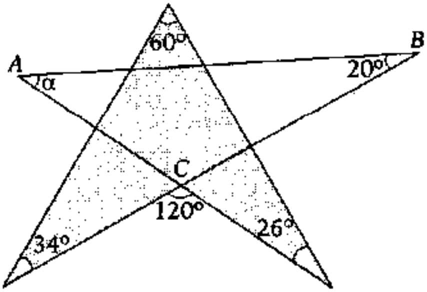
Calcule α en el gráfico mostrado.



A) 40°
B) 50°
C) 30°
D) 45°
E) 60°

Resolución

Piden calcular α



Por propiedad:

$$m\sphericalangle C=34°+60°+26°=120°$$

En $\triangle ACB$ (ángulos interiores):

$$\alpha+20°+120°=180°$$

$$\therefore\ \alpha=40°$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 10

El suplemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es igual a 2/3 de la diferencia entre el suplemento del ángulo y el suplemento del suplemento del mismo ángulo. Calcule la medida de dicho ángulo.

A) 20°
B) 30°
C) 25°
D) 22,5°
E) 40°

Resolución

Piden calcular la medida del ángulo.
Sea el ángulo α
Por dato:

$$S\left(S_{(\alpha)}-C_{(\alpha)}\right)=\frac{2}{3}\times\left[S_{(\alpha)}-\cancel{S}\cancel{S}_{(\alpha)}\right]$$

$$S(\underbrace{180-\cancel{\alpha}-90+\cancel{\alpha}}_{90^\circ})=\frac{2}{3}\times[180-\alpha-\alpha]$$

$$180^\circ-90^\circ=\frac{2}{3}\times(180-2\alpha)$$

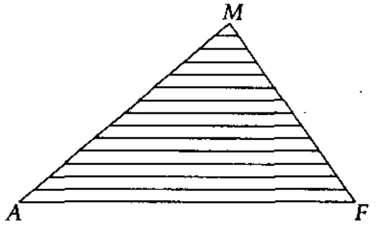
$$270^\circ=360^\circ-4\alpha$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{45^\circ}{2}=22{,}5^\circ$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 11

Halle la suma de la medida de los segmentos paralelos a $\overline{AF}$, si ellos dividen a $\overline{AM}$ en partes de longitudes iguales y $AF=7$ u.

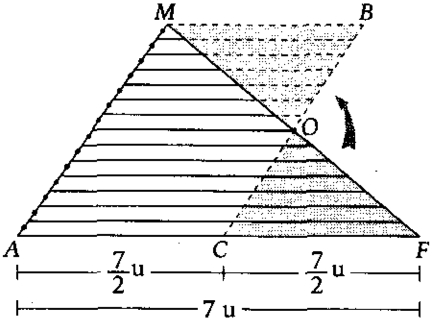


A) 45 u
B) 40 u
C) 45,5 u
D) 39 u
E) 49 u

Resolución

Piden la suma de las medidas de los segmentos paralelos a $\overline{AF}$.
Datos:
Los segmentos paralelos dividen a $\overline{AM}$ en partes iguales.

- $AF=7$ u



Se traza $\overline{BC}//\overline{AM}$, además O: punto medio de MF.
Se traslada los segmentos paralelos a CF y se observa 15 segmentos paralelos de longitud 7/2 u.
Con excepción del segmento AF, los otros 13 segmentos de 7/2 u cada uno medirán en total 45,5 u.
Por lo tanto, la suma de las medidas de los segmentos paralelos a $\overline{AF}$ es 45,5 u.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

Si al suplemento de un ángulo le disminuimos el doble de su complemento, resulta 3/7 del suplemento de dicho ángulo. Calcule su medida.

- A) 50°
- B) 45°
- C) 60°
- D) 48°
- E) 54°

Resolución

Piden calcular la medida del ángulo.
Sea el ángulo: θ
Por dato:

$$S_{(\theta)}-2\times C_{(\theta)}=\frac{3}{7}\times S_{(\theta)}$$

$$(180-\theta)-2(90-\theta)=\frac{3}{7}(180-\theta)$$

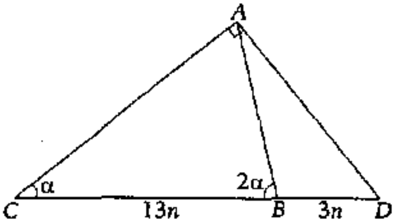
$$7\theta=540-3\theta$$

$\therefore\ \theta=54°$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 13

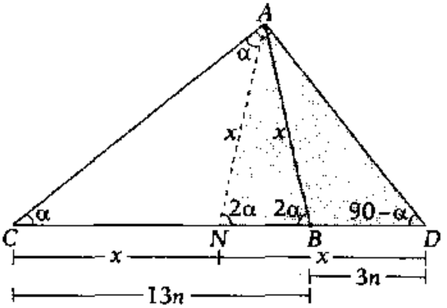
Calcule la longitud de $\overline{AB}$, en el gráfico mostrado:



- A) $6n$
- B) $7n$
- C) $8n$
- D) $9n$
- E) $10n$

Resolución

Piden calcular AB



Se traza $\overline{AN}$, tal que

$CN=AN\ \rightarrow\ m\measuredangle ACN=m\measuredangle CAN=\alpha$

Por ángulo exterior: $m\measuredangle AND=2\alpha$

⊿ CAD: $m\measuredangle ADB=90-\alpha$

$\triangle AND$ (isósceles): $AN=ND=x$

$\triangle CNA$ (isósceles): $CN=AN=x$

$\triangle ANB$ (isósceles): $AN=AB=x$

Además

$CD=2x=16n$

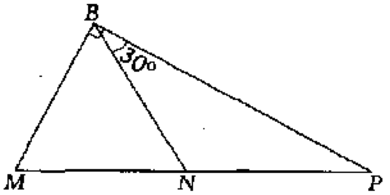
$x=8n$

Por lo tanto, $AB=x=8n$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 14

En el gráfico, calcule BN; si $BP=2$; $BM=\sqrt{3}$

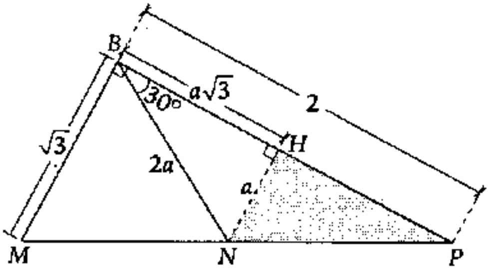


- A) $\frac{2}{5}\sqrt{2}$
- B) $\frac{4}{5}\sqrt{3}$
- C) $\frac{2}{7}\sqrt{3}$
- D) $\frac{4}{5}\sqrt{2}$
- E) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

Resolución

Piden calcular BN

Datos: $BP=2$ y $BM=\sqrt{3}$



Se traza $\overline{NH} \perp \overline{BP}$, $\triangle BHN$(notable 30° y 60°)

$\rightarrow\ BN=2a,\ BH=a\sqrt{3},\ NH=a$

$\triangle MBP \sim \triangle NHP$: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{2-a\sqrt{3}}$

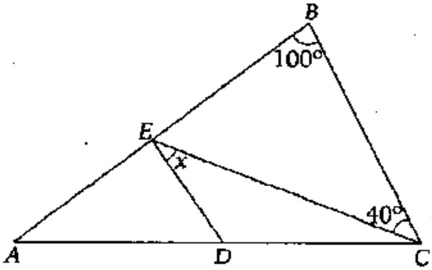
$$a=\frac{2}{5}\sqrt{3}$$

Por lo tanto, $BN=2a=\dfrac{4}{5}\sqrt{3}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 15

En el gráfico mostrado, calcule x; si $AE=EC$, $EB=CD$.

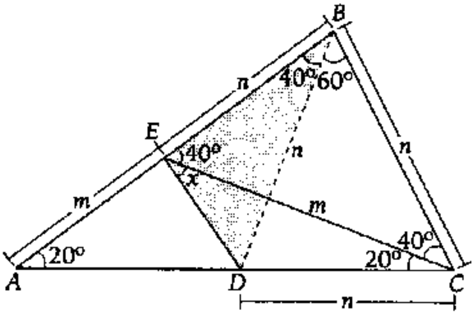


A) 30° B) 20° C) 40°
D) 35° E) 25°

Resolución

Piden calcular x

Datos: $AE=EC$ y $EB=CD$



Del dato:

$AE=EC=m$

$EB=CD=n$

Completamos $\triangle EBC$: m∢$BEC=40°$

$\triangle EBC$(isósceles): $EB=BC=n$

$\triangle AEC$(ángulo exterior): m∢EAC=m∢$ECA=20°$

Trazamos BD, tal que:

$\triangle BCD$(equilátero): $BD=BC=CD=n$

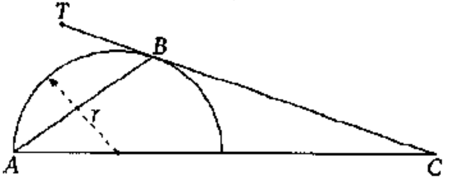
$\triangle EBD$(isósceles): $x+40°=70°$

$\therefore\ x=30°$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 16

En el gráfico, calcule m∢BCA, si m∢$TBA=55°$. B: punto de tangencia.

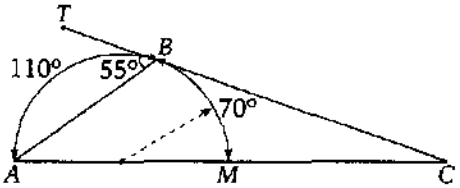


A) 15° B) 30° C) 35
D) 20° E) 10°

Resolución

Piden calcular m∢BCA

Dato: m∢TBA=55° y B es punto de tangencia.



Por ángulo semiinscrito:

$$m\widehat{BA}=110° \text{ y } m\widehat{BM}=70°$$

Por ángulo exterior

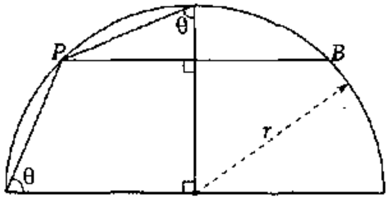
$$m∢BCA=\frac{110°-70°}{2}$$

∴ m∢BCA=20°

Clave **D**

PROBLEMA N.° 17

En el gráfico, calcule la m$\widehat{PB}$.

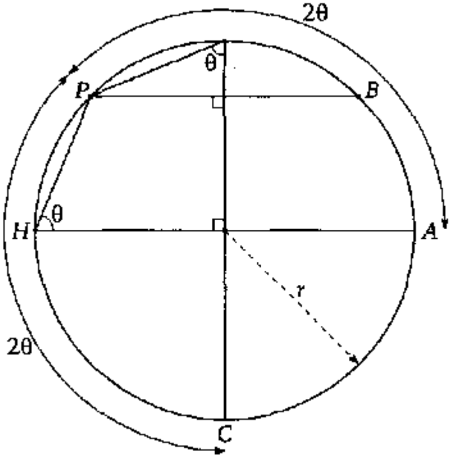


A) 140°
B) 120°
C) 90°
D) 100°
E) 135°

Resolución

Piden calcular m$\widehat{PB}$

Completamos la circunferencia



Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{PC}=2\theta,\ m\widehat{PA}=2\theta$$

Además

$$4\theta=270° \rightarrow 2\theta=135°$$

Por diferencia

$$m\widehat{PH}=m\widehat{AH}-m\widehat{PA}$$

$$m\widehat{PH}=180°-135°$$

$$\rightarrow m\widehat{PH}=45°$$

$$\overline{PB}//\overline{AH} \rightarrow m\widehat{PH}=m\widehat{AB}=45°$$

Por suplemento

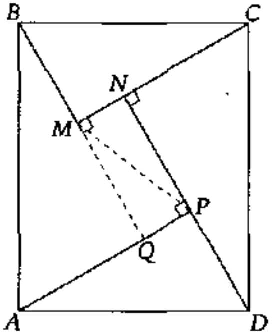
$$m\widehat{PB}=180°-\underbrace{m\widehat{PH}}_{45°}-\underbrace{m\widehat{AB}}_{45°}$$

∴ m$\widehat{PB}$=90°

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

Si: *ABCD* es un rectángulo, *AB*=25, *BC*=20 y *PD*=12. Calcule $(MP)^2$.

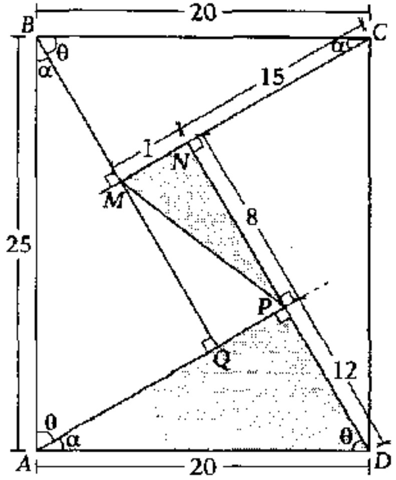


A) 60 B) 55 C) 81
D) 80 E) 65

Resolución

Piden calcular $(MP)^2$

Datos:
ABCD es un rectángulo,
AB=25, *BC*=20 y *PD*=12



⊿*BMC* ~ ⊿*BQA* ~ ⊿*APD* (notable 37° y 53°):

$\alpha=37°$ y $\theta=53°$

⊿*CND* (notable 37° y 53°): *ND*=20 y *NC*=15

Por diferencia

$$NP=\underbrace{ND}_{20}-\underbrace{PD}_{12} \rightarrow NP=8$$

⊿*BMC* (notable 37° y 53°): *BM*=12 y *MC*=16

Por diferencia

$$MN=\underbrace{MC}_{16}-\underbrace{NC}_{15} \rightarrow MN=1$$

⊿*MNP* (Por teorema de Pitágoras)

$$(MP)^2=(MN)^2+(NP)^2$$

Reemplazamos

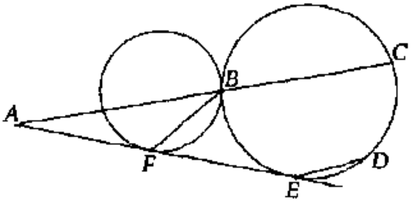
$$(MP)^2=1^2+8^2$$

$\therefore$ $(MP)^2=65$

Clave E

PROBLEMA N.° 19

En el gráfico, calcule la m$\overset{\frown}{BED}$, si m∢*BAE*=20°, *AF*=*FB* y $\overline{AC}//\overline{ED}$ (*B*, *F* y *E* son puntos de tangencia).



A) 70° B) 140° C) 150°
D) 100° E) 120°

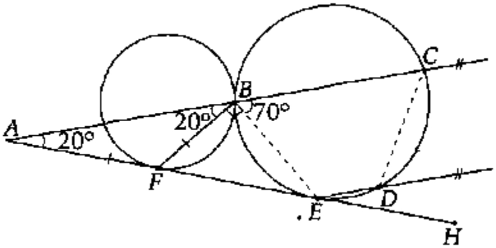
Resolución

Piden calcular $m\widehat{BED}$.

Datos:

$m\measuredangle BAE=20°$, $AF=FB$ y $\overline{AC}//\overline{ED}$

B, F y E son puntos de tangencia.



$\triangle ABF$ (isósceles):

$m\measuredangle ABF=m\measuredangle BAF=20°$

Por propiedad:

$m\measuredangle FBE=90°$

Por ángulo suplementario

$m\measuredangle CBE=70°$

$\overline{BC}//\overline{ED}$

$m\widehat{BED}=m\widehat{CDE}=140°$ (ángulo inscrito)

Por lo tanto, $m\widehat{BED}=140°$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

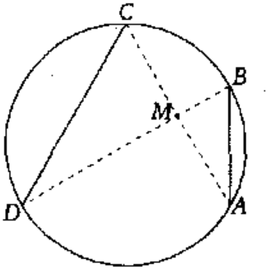
En el gráfico mostrado, se tiene: $\overline{AB}$, lado de un hexágono regular inscrito; y $\overline{CD}$, lado del triángulo equilátero inscrito.

$m\measuredangle CBE=70°$

$\overline{BC}//\overline{ED}$

$m\widehat{BED}=m\widehat{CDE}=140°$ (ángulo inscrito)

A) 80°
B) 100°
C) 110°
D) 90°
E) 70°



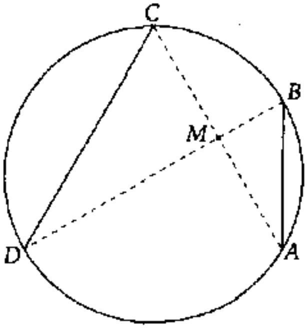
Resolución

Piden calcular $m\measuredangle AMD$

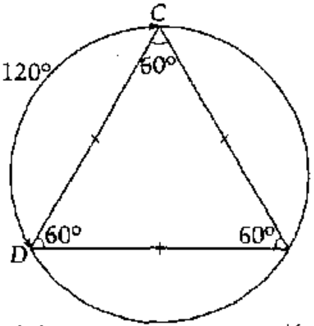
Datos:

$\overline{AB}$ es lado de un hexágono regular inscrito.

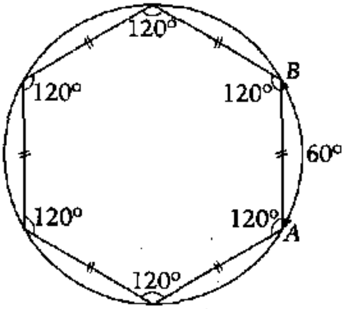
$\overline{CD}$ es lado de un triángulo equilátero inscrito.



Consideramos

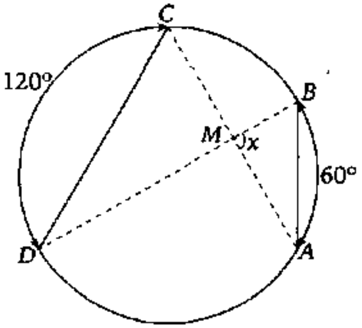


Consideramos



hexágono regular
inscrito

En el problema



Por ángulo interior

$$x=\frac{120^\circ+60^\circ}{2}=90^\circ$$

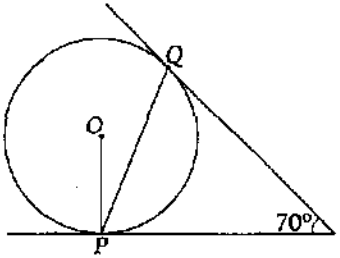
Por lo tanto

m∢*AMD*=90°

Clave D

PROBLEMA N.° 21

Dado el gráfico, calcule la m∢*OPQ*, si *O* es centro. Además, *P* y *Q* son puntos de tangencia.



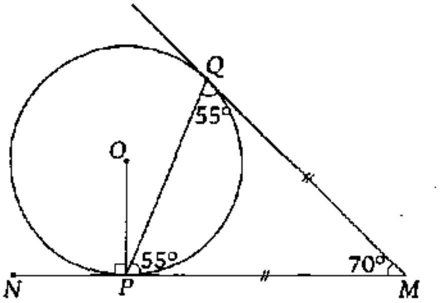
A) 45° B) 35° C) 30°
D) 40° E) 50°

Resolución

Piden calcular m∢*OPQ*.

Datos:

O es centro, *P* y *Q* son puntos de tangencia.



△*MPQ* es isósceles (2 tangentes a la circunferencia)

→ m∢*QPM*=m∢*PQM*=55°

Por propiedad:

O centro y *P* punto de tangencia

→ m∢*OPN*=90°

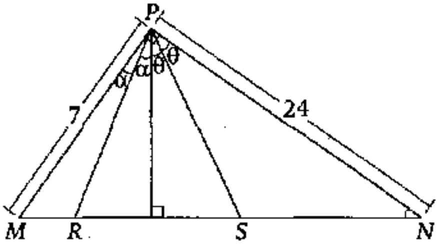
Por ángulo complementario

→ m∢*OPQ*=35°

Clave B

PROBLEMA N.° 22

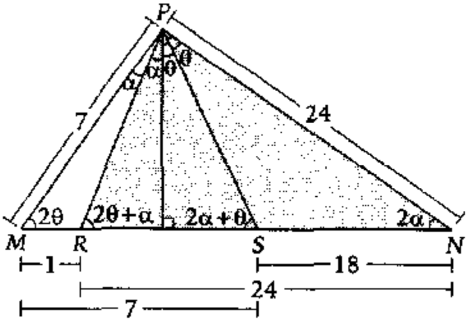
En el gráfico, se muestra un triángulo rectángulo recto en P.
Calcule *RS*.



A) 4
B) 8
C) 10
D) 7
E) 6

Resolución

Piden calcular *RS*.



Del gráfico

$2\alpha+2\theta=90°$

Completamos ángulos:

$m\sphericalangle PNS=2\alpha$ y $m\sphericalangle PMR=2\theta$

Por ángulo exterior:

En $\triangle PSN$: $m\sphericalangle PSR=2\alpha+\theta$

En $\triangle MPR$: $m\sphericalangle PRS=2\theta+\alpha$

$\triangle PRN$(isósceles) → $PN=RN=24$

$\triangle MPS$(isósceles) → $MP=MS=7$

⊾MPN(notable): $MN=25$

Por diferencia de longitud de segmentos:

$$MR=\underbrace{MN}_{25}-\underbrace{RN}_{24} \rightarrow MR=1$$

$$SN=\underbrace{MN}_{25}-\underbrace{MS}_{7} \rightarrow SN=18$$

Entonces

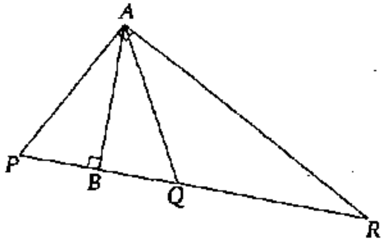
$$RS=\underbrace{MN}_{25}-\underbrace{MR}_{1}-\underbrace{SN}_{18}$$

∴ $RS=6$

Clave E

PROBLEMA N.° 23

En el triángulo mostrado, calcule *AB*, si $PQ=2$, $QR=7$ y $AP=AQ$.



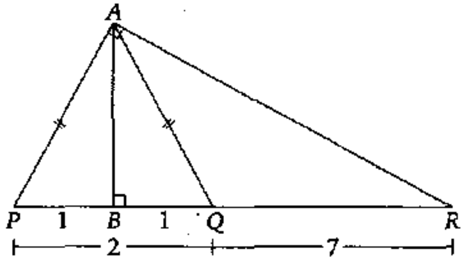
A) $2\sqrt{2}$
B) 3
C) 2,5
D) 5
E) 4

Resolución

Piden calcular AB

Datos:

$PQ=2;\ QR=7$ y $AP=AQ$



$\triangle PAQ$(isósceles): $\overleftrightarrow{AB}$ es mediatriz

$\rightarrow\ PB=BQ=1$

Por relaciones métricas:

$$(AB)^2=(PB)\times(BR)$$

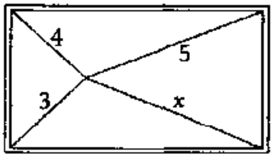
$$(AB)^2=1\times 8$$

$$\therefore\ AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 24

Una araña teje su tela en el marco de una ventana, para ello dispone 4 hilos que parten cada uno de un distinto vértice. Si 3 de ellos miden 3, 4 y 5 m, el cuarto hilo medirá:

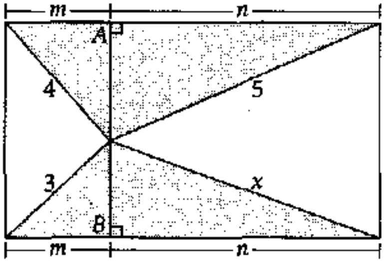


A) 4 B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$

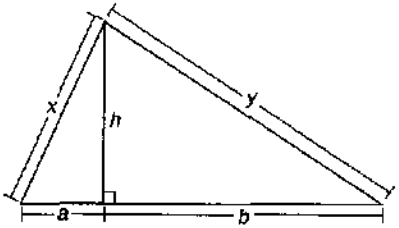
D) 3,5 E) 5

Resolución

Piden la longitud del cuarto hilo.



Observación



Por Pitágoras:

$h^2=x^2-a^2$ (I)

$h^2=y^2-b^2$ (II)

De (I) y (II):

$$x^2-a^2=y^2-b^2$$

$$\therefore\ x^2-y^2=a^2-b^2$$

En el problema

Se traza la perpendicular $\overline{AB}$ y aplicamos la observación.

$$5^2-4^2=n^2-m^2=x^2-3^2$$

$$x^2=5^2+3^2-4^2$$

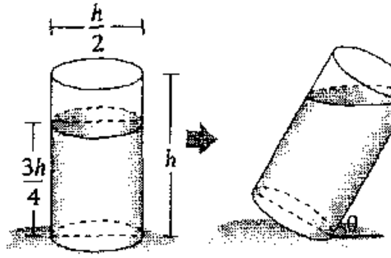
$$x^2=18$$

$$\therefore\ x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

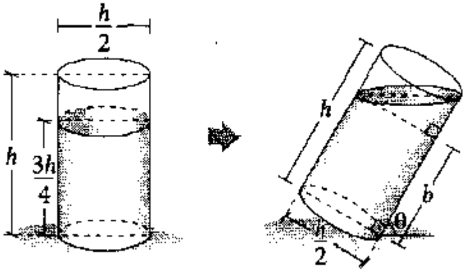
En el gráfico, calcule el ángulo θ; para el cual la caída del agua en el vaso es inminente.



A) 30°　B) 60°　C) 45°
D) 50°　E) 37°

Resolución

Piden calcular la medida del ángulo θ.
Comparamos las posiciones inicial y final del recipiente:

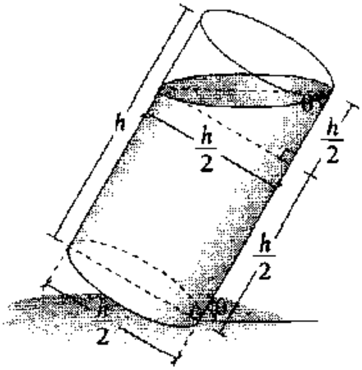


En ambos casos, el área circular de la base es la misma, por ende, comparamos los volúmenes en función de las superficies laterales.

Inicio: $\left(\frac{3h}{4}\right)\times\left(\frac{h}{2}\right)$　Final: $\left(\frac{h+b}{2}\right)\times\left(\frac{h}{2}\right)$

$$\frac{3h}{4}=\frac{h+b}{2} \rightarrow h=2b$$

Analizamos la posición final del recipiente:

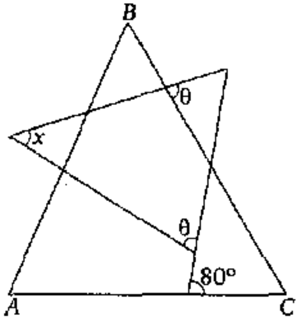


Se observa que:
θ=45°

Clave C

PROBLEMA N.° 26

En el gráfico $AB=BC=AC$.
Halle el valor de x.



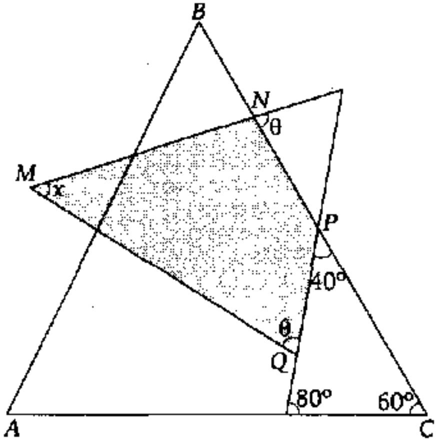
A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 35°

Resolución

Piden hallar el valor de *x*.

Datos: $AB=BC=AC$

En el gráfico:



Por el dato:

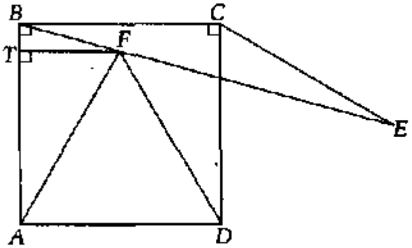
$\triangle ABC$(equilátero) → $m\measuredangle BCA=60°$

$\square MNPQ$: inscriptible → $x=40°$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Calcule *FE*, si *ABCD* es un cuadrado y *AFD* es un triángulo equilátero. Además, $TF=5$ cm y $CE=10$ cm.



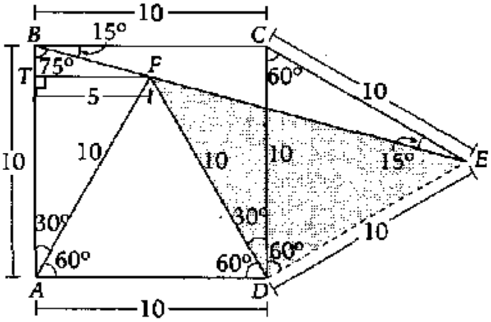
A) 10 cm B) 12 cm C) 15 cm

D) $10\sqrt{2}$ cm E) $10\sqrt{3}$ cm

Resolución

Piden calcular *FE*

Datos: *ABCD* es un cuadrado, *AFD* es un triángulo equilátero, $TF=5$ cm y $CE=10$ cm.



Del gráfico:

$AD=2(TF)=10=BA=AF=BC=CD$

$\triangle BFA$(isósceles) → $m\measuredangle ABF=m\measuredangle BFA=75°$

Por ángulos complementarios

$m\measuredangle CBF=15°=m\measuredangle CEF$

$\triangle BCE$: completando ángulos, entonces

$m\measuredangle DCE=60°$

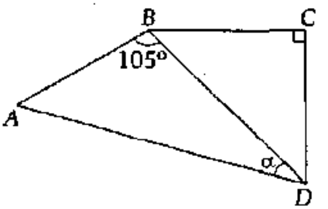
Se traza $\overline{DE}$ → $\triangle DCE$ es equilátero: $DE=10$

$\triangle FDE$(notable 45°): $FE=10\sqrt{2}$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 28

En el gráfico, calcule α; si $AB=BC=CD$.



A) 30° B) 45° C) 20°

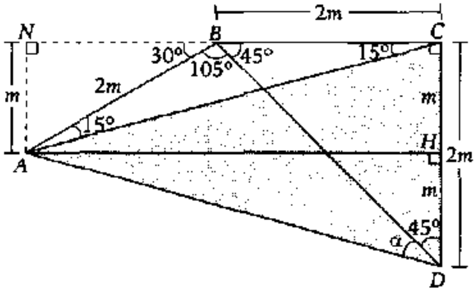
D) 15° E) 25°

Resolución

Piden calcular α

Datos:

$AB=BC=CD$



⊾BCD(isósceles):

$m\measuredangle CBD=m\measuredangle CDB=45°$

Por dato:

$AB=BC=CD=2m$

Prolongamos $\overrightarrow{CB}$:

$m\measuredangle NBA=30°$

Se traza $\overline{AN}\perp\overline{BN}$:

⊾ANB(notable)

$\rightarrow\ AB=2(NA)=2m$

Se traza $\overline{AC}$:

$\triangle ABC$(isósceles)

$\rightarrow\ m\measuredangle BCA=m\measuredangle BAC=15°$

$\triangle ACD$: Se traza $\overline{AH}\perp\overline{CD}$: $CH=HD=m$

$\triangle ACD$(isósceles): $m\measuredangle ACH=m\measuredangle ADH=75°$

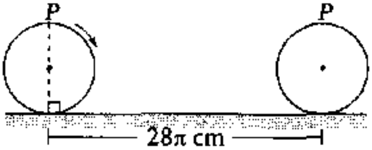
$\alpha+45°=75°$

$\therefore\ \alpha=30°$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 29

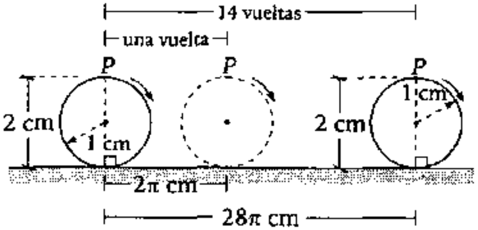
En el gráfico se muestra una rueda cuyo diámetro es 2 cm. Si la rueda gira, sin resbalar, una distancia de 28π cm, ¿a qué altura se encontrará el punto P?



A) 1 cm B) 1/2 cm C) 3/2 cm
D) 2 cm E) 3/4 cm

Resolución

Piden: ¿a qué altura se encontrará el punto P?
Dato: diámetro de la rueda = 2 cm.



La rueda al dar una vuelta, recorre una longitud equivalente a su perímetro.

$$\boxed{\text{Número de vueltas}=\frac{\text{longitud recorrida}}{\text{perímetro}}}$$

En el problema

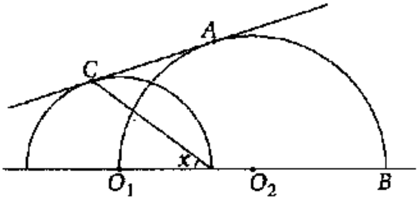
$$\text{Número de vueltas}=\frac{28\pi}{2\pi(1)}=14\text{ vueltas}$$

Luego de 14 vueltas completas, el punto P se encontrará a 2 cm de la base.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 30

Si $m\widehat{AB}=100°$, O_1 y O_2 son centros de las semicircunferencias, además A y C son puntos de tangencia, calcule x.

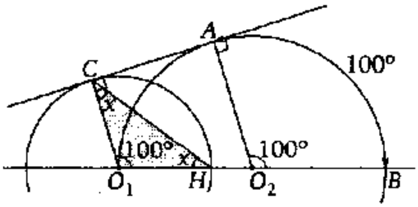


A) 80° B) 50° C) 40°
D) 45° E) 30°

Resolución

Piden calcular x

Datos:
$m\widehat{AB}=100°$, O_1 y O_2 son centros de circunferencia, A y C son puntos de tangencia.



Se traza

$$\overline{O_2A}\perp\overline{CA} \;\rightarrow\; m\sphericalangle AO_2B=100°$$

Se traza

$$\overline{O_1C}\perp\overline{CA} \;\rightarrow\; \overline{CO_1}\,//\,\overline{AO_2}$$

$$\rightarrow\; m\sphericalangle CO_1O_2=m\sphericalangle AO_2B=100°$$

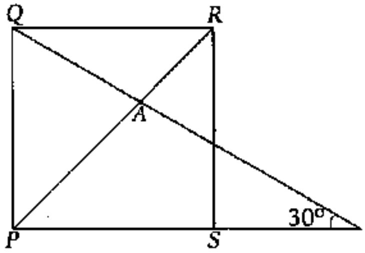
$\triangle CO_1H$(isósceles):

$$2x=80°$$
$$x=40°$$

Clave C

PROBLEMA N.° 31

Si se desea que el área de la región cuadrada $PQRS$ sea $(4+2\sqrt{3})\text{cm}^2$, entonces AP deberá medir:



A) $\sqrt{2}$ cm B) $\sqrt{3}$ cm C) $\sqrt{5}$ cm
D) $\sqrt{6}$ cm E) $\sqrt{7}$ cm

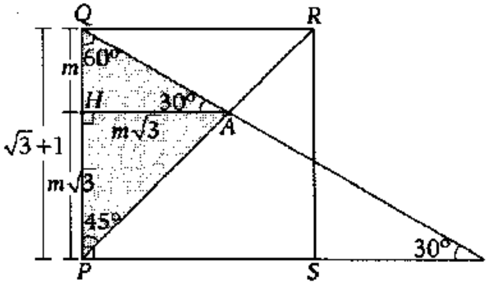
Resolución

Piden la medida de $\overline{AP}$

Dato: el área de la región cuadrada $PQRS$ es
$(4+2\sqrt{3})\text{cm}^2$

Sea ℓ el lado del cuadrado, tenemos:

$$\mathbb{A}_{\square PQRS} \;\rightarrow\; \ell^2=4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$$
$$\rightarrow\; \ell=\sqrt{3}+1$$



Completamos los ángulos:

$$m\sphericalangle QPA=45° \text{ y } m\sphericalangle PQA=60°$$

Se traza $\overline{AH}\perp\overline{PQ}$

⊿QHA(notable 30° y 60°):

$$QH=m \text{ y } AH=m\sqrt{3}$$

⊿AHP: $AH=HP=m\sqrt{3}$

Luego

$$PQ = m + m\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad m = 1$$

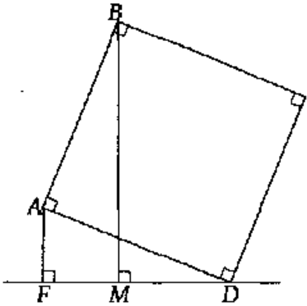
◺AHP: $AP = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$

Clave D

PROBLEMA N.° 32

En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado, donde $AF=2$ m y $FD=5$ m. Calcule BM.

A) 6 m
B) 8 m
C) 9 m
D) 7 m
E) 10 m



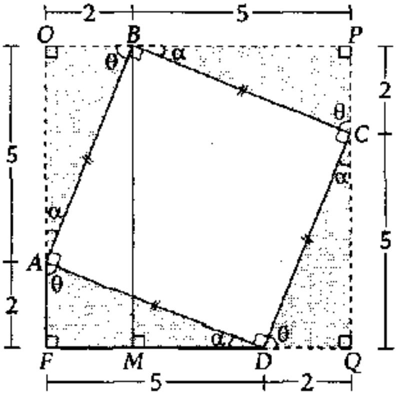
Resolución

Piden calcular BM

Datos:

$ABCD$ es un cuadrado, $AF=2$ m y $FD=5$ m.

Completamos el gráfico:



◺$AOB \cong$ ◺$AFD \cong$ ◺$DQC \cong$ ◺CPB(A. L. A.)

$\rightarrow \ AF=OB=PC=DQ=2$

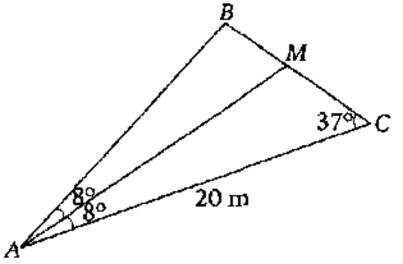
$\rightarrow \ FD=QC=BP=OA=5$

Por lo tanto, $BM=7$

Clave D

PROBLEMA N.° 33

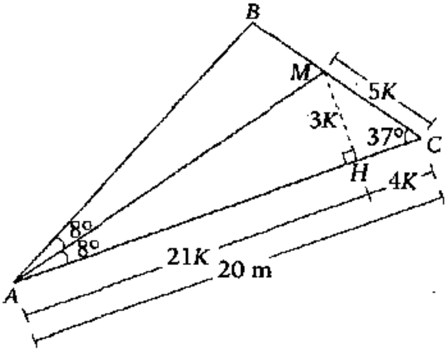
En el gráfico, calcule la medida de $\overline{CM}$.



A) 9 m
B) 3 m
C) 8 m
D) 4 m
E) 5 m

Resolución

Piden calcular la medida de $\overline{CM}$



Se traza $\overline{MH} \perp \overline{AC}$

◺CHM(notable 37° y 53°): $MH=3K$, $HC=4K$

◺AHM(notable 8°): $MH=3K$, $AH=21K$

Luego

$$AC=21K+4K=20 \rightarrow K=\frac{4}{5}$$

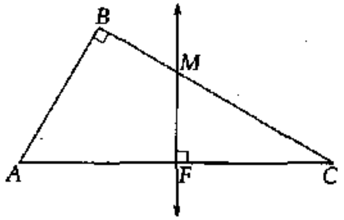
Por lo tanto

$$CM=5K=5\left(\frac{4}{5}\right)=4\text{ m}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 34

Calcule BM; si $\overleftrightarrow{MF}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, $AC=12$ m y $BC=10$ m.

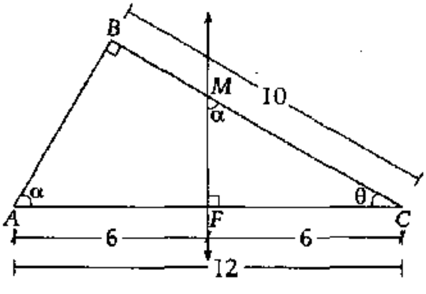


A) 2,5 m B) 3 m C) 4 m
D) 2 m E) 2,8 m

Resolución

Piden calcular BM

Datos:
$\overleftrightarrow{MF}$ es mediatríz de $\overline{AC}$, $AC=12$ y $BC=10$



$$\triangle ABC \sim \triangle MFC: \frac{10}{6}=\frac{12}{MC} \rightarrow MC=\frac{36}{5}$$

Luego

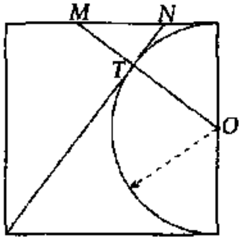
$$BM=BC-MC, \quad BM=10-\frac{36}{5}$$

$$\therefore \; BM=\frac{14}{5}=2{,}8\text{ m.}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 35

El lado del cuadrado mostrado mide 12 u. Calcule MN, si T es punto de tangencia.

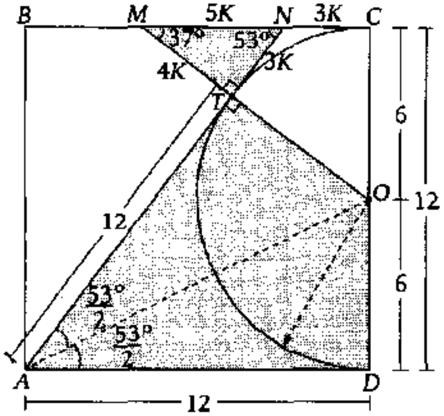


A) 3 u B) 4 u C) 5 u
D) 6 u E) 7 u

Resolución

Piden calcular MN

Datos: el lado del cuadrado mide 12 u y T es punto de tangencia.



Se traza $\overline{AO}$

◺ADO(notable)

$\rightarrow\ m\sphericalangle OAD=53°/2$

Por propiedad:

$\overrightarrow{AO}$: bisectriz

$\rightarrow\ m\sphericalangle TAO=53°/2$

Por paralelas:

$m\sphericalangle MNT=m\sphericalangle NAD=53°$

◺MTN(notable)

$\rightarrow\ MT=4K,\ NT=3K$ y $MN=5K$

Por tangentes:

$NT=NC=3K$

◺MCO(notable 37° y 53°):

$8K=8$

$\rightarrow\ K=1$

$\therefore\ MN=5K=5$

Clave **C**

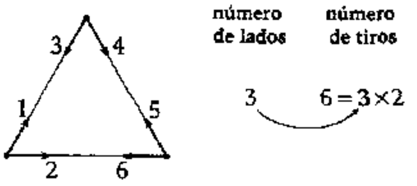
PROBLEMA N.° 36

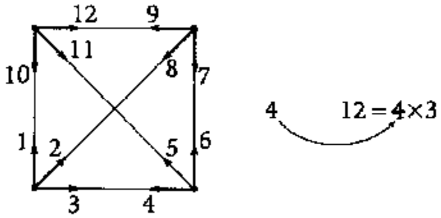
Sobre el suelo se ha dibujado un polígono de n lados. Un tirador se para sobre un vértice y dispara sobre los otros. Si esto lo repite sobre cada uno de los vértices, en total, ha disparado 90 tiros. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

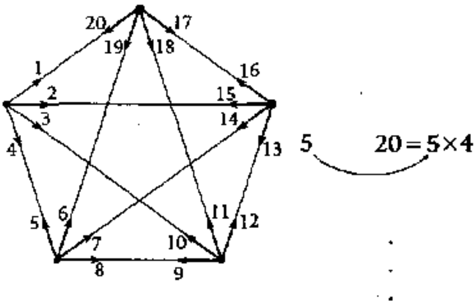
A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

Resolución

Piden el número de lados del polígono.
Analizamos situaciones particulares:







En el problema:

Número de tiros: 90=10×9

Por lo tanto, el polígono tiene 10 lados.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 37

Sobre los lados de un cuadrado de lado K, se trazan rectángulos congruentes, la altura que deben tener estos rectángulos para que al unir los vértices resulte un octógono regular, es:

A) $K\sqrt{2}$ B) $K\sqrt{3}$ C) $\frac{K\sqrt{2}}{3}$

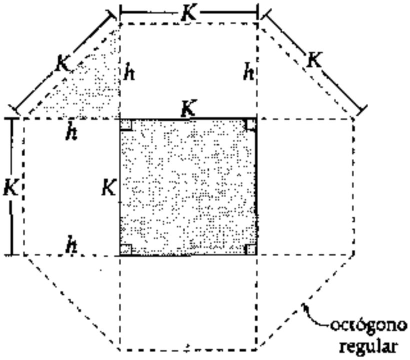
D) $\frac{K\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{K\sqrt{2}}{2}$

Resolución

Piden la altura de los rectángulos congruentes.

Dato: lado del cuadrado es K

En el gráfico



Por Pitágoras:

$$h^2+h^2=K^2$$

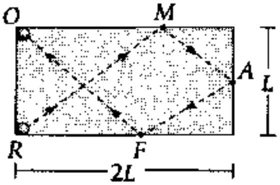
$$h=\sqrt{\frac{K^2}{2}}=\frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \ h=\frac{K\sqrt{2}}{2}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 38

Se muestra una mesa de billar. Desde el punto R se lanza una bola que toca sucesivamente en M, A, F y, finalmente, toca con otra bola en O. Entonces, $\overline{OM}$ mide

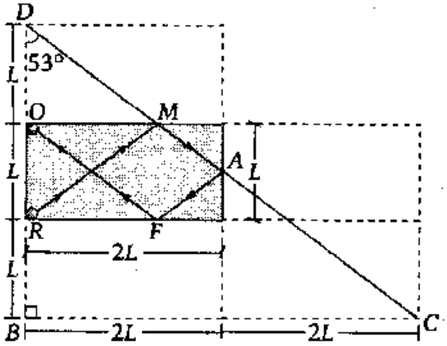


A) $\frac{4L}{3}$ B) $\frac{2L}{3}$ C) $\frac{2L}{5}$

D) $\frac{3L}{5}$ E) $\frac{1L}{3}$

Resolución

Piden la longitud de $\overline{OM}$.



Proyectamos los segmentos que representan el recorrido de la bola de billar

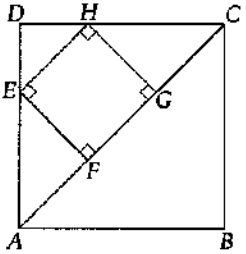
⊾DBC(notable) → $m\sphericalangle CDB=53°$

⊾DOM(notable) → $OM=\frac{4L}{3}$

Clave A

PROBLEMA N.° 39

En el gráfico mostrado, *ABCD* es un cuadrado de lado *n*; *EFGH*, un cuadrado de lado *m*. Halle *m/n*.

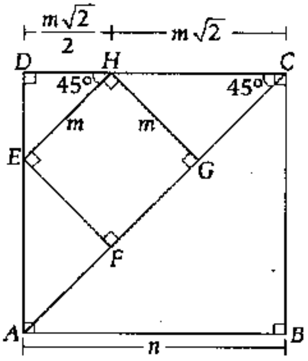


A) 3/5 B) $\sqrt{3}/2$ C) $\sqrt{2}/3$
D) 1/4 E) 2/3

Resolución

Piden hallar $\frac{m}{n}$.

Datos:
El lado del cuadrado *ABCD* es *n* y el lado del cuadrado *EFGH* es *m*.



⊿HGC(notable 45°): $HC = m\sqrt{2}$

⊿EDH(notable 45°): $DH = \frac{m\sqrt{2}}{2}$

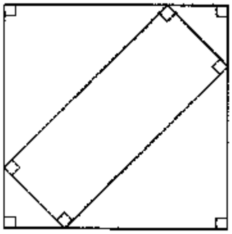
Luego: $AB = n = \frac{m\sqrt{2}}{2} + m\sqrt{2}$

$$n = \frac{3m\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{m}{n} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

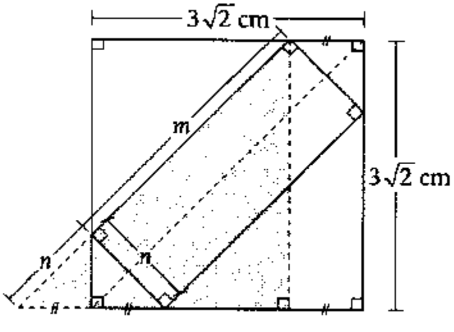
El lado del cuadrado mide $3\sqrt{2}$ cm.
Entonces, el perímetro de la región rectangular inscrita es:



A) 10 cm
B) $6\sqrt{3}$ cm
C) $12\sqrt{2}$ cm
D) 8 cm
E) 12 cm

Resolución

Piden el perímetro de la región rectangular inscrita.



Del gráfico: $m+n=6$ cm

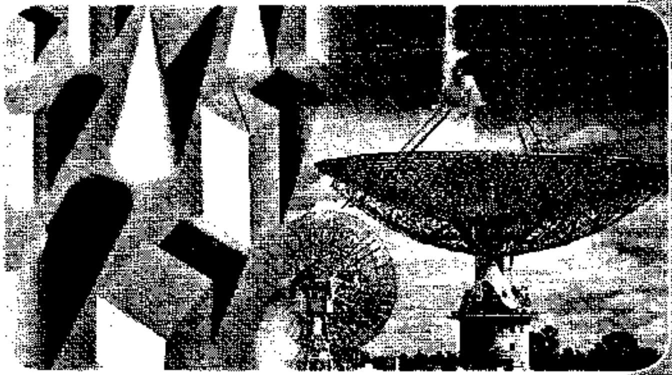
Perímetro de la región rectangular inscrita. : $2(\underbrace{m+n}_{6\text{ cm}}) = 12$ cm

Clave **E**

Capítulo

18

Perímetros y áreas de regiones planas



Cuántas veces hemos observado nuestro entorno y reconocido en él las formas que nosotros llamamos figuras geométricas, tales como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo, etc., debido a lo aprendido en el colegio o por un estudio particular del curso de Geometría. En este capítulo, lo que se busca es desarrollar aún más, a través de la resolución de problemas, esa capacidad de abstracción en lo referido a las formas de las figuras, centrándonos en el cálculo de sus perímetros y sus respectivas variantes, pero también en el cálculo de áreas de regiones empleando las fórmulas geométricas elementales, así como la relación entre áreas de regiones similares.

Capítulo 18

Perímetros y áreas de regiones planas

PROBLEMA N.° 1

Se tiene dos circunferencias ortogonales de 5 cm y 12 cm de radio; entonces, la distancia entre sus centros es

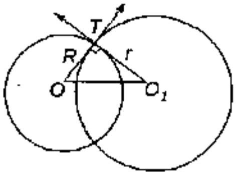
A) 13 B) 10 C) 17
D) 0 E) 9

Resolución

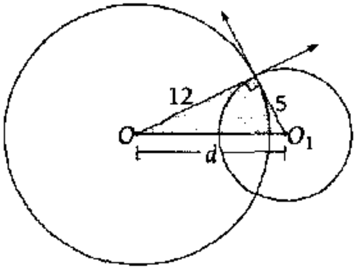
Se pide la distancia entre los centros de dos circunferencias ortogonales: d.

Recuerda

Circunferencias ortogonales



Del enunciado del problema graficamos



Por teorema de Pitágoras

$$d^2=12^2+5^2$$

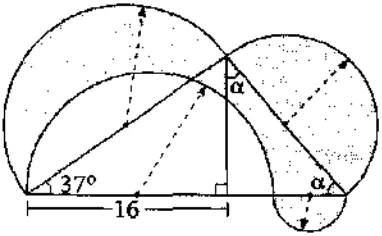
$$d^2=169$$

$$\therefore\ d=13$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 2

Calcule el perímetro de la región sombreada



A) $6\pi(2+\sqrt{2})$

B) $4\pi(6+\sqrt{2})$

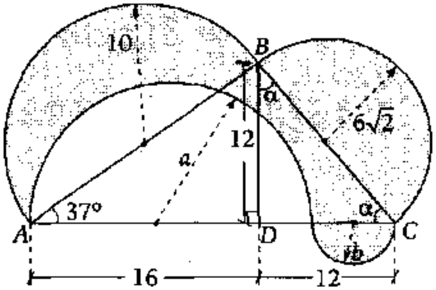
C) $6\pi(3+\sqrt{2})$

D) $6\pi(4+\sqrt{2})$

E) $6\pi(1+\sqrt{2})$

Resolución

Se pide perímetro de la región sombreada



Del gráfico $AD+DC=AC$

$2a+2b=16+12 \rightarrow a+b=14$

Además $\alpha=45°$

Luego

$$\text{Perímetro de la región sombreada}=\ell_{\overset{\frown}{AB}}+\ell_{\overset{\frown}{BC}}+\ell_{\overset{\frown}{CD}}+\ell_{\overset{\frown}{AD}}$$

$$\text{Perímetro de la región sombreada}=\pi(10)+\pi(6\sqrt{2})+\underbrace{\pi(b)+\pi(a)}_{14\pi}$$

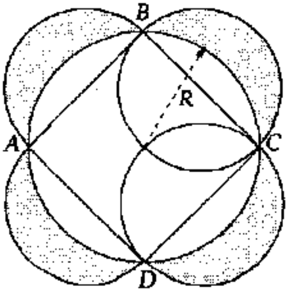
$$\text{Perímetro de la región sombreada}=24\pi+6\sqrt{2}\pi$$

Por lo tanto, el perímetro de la región sombreada es $6\pi(4+\sqrt{2})$.

Clave **D**

PROBLEMA N.°3

Calcule el perímetro de la región sombreada, si $AB=BC=CD=DA$.



A) $2\pi R(1+\sqrt{2})$ u

B) $\pi R(2+\sqrt{2})$ u

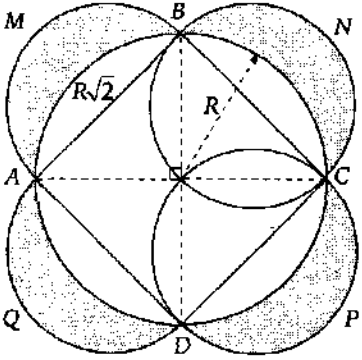
C) $3\pi R(\sqrt{2}-1)$ u

D) $2\pi R(2\sqrt{2}-1)$ u

E) $\pi R(2+3\sqrt{2})$ u

Resolución

Se pide el perímetro de la región sombreada.
Dato $AB=BC=CD=DA$



$$\text{Perímetro de la región sombreada}=\ell_{\underset{r=R}{\odot}}+\underbrace{\ell_{\overset{\frown}{AMB}}+\ell_{\overset{\frown}{BNC}}}+\underbrace{\ell_{\overset{\frown}{CPD}}+\ell_{\overset{\frown}{DQA}}}$$

$$\text{Perímetro de la región sombreada}=\underset{r=R}{\ell_{\odot}}+\underset{r=\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\ell_{\odot}}+\underset{r=\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\ell_{\odot}}$$

$$\text{Perímetro de la región sombreada}=2\pi R+2\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Perímetro de la región sombreada}=2\pi R+2\pi(R\sqrt{2})$$

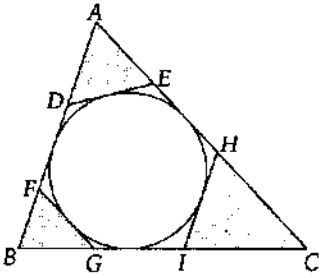
Por lo tanto, el perímetro de la región sombreada es $2\pi R(1+\sqrt{2})$ u.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 4

Siendo los perímetros de las regiones triangulares *ADE*, *BFG* y *CHI*: 3; 4 y 5 m, respectivamente; calcule el perímetro de la región triangular *ABC*.

A) 12 m
B) 15 m
C) 24 m
D) 18 m
E) 30 m



Resolución

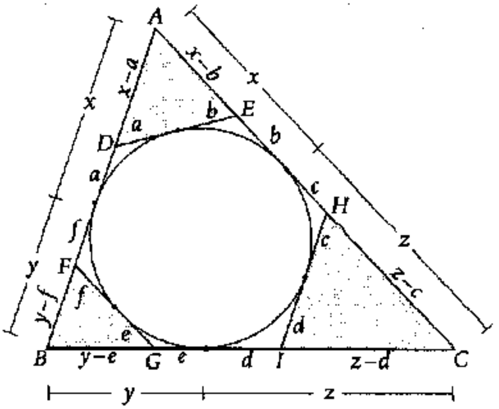
Se pide el perímetro de la región triangular *ABC*.

Datos:

Perímetro ▲*ADE*=3 m

Perímetro ▲*BFG*=4 m

Perímetro ▲*CHI*=5 m



En el gráfico

$$\text{Perím.}[ADE] = x - \cancel{a} + \cancel{a} + \cancel{b} + x - \cancel{b} = 2x = 3$$

$$\text{Perím.}[BFG] = y - \cancel{f} + \cancel{f} + \cancel{e} + y - \cancel{e} = 2y = 4$$

$$\text{Perím.}[CHI] = z - \cancel{d} + \cancel{d} + \cancel{c} + z - \cancel{c} = 2z = 5$$

Luego

$$\text{Perímetro}[ABC] = 2x + 2y + 2z$$

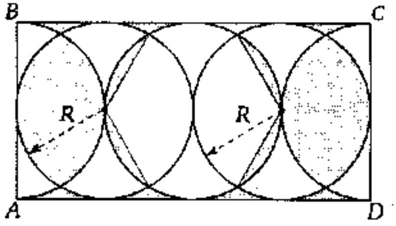
$$\text{Perímetro}[ABC] = 3 + 4 + 5$$

Por lo tanto, el perímetro[*ABC*] es igual a **12 m.**

Clave **A**

PROBLEMA N.° 5

El gráfico muestra a tres circunferencias de radios iguales a 4 cm. Calcule el perímetro de la región sombreada, si *ABCD* es un rectángulo.



A) 16/3(24π+2)
B) 16/3(5π+9)
C) 16/3(5π+7)
D) 16/3(5π+2)
E) 16/3(5π+3)

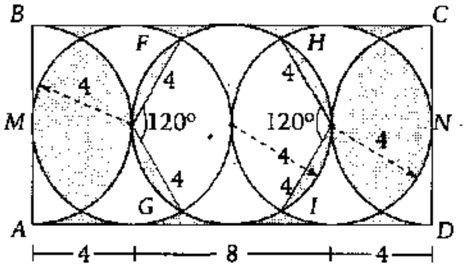
Resolución

Se pide el perímetro de la región sombreada.

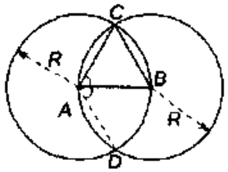
Datos:

- Radio de las 3 circunferencias iguales es 4 cm.
- *ABCD*: rectángulo.

En el gráfico del problema



Recuerda



Se cumple que

$\triangle ABC$=equilátero de longitud de lado R,

también, $m\measuredangle CAD=120°$ y $\ell_{\overset{\frown}{CBD}}=\dfrac{2\pi R}{3}$.

- La longitud de los arcos *AB*, *FMG*, *CD* y *HNI* forman parte del perímetro de la región sombreada.

$$\ell_{\overset{\frown}{FMG}}=\ell_{\overset{\frown}{HNI}}=\frac{2}{3}\times 2\pi(4)$$

$$\rightarrow\ \ell_{\overset{\frown}{FMG}}=\ell_{\overset{\frown}{HNI}}=\frac{16}{3}\pi$$

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}}=\ell_{\overset{\frown}{CD}}=4\pi$$

Además, $\ell_{\bigcirc r=4}$ también es parte del perímetro pedido. Entonces

$$\begin{array}{c}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{array}=\underbrace{\ell_{\overset{\frown}{AB}}+\ell_{\overset{\frown}{CD}}}+\underbrace{\ell_{\overset{\frown}{FMG}}+\ell_{\overset{\frown}{HNI}}}+\ell_{\bigcirc r=4}+\underbrace{AD+BC}+4(4)$$

$$\begin{array}{c}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{array}=\ 2(4\pi)\ +\ 2\left(\frac{16}{3}\pi\right)\ +2\pi(4)+\ \ 2(16)\ \ +\ \ 16$$

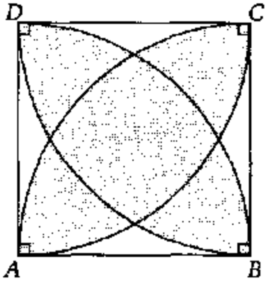
$$\begin{array}{c}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{array}=48+\frac{80}{3}\pi$$

Por lo tanto, el perímetro de la región sombreada es $\dfrac{16}{3}(5\pi+9)$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 6

Si *ABCD* es un cuadrado de lado $3a$, calcule el perímetro de la región sombreada.



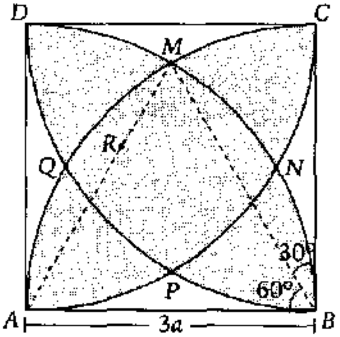
A) $4a\pi$ B) $5a\pi$ C) $6a\pi$
D) $8a\pi$ E) $9a\pi$

Resolución

Se pide el perímetro de la región sombreada.

Dato:

ABCD: cuadrado de lado de longitud $3a$.



En el gráfico

$AM=MB=AB=R$

$\rightarrow$ $m\sphericalangle ABM=60° \wedge m\sphericalangle MBC=30°$

Ahora

$$\ell_{\overset{\frown}{MC}}=\frac{2\pi R\times 30°}{360°}=\frac{\pi R}{6}$$

Se observa que, por la simetría de la región sombreada se cumple que

$$\ell_{\overset{\frown}{DM}}=\ell_{\overset{\frown}{MC}}=\ell_{\overset{\frown}{CN}}=\ell_{\overset{\frown}{NB}}=\ell_{\overset{\frown}{PB}}=\ell_{\overset{\frown}{PA}}=\ell_{\overset{\frown}{AQ}}=\ell_{\overset{\frown}{QD}}$$

Entonces,

$$\begin{matrix}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{matrix}=8\left(\frac{\pi R}{6}\right)$$

Pero

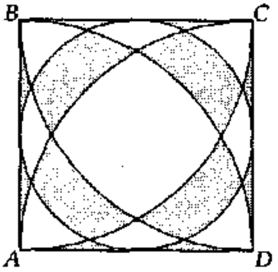
$R=3a$

Por lo tanto, el perímetro de la región sombreada es $8\left(\frac{\pi(3a)}{6}\right)=4a\pi$.

Clave $\boxed{A}$

PROBLEMA N.° 7

Calcule el perímetro de la región sombreada, si *ABCD* en un cuadrado cuyo lado mide *a* (*A*, *B*, *C* y *D* son centros).



A) $a(4+\pi)$
B) $a(3+3\pi)$
C) $a(4+3\pi)$
D) $a(3+4\pi)$
E) $a(4+2\pi)$

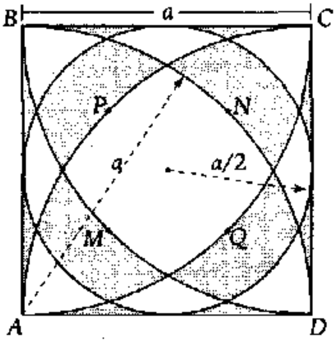
Resolución

Se pide el perímetro de la región sombreada.

Datos:

ABCD: cuadrado cuyo lado mide *a*.

A, B, C y *D*: centros.



En el gráfico:

- La longitud de los arcos (cuadrantes) *APC*, *AQC*, *BMD*, *BND* forman parte del perímetro de la región sombreada.

$$\ell_{\widehat{APC}}=\ell_{\widehat{AQC}}=\ell_{\widehat{BMD}}=\ell_{\widehat{BND}}=\frac{2\pi(a)}{4}$$

- Además, $\ell_{\bigcirc\, r=\frac{a}{2}}$ también es parte del perímetro pedido.

- Finalmente, la longitud de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ completan el perímetro de la región sombreada.

Luego

$$\begin{matrix}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{matrix}=\cancel{4}\left(\frac{2\pi(a)}{\cancel{4}}\right)+\overset{\ell_{\bigcirc r=a/2}}{\overset{\uparrow}{\cancel{2}\pi\left(\frac{a}{\cancel{2}}\right)}}+\underset{\begin{matrix}\text{suma de longitudes}\\ \text{de los lados del}\\ \text{cuadrado } ABCD\end{matrix}}{4a}$$

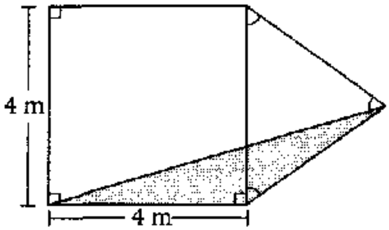
$$\begin{matrix}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{matrix}=2a\pi+a\pi+4a$$

Por lo tanto, el perímetro de la región sombreada es $a(3\pi+4)$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Calcule el área de la región sombreada:



A) $2\ \text{m}^2$ B) $3\ \text{m}^2$ C) $4\ \text{m}^2$

D) $6\ \text{m}^2$ E) $5\ \text{m}^2$

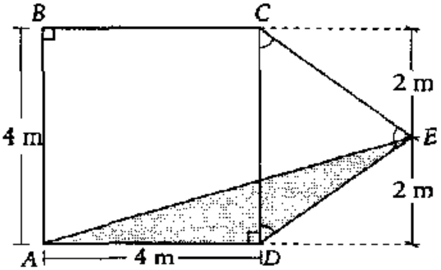
Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Del gráfico

ABCD: cuadrado y

CDE: triángulo equilátero.

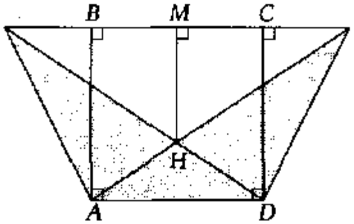


Por lo tanto, área de la región sombreada $(\triangle AED)$: $\dfrac{4\times 2}{2}=4\ \text{m}^2$.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

ABCD es un cuadrado de 12 m. ¿Cuál debe ser la longitud de $\overline{HM}$ para que el área de la región sombreada sea 120 m^2?



A) 4 m
B) 5 m
C) 6 m
D) 7 m
E) 8 m

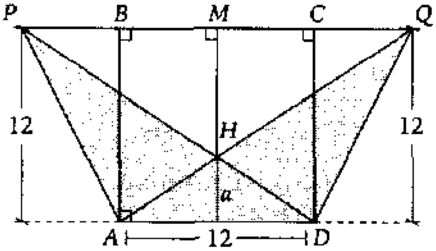
Resolución

Se pide la longitud de $\overline{HM}$.

Datos:

- *ABCD*: cuadrado de longitud de lado igual a 12 m.
- Área de la región sombreada: 120 m^2.

Del gráfico



$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}} = \mathbb{A}_{\blacktriangle PAD} + \mathbb{A}_{\blacktriangle AQD} - \mathbb{A}_{\blacktriangle AHD}$$

$$120 = \frac{12\times12}{2} + \frac{12\times12}{2} - \frac{\cancel{12}\times a}{\cancel{2}}$$

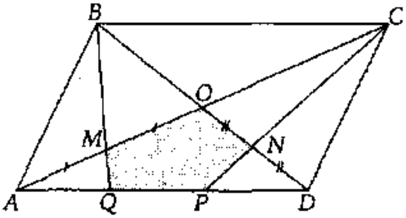
$6a=24 \ \rightarrow \ a=4$

$\therefore \ HM=12-a=8$ m

Clave E

PROBLEMA N.° 10

Siendo *ABCD* un paralelogramo; *AM*=*MO*, *ON*=*ND* y el área de *ABCD*=120 u^2, calcule el área de la región sombreada.



A) 30 u^2
B) 20 u^2
C) 10 u^2
D) 40 u^2
E) 50 u^2

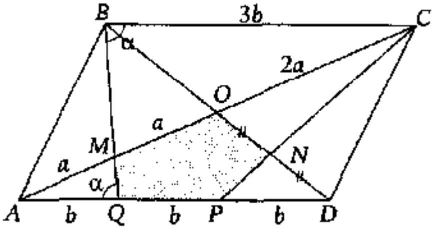
Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Datos:

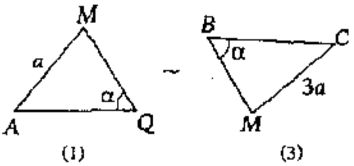
- Área de la región paralelográmica *ABCD*=120 u^2.
- *AM*=*MO*, *ON*=*ND*.

En el gráfico



- *O*: punto medio de $\overline{AC}$.
- m∢*AQB*=m∢*QBC*=*a*

Entonces

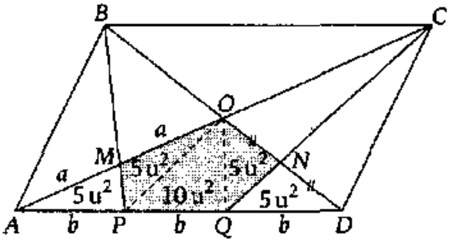


$\rightarrow \ \frac{AQ}{BC}=\frac{1}{3}$

- Análogamente $\frac{PD}{BC}=\frac{1}{3}$

  $\rightarrow AQ=QP=PD=b$

  Luego



- $\mathbb{A}_{\blacktriangle AOD}=\frac{1}{4}\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}=30\ \text{u}^2$
- Por relación de áreas

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle POQ}=\frac{1}{3}(30\ \text{u}^2)=10\ \text{u}^2$$

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle APM}=\mathbb{A}_{\blacktriangle MPO}=\frac{1}{2}(10\ \text{u}^2)=5\ m^2$$

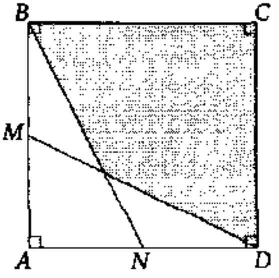
También $\mathbb{A}_{\blacktriangle OQN}=\mathbb{A}_{\blacktriangle QND}=5\ \text{m}^2$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=20\ \text{u}^2$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 11

Si *ABCD* es un cuadrado cuyo lado mide 30 m, *M* y *N* son puntos medios, calcule el área de la región sombreada.



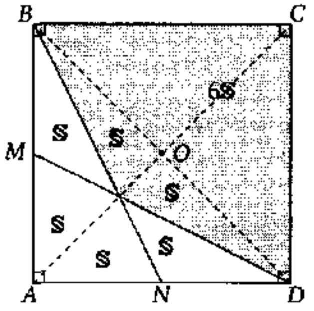
A) 600 cm² B) 300 cm² C) 400 cm²
D) 500 cm² E) 700 cm²

Resolución

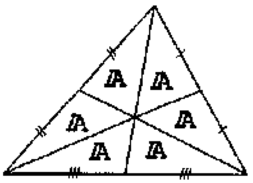
Datos:

- *ABCD*: cuadrado cuyo lado mide 30 cm.
- *M* y *N*: puntos medios.

En el gráfico



- Trazamos las diagonales del cuadrado y aprovechamos la propiedad



- En *ABCD*, *O* es centro del cuadrado y punto medio del lado *BD*.

  Luego

$$12\mathbb{S}=30^2\quad \text{(área de la región cuadrada)}$$

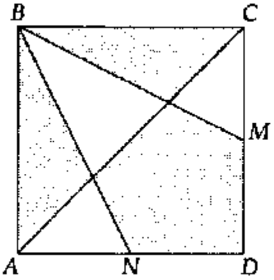
$$\mathbb{S}=\frac{900}{12}$$

$$\therefore\ 8\mathbb{S}=8\left(\frac{900}{12}\right)=600\ \text{cm}^2$$

Clave A

PROBLEMA N.° 12

Halle el área de la región sombreada, si *ABCD* es una región cuadrada de área 120 cm^2, *M* y *N* son puntos medios.



A) 20 cm^2
B) 40 cm^2
C) 60 cm^2
D) 80 cm^2
E) 70 cm^2

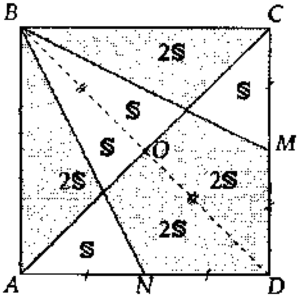
Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Se sabe que:

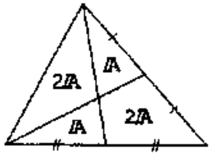
- $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}=120\ cm^2$
- *M* y *N*: puntos medios

En el gráfico



Recuerda

Propiedad



- Trazamos la diagonal *BD*.
- *O* es punto medio de $\overline{BD}$, aplicamos la propiedad.

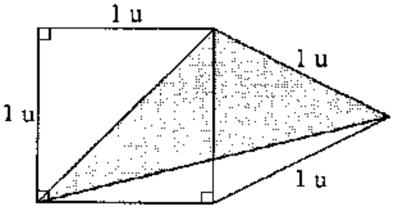
$$\rightarrow\ 12\mathbb{S}=120\ cm^2\ \text{(dato)}$$
$$\mathbb{S}=10\ cm^2$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}}=8\mathbb{S}=80\ cm^2$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 13

Calcule el área de la región sombreada, en:



A) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\ u^2$

B) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}\ u^2$

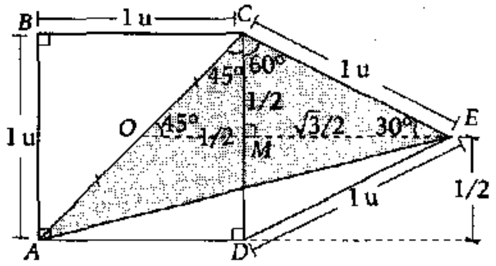
C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ u^2$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$

E) 1 u^2

Resolución

Se pide el área de la región sombreada.



- Trazamos $\overline{EO}$, donde O es centro del cuadrado y punto medio de $\overline{AC}$.

- ⊿*CME*(notable de 30° y 60°).

Luego

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = \mathbb{A}_{\blacktriangle AOE} + \mathbb{A}_{\blacktriangle OCE}$$

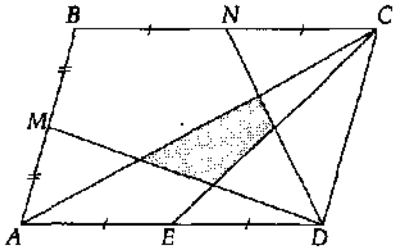
$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\times\frac{1}{2}}{2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\times\frac{1}{2}}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 14

En el gráfico, *M*, *N* y *E* son puntos medios de los lados del paralelogramo *ABCD* donde el área de la región que limita es 120 m^2, halle el área de la región sombreada.



A) 7 m^2
B) 8 m^2
C) 9 m^2
D) 10 m^2
E) 11 m^2

Resolución

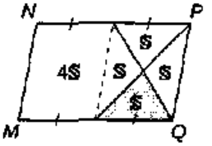
Se pide el área de la región sombreada: $\mathbb{S}$

Datos:

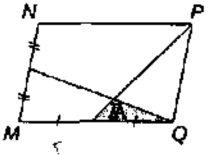
- $\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}=120\text{ m}^2$
- *M*, *N* y *E*: puntos medios

Recuerda

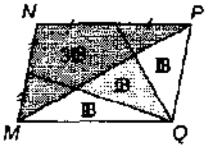
Si *MNPQ* es una región paralelográmica, se cumple que



$$\mathbb{S}=\frac{1}{8}\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}$$

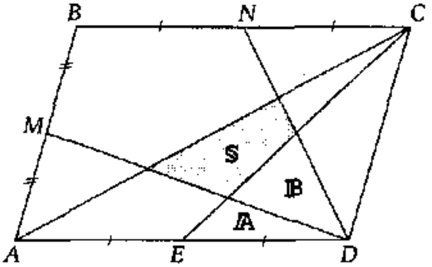


$$\mathbb{A}=\frac{1}{20}\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}$$



$$\mathbb{B}=\frac{1}{6}\mathbb{A}_{\blacksquare MNPQ}$$

En el problema, se pide $\mathbb{S}$.



En el gráfico

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}=\frac{1}{8}(120)=15\text{ m}^2$$

Pero

$$\mathbb{A}=\frac{1}{20}(120)=6\text{ m}^2$$

$$\rightarrow\ \mathbb{B}=9\text{ m}^2$$

Además

$$\mathbb{S}+\mathbb{B}=\frac{1}{6}(120)=20\text{ m}^2$$

$$\mathbb{S}+9=20\text{ m}^2$$

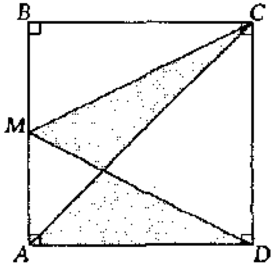
$$\therefore\ \mathbb{S}=11\text{ m}^2$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 15

En el gráfico se tiene un cuadrado *ABCD*. Si *M* es punto medio, ¿qué parte del total representa el área de la región sombreada?

A) 1/3
B) 1/4
C) 1/6
D) 1/10
E) 1/12



Resolución

Se pide

$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}}}{\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}\times 100\%$$

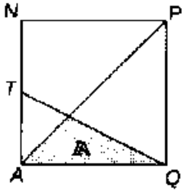
Datos

- *ABCD*: cuadrado
- *M*: punto medio de $\overline{AB}$

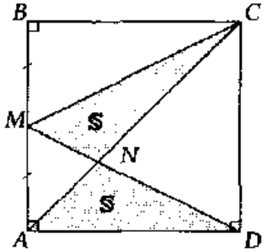
Recuerda

Si T: punto medio

$\rightarrow\ \mathbb{A}=\frac{1}{6}\times\mathbb{A}_{\square MNPQ}$



En el problema



- $\overline{AM}//\overline{CD}$.

  $\rightarrow$ ⏢*AMCD*: trapecio

  Además

  $$\mathbb{A}_{\blacktriangle AND}=\mathbb{A}_{\blacktriangle MCN}=\frac{1}{6}\mathbb{A}_{\text{total}}$$

- Sea $6\mathbb{S}=\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}$

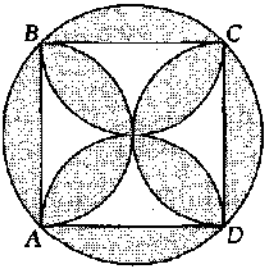
  Entonces

  $$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}}=\frac{2\mathbb{S}}{6\mathbb{S}}=\frac{1}{3}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 16

Si *ABCD* es un cuadrado cuyo lado mide 4 m, calcule el perímetro de la región sombreada.



A) $2(\sqrt{2}\pi+2\pi+4)$ m

B) $4(\sqrt{2}\pi+2\pi+4)$ m

C) $4(2\sqrt{2}\pi+\pi+4)$ m

D) $2(2\sqrt{2}\pi+2\pi+2)$ m

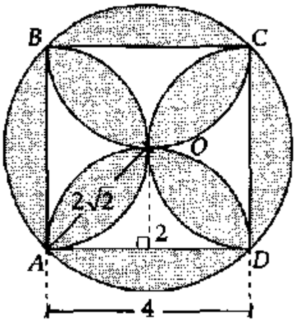
E) $3(4\sqrt{2}\pi+\pi+2)$ m

Resolución

Se pide el perímetro de la región sombreada.

Dato:

ABCD: cuadrado cuyos lados miden 4 m.



Del gráfico

$$\ell_{\overset{\frown}{AOB}}=\ell_{\overset{\frown}{AOD}}=\ell_{\overset{\frown}{DOC}}=\ell_{\overset{\frown}{COB}}=\frac{2\pi(2)}{2}=2\pi$$

Luego

Perímetro de la región sombreada

$$=\ell_{\odot r=2\sqrt{2}}+4(2\pi)+AB+BC+CD+DA$$

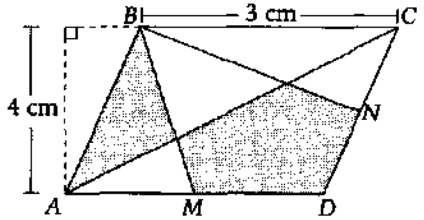
$$=2\pi(2\sqrt{2})+8\pi+4(4)$$

Por lo tanto, el perímetro de la región sombreada es $4(\sqrt{2}\pi+2\pi+4)$ m.

Clave B

PROBLEMA N.° 17

En el paralelogramo, *M* y *N* son puntos medios. Calcule el área de la región sombreada.



A) 10 cm^2

B) 8 cm^2

C) 6 cm^2

D) 12 cm^2

E) 9 cm^2

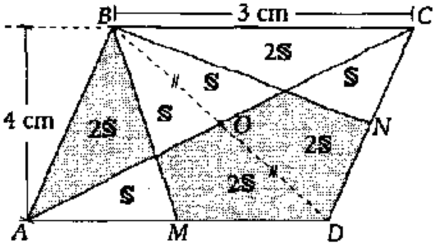
Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Datos:

- *ABCD*: paralelogramo
- *M* y *N*: puntos medios

En el gráfico



- Trazamos la diagonal *BD*.
  → *O* es punto medio de *BD*.
- Por propiedad, se determinan las regiones indicadas.
- Área de la región *ABCD*

$$12\mathbb{S}=(3\text{ cm})(4\text{ cm})$$

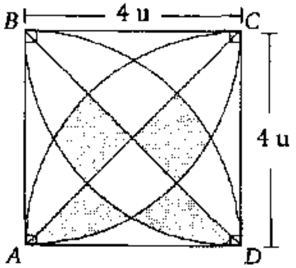
$$\mathbb{S}=1\text{ cm}^2$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}}=6\mathbb{S}=6\text{ cm}^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

Calcule el área de la región sombreada.

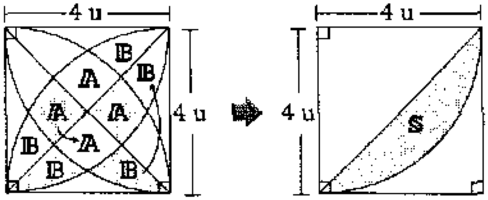


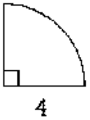
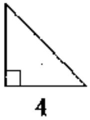
A) $2(\pi-4)\text{ u}^2$
B) $3(2\pi-1)\text{ u}^2$
C) $6(\pi-2)\text{ u}^2$
D) $4(\pi-2)\text{ u}^2$
E) $(\pi-4)\text{ u}^2$

Resolución

Se pide el área de la región sombreada: $\mathbb{S}$.

En el gráfico, por la simetría que presenta, encontramos regiones equivalentes, por ello, realizaremos algunos traslados de regiones.



$\mathbb{S}=4$  − 4 

$$\mathbb{S}=\frac{\pi(4)^2}{\cancel{4}}-\frac{4\times\overset{2}{\cancel{4}}}{2}$$

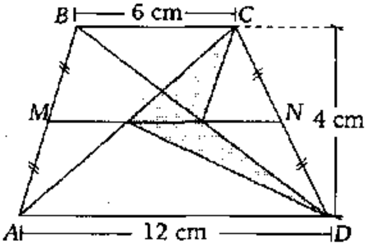
$$\mathbb{S}=4\pi-8$$

$$\therefore\ \mathbb{S}=4(\pi-2)$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

Calcule el área de la región sombreada, si $\overline{MN}$ es la base media del trapecio *ABCD*.



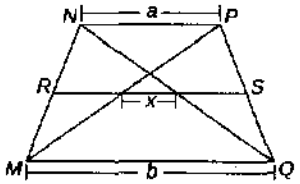
A) 5 cm^2
B) 9 cm^2
C) 8 cm^2
D) 7 cm^2
E) 6 cm^2

Resolución

Se sabe que

- $\overline{MN}$: base media del trapecio *ABCD*.

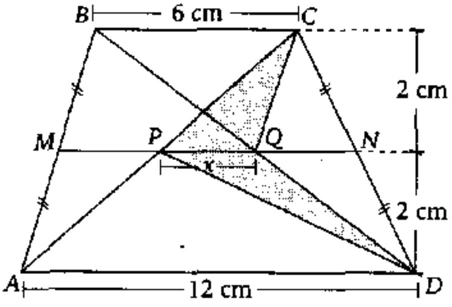
Recuerda



Si *MNPQ*: trapecio, además, *R* y *S* son puntos medios, se cumple que

$$\boxed{x=\frac{b-a}{2}}$$

En el problema



- $$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = \mathbb{A}_{\blacktriangle PCQ} + \mathbb{A}_{\blacktriangle PDQ}$$

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = \frac{x\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} + \frac{x\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = 2x \quad (\text{en cm}^2)$$

- Pero, por propiedad

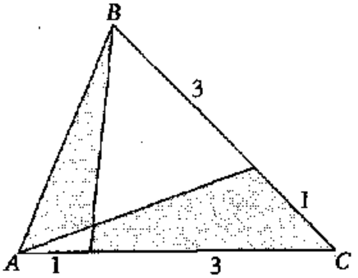
$$x=\frac{12-6}{2}=3\text{ cm}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = 2x = 6\text{ cm}^2$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 20

Halle la razón entre las áreas de las dos regiones sombreadas.

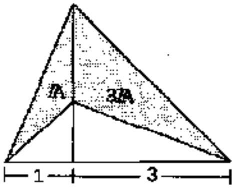


A) 1
B) 1/2
C) 1/3
D) 2/3
E) 1/4

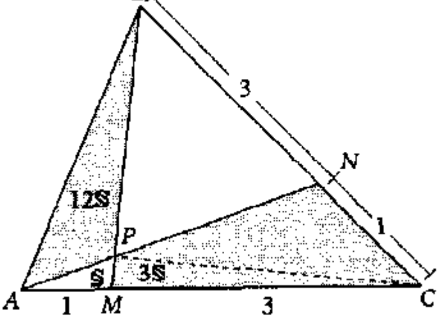
Resolución

Se pide la razón entre las áreas de las dos regiones sombreadas.

Recuerda



En el gráfico



- Trazamos $\overline{CP}$ de tal manera que

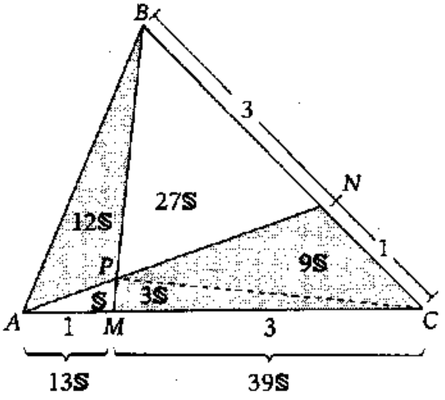
$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle APC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABP}}=\frac{1}{3} \qquad \text{(I)}$$

También, $\dfrac{\mathbb{A}_{\blacktriangle APM}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MPC}}=\dfrac{1\times\mathbb{S}}{3\times\mathbb{S}}$

- Reemplazamos en (I)

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABP}=12\mathbb{S}$$

Solo falta determinar las áreas en los $\triangle CPN$ y $\triangle PBN$.



- De la relación indicada (1 a 3)

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABM}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle MBC}}=\frac{13\mathbb{S}}{39\mathbb{S}}$$

- $\mathbb{A}_{\blacktriangle CPN}+\mathbb{A}_{\blacktriangle PBN}=36\mathbb{S}$

$\rightarrow\ 1(9\mathbb{S})+3(9\mathbb{S})=4(9\mathbb{S})$

Luego

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABP}+\mathbb{A}_{\blacksquare MPNC}=12\mathbb{S}$$

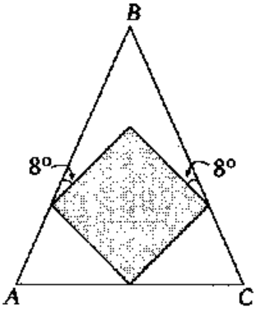
$$\therefore\ \frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABP}}{\mathbb{A}_{\blacksquare MPNC}}=1$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 21

Calcule el área de la región cuadrada sombreada, si sabemos que se trata de un cuadrado, y el triángulo *ABC* es isósceles.
Donde *AB*=*BC*=35 m.

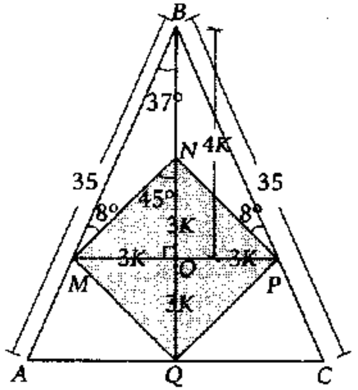
A) 290 m^2
B) 250 m^2
C) 200 m^2
D) 244 m^2
E) 288 m^2



Resolución

Se pide el área de la región cuadrada.
Dato:

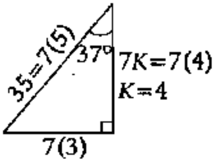
ABC: triángulo isósceles, *AB*=*BC*=35 m



En el gráfico

- Trazamos las diagonales del cuadrado *MNPQ*, prolongando $\overline{QN}$ hasta el vértice *B*,
  m∢*MNQ*=45° → m∢*MBQ*=37°
- ◺*MOB*: notable (37° y 53°)
  → $MO=3K\ \wedge\ OB=4K$

- Como *MNPQ*: cuadrado, entonces,
  $MO=OQ=OP=ON=3K$
- En el $\triangle AQB$



Finalmente, la diagonal del cuadrado *MNPQ*: $MP=NQ=6K=24$

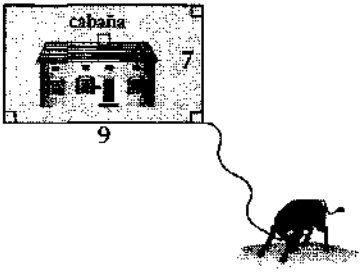
$$\mathbb{A}_{\blacksquare}=\frac{(\text{diagonal})^2}{2}=\frac{24^2}{2}$$

$\therefore\ \mathbb{A}_{\blacksquare}=288\ \text{m}^2$

Clave E

PROBLEMA N.° 22

Un buey está atado a un poste en la esquina de la cabaña rectangular que se muestra en el diagrama; la cabaña tiene un largo de 9 m y un ancho de 7 m, y la cuerda es de 10 m. El área, en m^2, donde puede pastar el buey, es

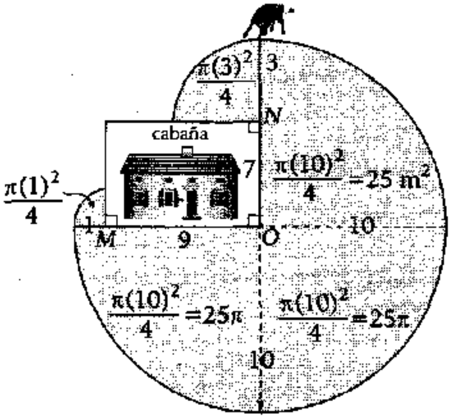


A) $80\pi\ \text{m}^2$ B) $76,2\pi\ \text{m}^2$ C) $77,5\pi\ \text{m}^2$
D) $85,5\pi\ \text{m}^2$ E) $90\pi\ \text{m}^2$

Resolución

Se pide el área de la región donde puede pastar un buey.

En el gráfico, con la cuerda de 10 m se determina la región donde puede pastar el buey.



$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región donde puede}\\ \text{pastar el buey}}}=3(25\pi)+\frac{\pi(3)^2}{4}+\frac{\pi}{4}$$

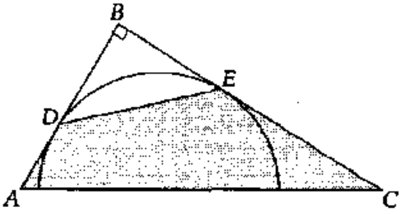
$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región donde puede}\\ \text{pastar el buey}}}=75\pi\ \text{m}+\frac{10}{4}\pi$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región donde puede}\\ \text{pastar el buey}}}=77,5\pi\ \text{m}^2$$

Clave C

PROBLEMA N.° 23

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada si: $AD=4$ cm y $EC=9$ cm. Además, *D* y *E* son puntos de tangencia.



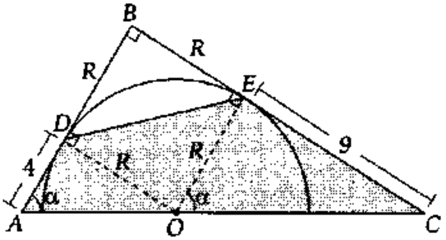
A) 49 cm^2 B) 50 cm^2 C) 57 cm^2
D) 55 cm^2 E) 60 cm^2

Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Datos:

- $AD=4$ cm y $EC=9$ cm.
- D y E son puntos de tangencia.



Del gráfico

- Se traza $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$

  → $DBEO$: cuadrado

- $\overline{OE}//\overline{AB}$

  → $m\sphericalangle BAO = m\sphericalangle EOC$

- $\triangle ADO \sim \triangle OEC$

  $$\rightarrow \quad \tan\alpha=\frac{R}{4}=\frac{9}{R} \quad \rightarrow \quad R=6$$

Luego

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=\mathbb{A}_{\triangle ABC}-\mathbb{A}_{\triangle DBE}$$

$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=\frac{(4+R)(9+R)}{2}-\frac{R\times R}{2}$$

Reemplazamos $R=6$

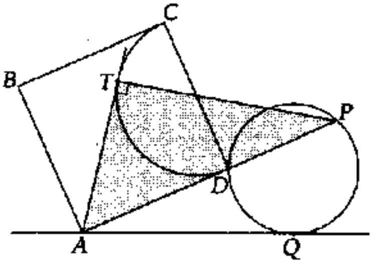
$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=\frac{10\times 15}{2}-\frac{6\times 6}{2}$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=57\text{ cm}^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 24

En el gráfico, calcule el área de la región sombreada si $AQ=10$ cm; $ABCD$ es un cuadrado, T y Q; puntos de tangencia; y $\overline{CD}$, diámetro.

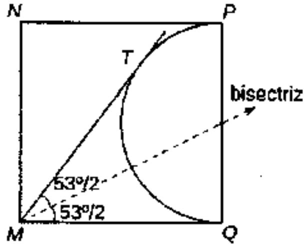


A) 50 cm^2
B) 30 cm^2
C) 45 cm^2
D) 36 cm^2
E) 40 cm^2

Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Recuerda



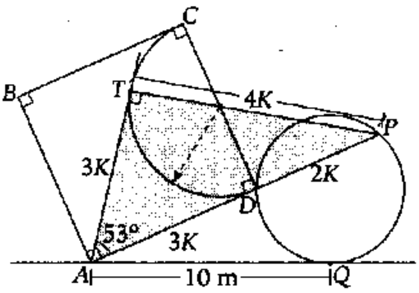
Si *MNPQ*: cuadrado y

T: punto de tangencia,

entonces, m∢*TMQ*=53°

De los datos, se tiene que:

- *ABCD*: cuadrado
- *T* y *Q*: puntos de tangencia.



En el gráfico

$m\sphericalangle TAD=53°$; entonces,

$AD=AT=3K$

$TP=4K$

$AP=5K$

Por teorema de la tangente calcularemos el valor de *K*.

$$AQ^2=AP\times AD$$

$$\cancel{10}^{\cancel{2}}=\cancel{5}K\times 3K \rightarrow 3K^2=20$$

Luego

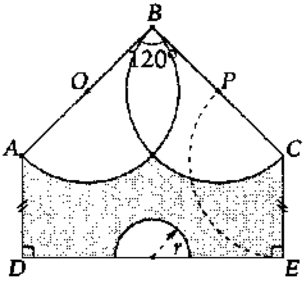
$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=\frac{3K\times 4K}{2}=6K^2$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=2(20)=40\text{ cm}^2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

Calcule el perímetro de la región sombreada. Si *O*, *P* y *C* son centros de circunferencias de radio igual a 3, $r=1$; $m\sphericalangle ABC=120°$.



A) $4\pi+5+6\sqrt{3}$

B) $4\pi+4+6\sqrt{3}$

C) $2\pi+3+4\sqrt{3}$

D) $5\pi+4+6\sqrt{3}$

E) $2\pi+6+4\sqrt{3}$

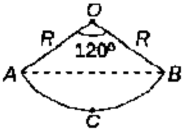
Resolución

Se pide el perímetro de la región sombreada.

Datos:

- *O*, *P* y *C* son centros de circunferencias de radio=3.
- $m\sphericalangle ABC=120°$ y $r=1$.

Recuerda

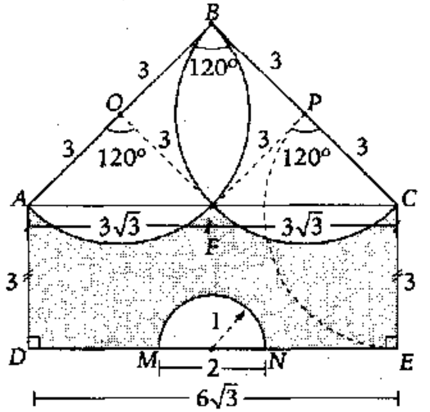


Se cumple que

$$AB=R\sqrt{3}$$

$$\ell_{\overset{\frown}{ACB}}=\frac{2\pi R}{3}$$

En el problema



Trazamos $\overline{OF}$ y $\overline{PF}$, de donde,

$$m\sphericalangle AOF=m\sphericalangle FPC=120°$$

Por propiedad

$$AF=FC=3\sqrt{3}$$

$$\rightarrow\ DE=6\sqrt{3}$$

Además

$$\ell_{\overset{\frown}{AF}}=\ell_{\overset{\frown}{FC}}=\frac{2\pi(3)}{3}=2\pi$$

Luego

$$\ell_{\overset{\frown}{MN}}=\pi \text{ y } AD=CE=3$$

Finalmente

$$\begin{matrix}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{matrix}=AD+(DE-2)+CE+\ell_{\overset{\frown}{MN}}+\ell_{\overset{\frown}{AF}}+\ell_{\overset{\frown}{FC}}$$

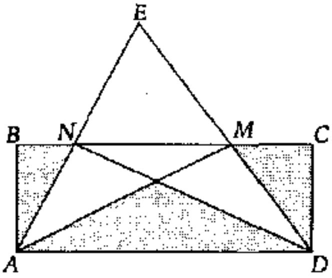
$$\begin{matrix}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{matrix}=3+(6\sqrt{3}-2)+3+\pi+2\pi+2\pi$$

$$\therefore\ \begin{matrix}\text{perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{matrix}=5\pi+4+6\sqrt{3}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 26

Si *ABCD* es un rectángulo y el área de la región que limita es 36 m^2, calcule el área de la región sombreada. Además, *AN*=*NE* y *EM*=*MD*.



A) 18 m^2
B) 24 m^2
C) 23 m^2
D) 20 m^2
E) 21 m^2

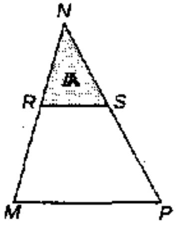
Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Datos:

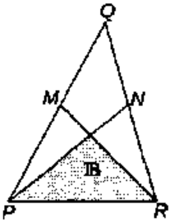
- *ABCD*: rectángulo cuya área de la región que limita es 36 m^2.
- *AN*=*NE* y *EM*=*MD*.

Recuerda



Si *R* y *S* son puntos medios, se cumple que:

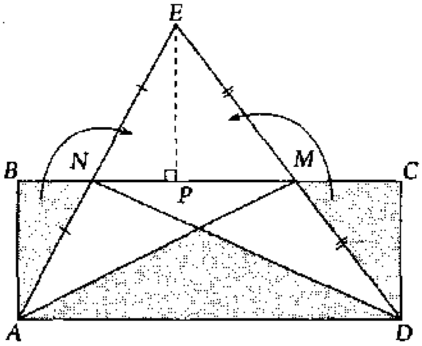
$$\boxed{\mathbb{A}=\frac{1}{4}(\mathbb{A}_{\blacktriangle MNP})}$$



Si *M* y *N* son puntos medios, se cumple que:

$$\boxed{\mathbb{B}=\frac{1}{3}(\mathbb{A}_{\blacktriangle PQR})}$$

En el gráfico

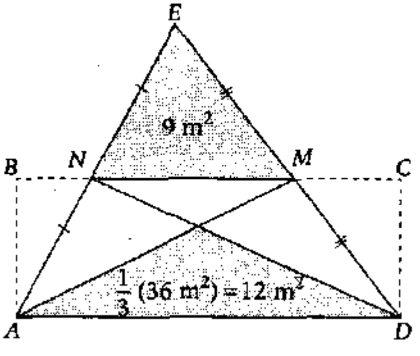


Trazamos $\overline{EP} \perp \overline{NM}$

→ ⊾*ABN* ≅ ⊾*NPE* y
⊾*MCD* ≅ ⊾*EPM*

Hacemos traslado de regiones, como se indica en el gráfico.

$$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\square ABCD}=\mathbb{A}_{\triangle AED}=36\ \text{m}^2$$



Luego

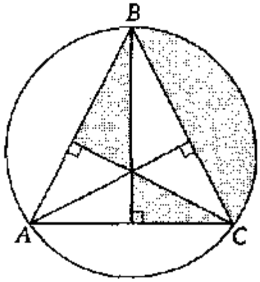
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle NEM}=\frac{1}{4}\mathbb{A}_{\blacktriangle AED}=9\ \text{m}^2$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}=9+12=21\ \text{m}^2$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 27

Calcule la razón entre el área de la región sombreada y el área del círculo ($\triangle ABC$ es equilátero).



A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4
D) 2/3 E) 1/5

Resolución

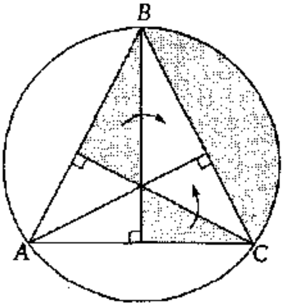
Se pide

$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}}}{\mathbb{A}_{\text{círculo}}}$$

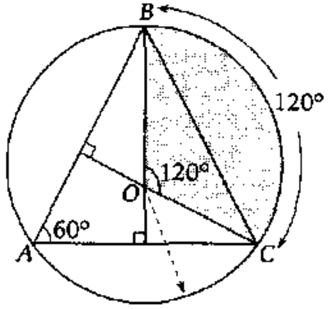
Dato:

$\triangle ABC$: equilátero

En el gráfico



Las 6 regiones triangulares en el $\triangle ABC$ son equivalentes (tienen igual área), entonces, realizamos el traslado de regiones.



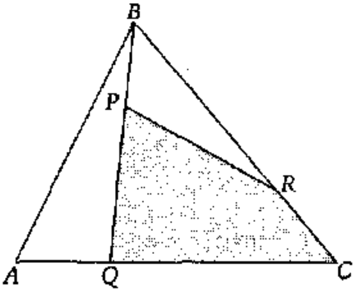
Luego, $\triangleleft BOC$ es un sector circular de 120° de ángulo central (1/3 de 360°).

$$\therefore \quad \frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}}}{\mathbb{A}_{\text{círculo}}}=\frac{1}{3}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 28

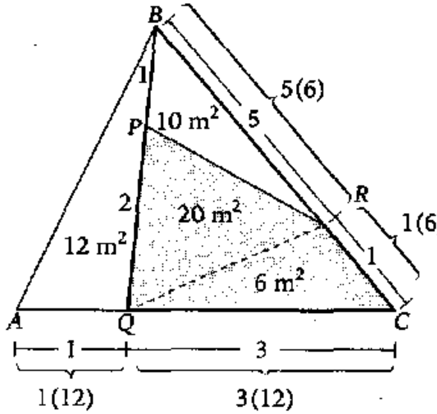
Si $\mathbb{S}_{ABQ}=12\text{ m}^2$; $AC=4(AQ)$; $BC=6(RC)$; $BQ=3(BP)$, calcule el área de la región sombreada.



A) 28 m^2
B) 26 m^2
C) 20 m^2
D) 25 m^2
E) 27 m^2

Resolución

Se pide el área de la región sombreada.
De los datos, se tiene en el gráfico lo siguiente:



- Por las relaciones de áreas, se tiene

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle ABQ}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle QBC}}=\frac{1\times 12}{3\times 12}$$

- **En $\triangle QBC$, trazamos $\overline{QR}$**

$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle QRC}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle QBR}}=\frac{1(6)}{5(6)}\Big]\text{suma}=36$$

- En $\triangle QBR$

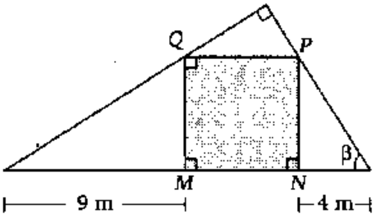
$$\frac{\mathbb{A}_{\blacktriangle PBR}}{\mathbb{A}_{\blacktriangle QPR}}=\frac{1(10)}{2(10)}\Big]\text{suma}=30$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}}=26\text{ m}^2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 29

En el gráfico adjunto, calcule el área de la región cuadrada *MNPQ*.

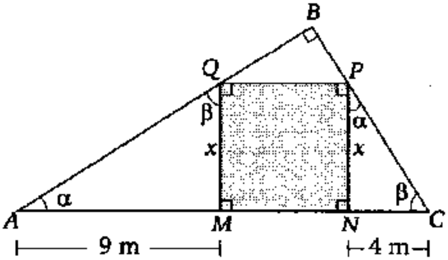


A) 36 m^2 B) 49 m^2 C) 32 m^2

D) 25 m^2 E) 20 m^2

Resolución

Se pide el área de la región cuadrada *MNPQ*: x^2.



En el gráfico

- Sea x: longitud del lado del cuadrado *MNPQ*.
- Ángulos α y β son complementarios.
- $\triangle AMQ \sim \triangle PNC$

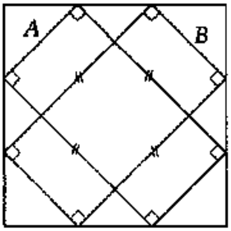
$$\rightarrow \tan\alpha = \frac{x}{9} = \frac{4}{x}$$

$\therefore\ x^2=36$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 30

En el gráfico se muestra un cuadrado, entonces, la razón de los perímetros de las regiones rectangulares inscritas será



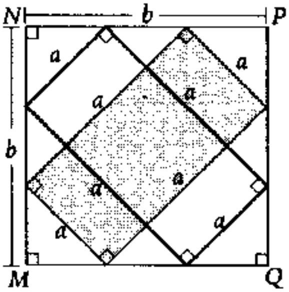
A) 1 B) 2/3 C) 1/2

D) 3/4 E) 5/6

Resolución

Se pide la razón de los perímetros de las regiones rectangulares: *R*.

Por dato, *MNPQ* es un cuadrado.



En el gráfico, ambos rectángulos, el sombreado y el resaltado, son congruentes (uno ha rotado 90° con respecto al otro).

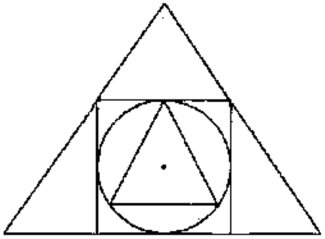
Luego, al ser congruentes, ambos rectángulos tienen igual perímetro.

$\therefore\ R=1$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 31

El gráfico muestra dos triángulos equiláteros, un cuadrado y una circunferencia. Si el lado del triángulo equilátero mayor mide $(4+2\sqrt{3})$ u, calcule el perímetro de la región que limita el triángulo equilátero menor.



A) 12 u B) 10 u C) 9 u
D) 14 u E) 15 u

Resolución

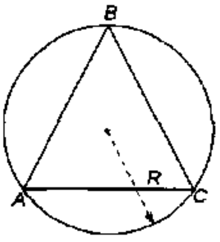
Se pide el perímetro de la región triangular menor.

Datos:

- *ABCD*: cuadrado
- $\triangle MNP$ y $\triangle XYZ$: equiláteros

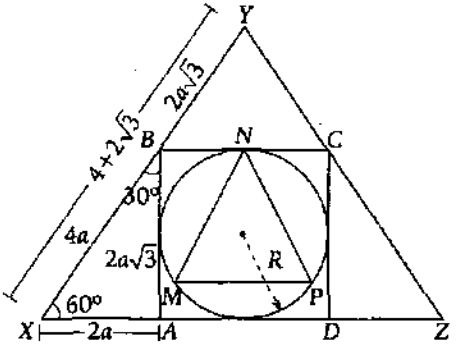
Recuerda

Si *ABC*: triángulo equilátero, se cumple que



$$\boxed{AB=BC=AC=R\sqrt{3}}$$

En el gráfico



- En $\triangle XAB$ (notable: 30° y 60°), si $XA=2a$

  $\rightarrow \quad AB=2a\sqrt{3}$ y $XB=4a$

- En $\triangle XYZ$

  $4a+2a\sqrt{3}=4+2\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad a=1$

- En el $\square ABCD$

  $BC=2\sqrt{3}=2R \quad \rightarrow \quad R=\sqrt{3}$

- En $\triangle MNP$

  $MN=R\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad MN=3$

Luego

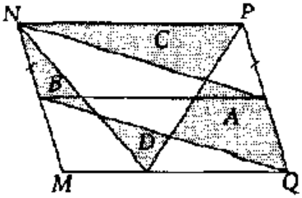
perímetro $\triangle MNP=3(3)=9$ u

Clave **C**

PROBLEMA N.° 32

Si: *MNPQ* es un paralelogramo, halle el área *D* teniendo en cuenta que $A=8$ m^2; $B=2$ m^2; C=9 m^2.

A) 4 m^2
B) 0,5 m^2
C) 3 m^2
D) 2 m^2
E) 1 m^2



Resolución

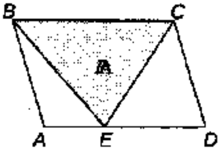
Se pide el valor de D en m^2.

Datos:

- *MNPQ*: paralelogramo
- $A=8\text{ m}^2$; $B=2\text{ m}^2$ y $C=9\text{ m}^2$

Recuerda

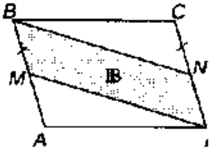
Si *ABCD*: paralelogramo



Se cumple

$$\boxed{\mathbb{A}=\frac{1}{2}\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}$$

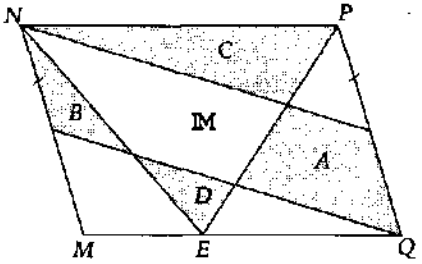
Si *ABCD*: paralelogramo y $\overline{MN}//\overline{AD}$



Se cumple

$$\boxed{\mathbb{B}=\frac{1}{2}\mathbb{A}_{\blacksquare ABCD}}$$

En el problema



Se cumple que

$$A+\cancel{\mathbb{M}}+B=C+\cancel{\mathbb{M}}+D$$

Reemplazamos los datos

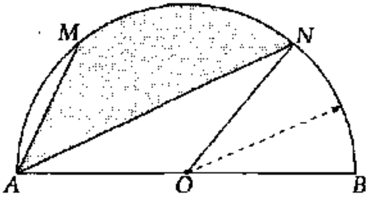
$$8+2=9+D$$

$\therefore\ D=1\text{ m}^2$

Clave E

PROBLEMA N.° 33

En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubican los puntos M y N de modo que $m\overset{\frown}{AM}=54°$ y $m\overset{\frown}{MN}=72°$. Si $AB=10$ m, halle el área de la región sombreada.



A) $3\pi\text{ m}^2$
B) $4\pi\text{ m}^2$
C) $5\pi\text{ m}^2$
D) $10\pi\text{ m}^2$
E) $15\pi\text{ m}^2$

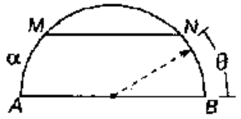
Resolución

Se pide el área de la región sombreada.

Datos:

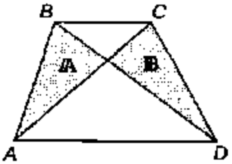
$$m\overset{\frown}{AM}=54°,\ m\overset{\frown}{MN}=72°\text{ y }AB=10\text{ m}.$$

Recuerda



Si α=θ

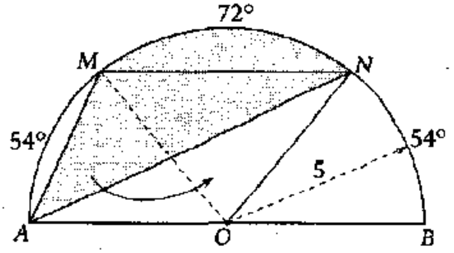
$\rightarrow\ \boxed{\overline{MN}//\overline{AB}}$



Si *ABCD*: trapecio

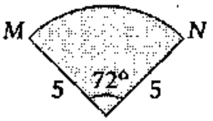
$\rightarrow\ \boxed{\mathbb{A}=\mathbb{B}}$

En el gráfico



- Se deduce que $m\overset{\frown}{NB} = 54°$.

  $\rightarrow\ \overline{MN}//\overline{AB}$
- Trazamos $\overline{ON}$, donde *AMNO*: trapecio.
- En ⏢*AMNO*, trasladamos la región que se indica en el gráfico y se obtiene



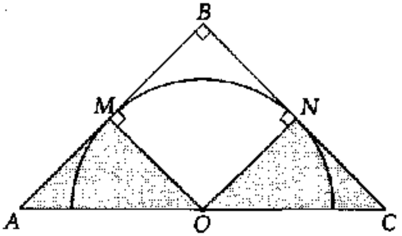
$$\mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = \frac{\pi(5)^2\times 72°}{360°}$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\ \text{sombreada}}} = 5\pi\ \text{m}^2$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 34

En el gráfico mostrado, *O* es centro, $AB=2(AM)$, *M* y *N* son puntos de tangencia y el área de la región *ABC* es $\mathbb{S}$. Calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



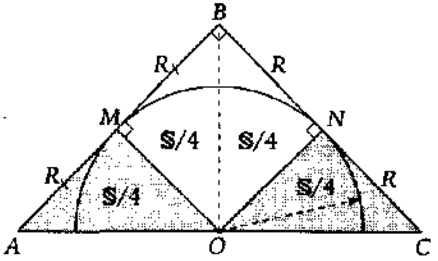
A) $\mathbb{S}/2$
B) $\mathbb{S}/3$
C) $\mathbb{S}/4$
D) $\mathbb{S}/6$
E) $\mathbb{S}/8$

Resolución

Se pide la suma de las áreas de las regiones sombreadas.

Datos:

- Área de la región triangular $ABC=\mathbb{S}$.
- $AB=2(AM)$; *M* y *N* son puntos de tangencia.



Del dato:

$AM=MB\ \rightarrow\ \overline{MO}$ es base media

$\rightarrow\ BC=2MO\ \wedge\ AO=OC$

Luego,

se traza $\overline{BO}$, entonces

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AOB}=\mathbb{A}_{\blacktriangle BOC}=\mathbb{S}/2$$

Por relación de áreas

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle AMO}=\mathbb{A}_{\blacktriangle BMO}=\mathbb{A}_{\blacktriangle BON}=\mathbb{A}_{\blacktriangle NOC}=\mathbb{S}/4$$

Por lo tanto, la suma de las áreas de las regiones sombreadas es

$$2\left(\frac{\mathbb{S}}{4}\right)=\frac{\mathbb{S}}{2}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 35

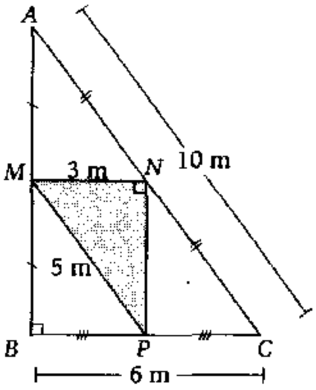
Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo rectángulo *ABC* se obtiene un triángulo rectángulo cuyo cateto e hipotenusa miden 3 m y 5 m respectivamente. El área de la región que limita el triángulo *ABC* es

A) 32 m^2 B) 30 m^2 C) 24 m^2
D) 48 m^2 E) 36 m^2

Resolución

Se pide el área de la región triangular *ABC*.

Del enunciado, graficamos



Por ser *M*, *N* y *P* puntos medios

$\rightarrow$ $AC=2(5\text{ m})=10\text{ m}$ y $BC=2(3\text{ m})=6\text{ m}$

Por teorema de Pitágoras

$AB^2+6^2=10^2$

$\rightarrow$ $AB=8$

Finalmente

$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\frac{6\times AB}{2}=24\text{ m}^2$$

Clave C

PROBLEMA N.° 36

En un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes de 50 m y 120 m, se inscribe un rectángulo que tiene dos de sus lados contenidos por los catetos y uno de sus vértices está en la hipotenusa. Determine el área máxima de dicho rectángulo.

A) 1200 m^2
B) 1500 m^2
C) 1750 m^2
D) 2000 m^2
E) 2500 m^2

Resolución

Se pide el área máxima de un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo: $\mathbb{S}_{\text{máx}}$

Recuerda

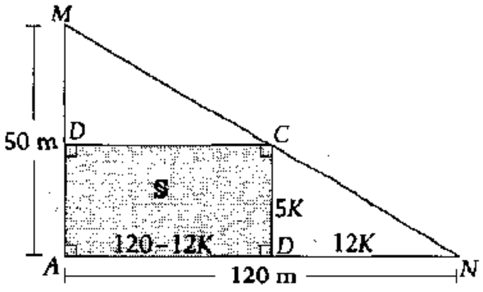
Sea *a* un número (constante) y *x* una variable, se cumple que

$$\boxed{\text{Máximo valor de } x(a-x)=\frac{a^2}{4}}\text{, cuando } x=\frac{a}{2}$$

Nótese que el valor de $x=\frac{a}{2}$

resulta de: $\frac{1}{2}[x+(a-x)]$

De los datos del problema, graficamos



Del gráfico

$$\mathbb{S}=5K(120-12K)$$

$$\mathbb{S}=5K\times 12(10-K)$$

$$\mathbb{S}=60\times\underbrace{K(10-K)}_{\substack{\text{lo que}\\ \text{debemos}\\ \text{maximizar}}} \qquad \text{(I)}$$

$$\rightarrow\quad K=\frac{1}{2}\left[\cancel{K}+(10-\cancel{K})\right]=\underbrace{5}_{\substack{\text{Valor que toma}\\ K\text{ para maximizar}\\ \text{la expresión}}}$$

Reemplazamos en (I)

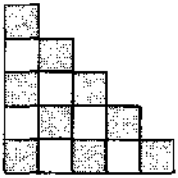
$$\mathbb{S}_{\text{máx}}=60\times 5(10-5)$$

$$\therefore\quad \mathbb{S}_{\text{máx}}=1500\ \text{m}^2$$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 37

¿Qué tanto por ciento del área total representa la suma de las áreas de las regiones no sombreadas? (todos los cuadraditos son iguales).



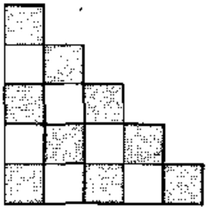
A) 50% B) 60% C) 80%
D) 90% E) 40%

Resolución

Se pide

$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{regiones no}\\ \text{sombreadas}}}}{\mathbb{A}_{\text{total}}}\times 100\%$$

En el gráfico



N.° de cuadraditos no sombreados: 6
N.° total de cuadraditos: 15

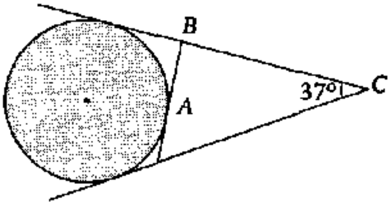
$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{regiones no}\\ \text{sombreadas}}}}{\mathbb{A}_{\text{total}}}\times 100\%=\frac{6}{15}\times 100\%$$

$$\frac{\mathbb{A}_{\substack{\text{regiones no}\\ \text{sombreadas}}}}{\mathbb{A}_{\text{total}}}=40\%$$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 38

Halle el área de la región sombreada si $AB+BC=24$ m.



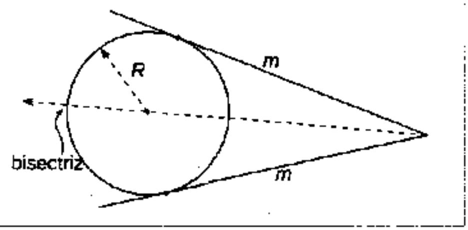
A) $64\pi\ \text{m}^2$
B) $36\pi\ \text{m}^2$
C) $48\pi\ \text{m}^2$
D) $81\pi\ \text{m}^2$
E) $16\pi\ \text{m}^2$

Resolución

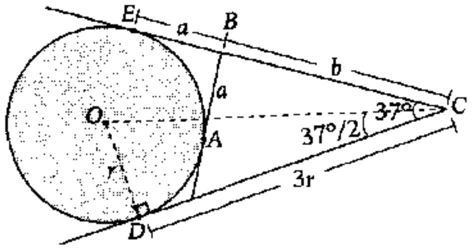
Se pide el área de la región sombreada.

Dato: $AB+BC=24$ m

Recuerda



En el gráfico, para calcular lo que se pide es necesario conocer r, para ello hacemos lo siguiente:



- Trazamos $\overline{OC}$: bisectriz del ∢ECD; donde O es centro.
- E y D son puntos de tangencia, entonces, trazamos $\overline{OD}$ y ⊾ODC es notable (37°/2).

$$\rightarrow \quad OD=r \text{ y } DC=3r$$

Del dato:

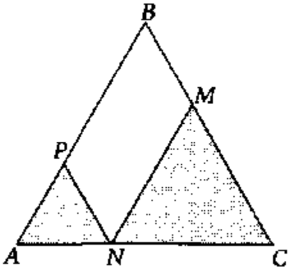
$$AB+BC=24$$
$$\underbrace{a+b}=24$$
$$EC=24$$
$$3r=24 \quad \rightarrow \quad r=8$$

$$\therefore \quad \mathbb{A}_{\substack{\text{región}\\\text{sombreada}}} = \pi r^2 = 64\pi \text{ m}^2$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 39

En el triángulo equilátero ABC, $\overline{PN}//\overline{BC}$ y $\overline{MN}//\overline{AB}$, cuál es la razón entre el perímetro de la superficie sombreada y el perímetro de la superficie no sombreada.



A) 1/2 B) 3/2 C) 2/3
D) 1/4 E) 1/3

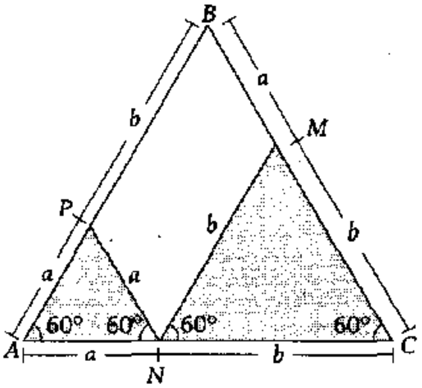
Resolución

Se pide

$$\frac{\text{Perímetro de la región sombreada}}{\text{Perímetro de la región no sombreada}}$$

Datos:

- $\triangle ABC$: equilátero.
- $\overline{PN}//\overline{BC}$ y $\overline{MN}//\overline{AB}$



En el gráfico, m$\sphericalangle PAN=60°$ y

$\overline{MN}//\overline{BA} \rightarrow$ m$\sphericalangle MNC=60°$

De manera análoga m$\sphericalangle ANP=60°$

Luego

$AN=NP=AP=a$ y
$MN=NC=MC=b$

Entonces

$$\frac{\text{Perímetro reg. sombreada}}{\text{Perímetro reg. no sombreada}}=\frac{3a+3b}{2a+2b}$$

$$\frac{\text{Perímetro reg. sombreada}}{\text{Perímetro reg. no sombreada}}=\frac{3(\cancel{a+b})}{2(\cancel{a+b})}$$

$$\therefore\ \frac{\text{Perímetro reg. sombreada}}{\text{Perímetro reg. no sombreada}}=\frac{3}{2}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 40

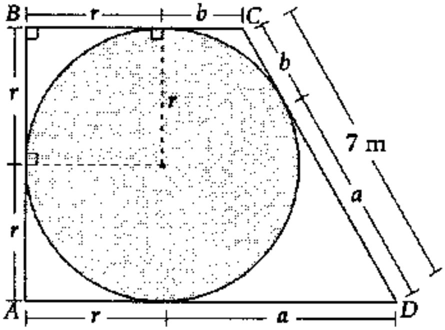
En un trapecio rectángulo, el perímetro es 18 m y el lado mayor no paralelo es 7 m. Calcule el área de la región que limita la circunferencia inscrita en este trapecio.

A) π^2 m^2
B) π m^2
C) $\pi^2/2$ m^2
D) $\pi/2$ m^2
E) 4π m^2

Resolución

Se pide el área de la región circular inscrita en el trapecio.

De los datos, graficamos lo siguiente



Aquí es necesario solo conocer r para hallar luego el área de la región circular.

Perímetro del trapecio $ABCD=18$(dato)

$$2r+(r+b)+(a+b)+(r+a)=18$$

$$4r+2(a+b)=18$$

$$2r+\underbrace{a+b}_{7}=9$$

$$\rightarrow\ r=1$$

$$\therefore\ \mathbb{A}_{\odot}=\pi(1)^2=\pi\ \text{m}^2$$

Clave B

Capítulo

19

Introducción a la Geometría analítica

Existe cierta controversia sobre la verdadera paternidad de esta rama de la matemática. Lo único cierto es que se publicó por primera vez como "Geometría analítica", apéndice al *Discurso del método,* de Descartes. Si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de esta publicación, el nombre de geometría analítica corrió de la mano con el de geometría cartesiana, y ambos son indistinguibles. Hoy en día, paradójicamente, se prefiere denominar geometría analítica no solo a la geometría cartesiana, sino también a todo el desarrollo posterior de la geometría que se base en la construcción de ejes coordenados y la descripción de las figuras mediante funciones.

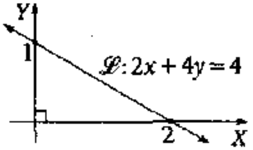
Capítulo 19

Introducción a la Geometría analítica

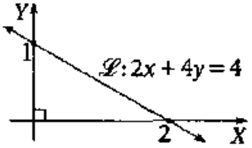
PROBLEMA N.° 1

Dada la recta $\mathscr{L}$: $2x+4y=4$, halle su pendiente y su gráfica.

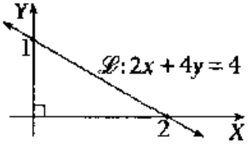
A) $m=-\frac{7}{2}$



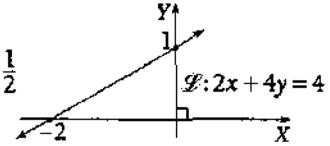
B) $m=-\frac{1}{2}$



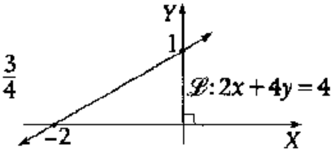
C) $m=\frac{1}{2}$



D) $m=-\frac{1}{2}$



E) $m=\frac{3}{4}$



Resolución

Piden hallar la pendiente y la gráfica de la ecuación.

Sea la recta $\mathscr{L}$: $2x+4y-4=0$

Recuerda

$\mathscr{L}$: $ax+by+c=0 \rightarrow m=\frac{-a}{b}$

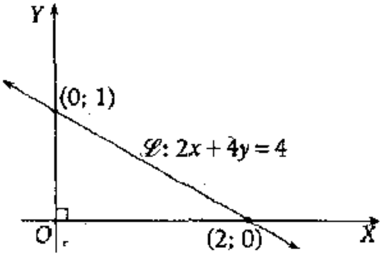
En la ecuación dada

$$m=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

Determinamos dos puntos de paso:

x	y
0	1
2	0

Entonces, los puntos de paso son (0; 1) y (2; 0). Graficando tenemos



Clave B

PROBLEMA N.° 2

Si $\mathscr{L}: 3x+4y=2$, halle la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$ perpendicular a $\mathscr{L}$ y que pase por el punto $(4; 2)$.

A) $4x-3y+10=0$
B) $4x+3y-10=0$
C) $4x+3y+10=0$
D) $4x-3y-10=0$
E) $5x-3y+10=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}$

Se conoce que $\mathscr{L}: 3x+4y=2 \rightarrow m_{\mathscr{L}}=\dfrac{-3}{4}$

Por dato: $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L} \rightarrow m_{\mathscr{L}_1} \times m_{\mathscr{L}}=-1$

$$m_{\mathscr{L}_1}=\frac{4}{3}$$

Además, el punto de paso de $\mathscr{L}_1$ es $(\overset{x_0}{4};\ \overset{y_0}{2})$

Determinamos la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$:

$$\mathscr{L}_1: y-2=\left(\frac{4}{3}\right)(x-4)$$

$$3y-6=4x-16$$

$$\therefore\ \mathscr{L}_1: 4x-3y-10=0$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

Dadas las rectas $\mathscr{L}_1: -2x+y=-2$ y $\mathscr{L}_2: x+y=7$, indique si son paralelas y halle su punto de intersección, si es que son secantes.

A) Son paralelas
B) No son paralelas; $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2=(5; 4)$
C) No son paralelas; $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2=(4; 5)$
D) No son paralelas; $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2=(4; 3)$
E) No son paralelas; $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2=(3; 4)$

Resolución

Piden indicar si las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas o secantes.

Para determinar si las rectas son paralelas o secantes, basta con analizar sus pendientes.

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_1: -2x+y=-2 \rightarrow m_{\mathscr{L}_1}=\frac{-(-2)}{1}=2 \\ &\mathscr{L}_2: x+y=7 \rightarrow m_{\mathscr{L}_2}=\frac{-1}{1}=-1 \end{aligned}\right\}\text{no son paralelas}$$

Como las rectas son secantes, busquemos el punto de intersección

$$\mathscr{L}_1: y=2x-2 \qquad \mathscr{L}_2: y=7-x$$

Igualamos

$$2x-2=7-x$$

$$x=3 \rightarrow y=4$$

Por lo tanto, el punto de intersección es $(3; 4)$.

Clave **E**

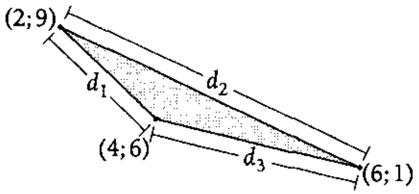
PROBLEMA N.° 4

Halle el perímetro de un triángulo cuyos vértices son $(4; 6)$, $(6; 1)$, $(2; 9)$.

A) $\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{29}$
B) $\sqrt{13}+\sqrt{29}+4\sqrt{5}$
C) $\sqrt{13}+\sqrt{29}+\sqrt{7}$
D) $\sqrt{29}+4\sqrt{13}+\sqrt{5}$
E) $\sqrt{5}+\sqrt{13}+4\sqrt{29}$

Resolución

Piden el perímetro de la región triangular.
De los datos:



$$d_1=\sqrt{(4-2)^2+(6-9)^2} \rightarrow d_1=\sqrt{13}$$

$$d_2=\sqrt{(6-2)^2+(1-9)^2} \rightarrow d_2=4\sqrt{5}$$

$$d_3=\sqrt{(6-4)^2+(1-6)^2} \rightarrow d_3=\sqrt{29}$$

Por lo tanto, el perímetro de la región triangular es $\sqrt{13}+\sqrt{29}+4\sqrt{5}$.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

El ángulo de inclinación de una recta mide 135°. Si pasa por los puntos $(-3;y)$ y $(-5;4)$, calcule y.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Resolución

Piden calcular y

Datos:

- ángulo de inclinación$=135°$
- puntos de paso: $(-3;y)$ y $(-5;4)$

Determinamos la pendiente

$$m=\tan 135°=-1$$

$$\rightarrow m=-1$$

Determinamos la pendiente en función de los puntos de paso

$$m=\frac{y-4}{-3-(-5)}=\frac{y-4}{-3+5}=-1$$

$$y-4=3-5$$

$$\therefore\ y=2$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (2/3;11/3) y por la intersección de las rectas $3x-5y-11=0$ y $4x+y-7=0$.

A) $-7x+2y-12=0$
B) $7x-2y-12=0$
C) $7x+2y-12=0$
D) $7x+2y+12=0$
E) $7x-2y+12=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta.

Por dato: la recta pasa por el punto $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$ y por la intersección de las rectas

$3x-5y-11=0$ y $4x+y-7=0$

Calculamos el punto de intersección de las rectas

$$y=\frac{3x-11}{5} \qquad y=7-4x$$

Igualamos

$$\frac{3x-11}{5}=7-4x \rightarrow x=2$$

$$y=-1$$

Puntos de paso: $(2;-1)$ y $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$

Calculamos la pendiente

$$m=\frac{-1-\dfrac{11}{3}}{2-\dfrac{2}{3}}=\frac{-7}{2}\quad\rightarrow\quad m=\frac{-7}{2}$$

Ecuación de la recta

$$y-(\overset{y_0}{\overbrace{-1}})=\left(\frac{-7}{2}\right)(x-\overset{x_0}{\downarrow}\!\!2)\quad\rightarrow\ 2y+2=-7x+14$$

$\mathscr{L}$: $7x+2y-12=0$

Clave **C**

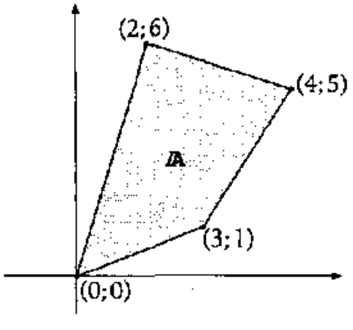
PROBLEMA N.° 7

Calcule el área de un polígono cuyos vértices son (2; 6), (4; 5), (0; 0), (3; 1).

A) 12,5 u^2
B) 15 u^2
C) 25 u^2
D) 10,5 u^2
E) 21 u^2

Resolución

Piden el área de un polígono.
Del gráfico



Haciendo uso de la regla práctica para cálculos de áreas de polígonos

$$\begin{array}{r|cc|r}
 & 0 & 0 & \\
0\leftarrow & 3 & 1 & \rightarrow\ 0\\
4\leftarrow & 4 & 5 & \rightarrow\ 15\\
10\leftarrow & 2 & 6 & \rightarrow\ 24\\
0\leftarrow & 0 & 0 & \rightarrow\ 0\\
\hline
14 & & & 39
\end{array}$$

$\therefore\ \mathbb{A}=\dfrac{1}{2}|14-39|=12{,}5\ u^2$

Clave **A**

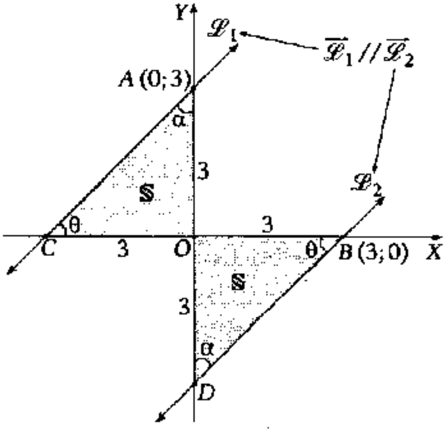
PROBLEMA N.° 8

Dos rectas paralelas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ pasan por $A(0;3)$ y $B(3;0)$, respectivamente, y determinan regiones de áreas iguales con los ejes coordenados. Halle la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$.

A) $x-y+3=0$
B) $x+y-3=0$
C) $x+y+3=0$
D) $x-y-3=0$
E) $x-2y+6=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$.



Por paralelas

$m\sphericalangle CAO = m\sphericalangle ODB = \alpha$

$m\sphericalangle ACO = m\sphericalangle OBD = \theta$

$\triangle AOC \cong \triangle BOD$ (regiones equivalentes)

$\rightarrow\ AO = OD = 3$

$\rightarrow\ OC = OB = 3$

$\triangle COA \cong \triangle DOB$ (notable 45°) $\rightarrow\ \alpha = \theta = 45°$

$m_{\overrightarrow{\mathscr{L}_2}} = \tan 45° = 1$

Ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$

$\mathscr{L}_2$: $y - 0 = 1(x - 3)$

$\mathscr{L}_2$: $x - y - 3 = 0$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 9

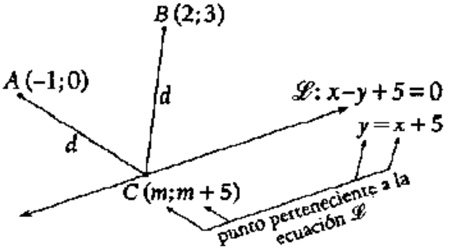
Dada la recta $\mathscr{L}$: $x - y + 5 = 0$ y los puntos $A(-1; 0)$ y $B(2; 3)$. Halle el punto C que pertenece a la recta dada de modo que $AC = BC$.

A) (3/2; 7/2)
B) (7/2; −3/2)
C) (−3/2; −7/2)
D) (−3/2; 7/2)
E) (5; 3)

Resolución

Piden hallar las coordenadas del punto C.

Del dato:



Calculamos d

$$d = \sqrt{(m - ^{-}1)^2 + (m + 5 - 0)^2} = \sqrt{(m - 2)^2 + (m + 5 - 3)^2}$$

$$\cancel{2m^2} + 12m + 26 = \cancel{2m^2} + 8 \rightarrow m = \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto C son $\left(\frac{-3}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

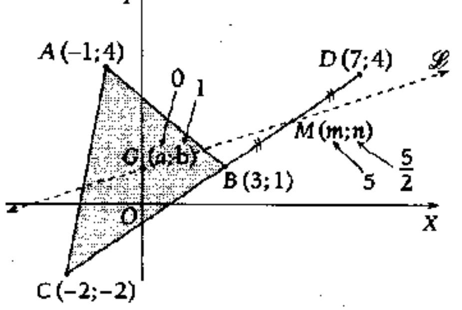
Dados los puntos $A(-1; 4)$, $B(3; 1)$, $C(-2; -2)$ y $D(7; 4)$. Halle la ecuación de la recta que pasa por G y por el punto medio de $\overline{BD}$ si G es baricentro del $\triangle ABC$.

A) $7x + 3y + 6 = 0$
B) $3x + 11y + 3 = 0$
C) $3x - 10y + 10 = 0$
D) $2x + 7y + 13 = 0$
E) $7x + 6y + 8 = 0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta que pasa por G y el punto medio de $\overline{BD}$.

De los datos:



Hallando las coordenadas del baricentro del $\triangle ABC$:

$$G(a;b)=G\left(\frac{-1+3-2}{3};\frac{4+1-2}{3}\right)$$

$$G(a;\ b)=G(0;\ 1)$$

Calculamos las coordenadas del punto medio de $\overline{BD}$

$$M(m;n)=M\left(\frac{3+7}{2};\frac{1+4}{2}\right)$$

$$M(m;n)=M\left(5;\frac{5}{2}\right)$$

Calculamos la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$$m=\frac{\frac{5}{2}-1}{5-0}=\frac{3}{10}$$

Determinamos la ecuación de la recta

$$\mathscr{L}: y-1=\left(\frac{3}{10}\right)(x-0)$$

$$10y-10=3x$$

$$\mathscr{L}: 3x-10y+10=0$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 11

Halle la pendiente de la recta que pasa por el punto medio del segmento que une los puntos $M(-3;\ 2)$ y $N(7;\ 6)$ y el punto $P(x;\ y)$ tal que AP: $PB=1$:2 ; siendo $A(0;\ -2)$ y $B(5;\ 0)$.

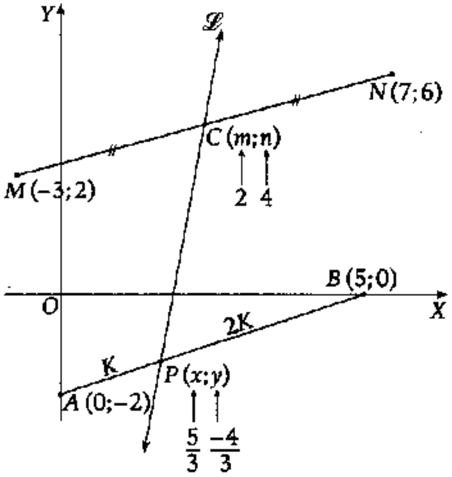
A) 10 B) 12 C) 14

D) 16 E) 18

Resolución

Piden hallar la pendiente de la recta.

Por los datos del problema, establecemos la siguiente gráfica



Calculamos las coordenadas del punto medio de $\overline{MN}$

$$C(m;n)=C\left(\frac{-3+7}{2};\frac{2+6}{2}\right)$$

$$C(m;\ n)=C(2;\ 4)$$

Calculamos las coordenadas del punto P

$$P(x;y)=P\left(\frac{0\times2+5\times1}{3};\frac{-2\times2+0\times1}{3}\right)$$

$$P(x;y)=P\left(\frac{5}{3};\frac{-4}{3}\right)$$

Determinamos la pendiente

$$m_{\mathscr{L}}=\frac{4-\left(\frac{-4}{3}\right)}{2-\frac{5}{3}}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ m_{\mathscr{L}}=16$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 12

La pendiente de una recta que pasa por el punto $A(3; 2)$ es igual a 3/4. Calcule las coordenadas de dos puntos P y Q sobre esta recta que disten 5 unidades de A.

A) (7; 5) y (–1; –1)
B) (5; 3) y (3; 5)
C) (7; 5) y (1;1)
D) (3; 4) y (–1; 1)
E) (4; 3) y (2; 1)

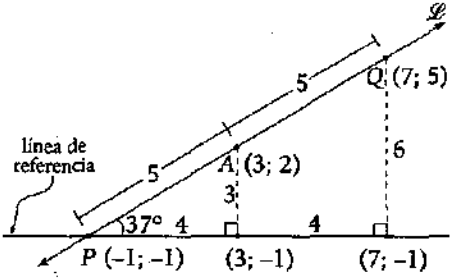
Resolución

Piden calcular las coordenadas de los puntos P y Q.

Datos:
La pendiente de la recta es 3/4 y el punto de paso es $A(3; 2)$.

Se sabe

$$m=\tan\alpha=\frac{3}{4} \rightarrow \overset{\text{ángulo de inclinación}}{\alpha}=37^\circ$$



Por lo tanto, las coordenadas de los puntos P y Q son (–1; –1) y (7; 5).

Clave **A**

PROBLEMA N.° 13

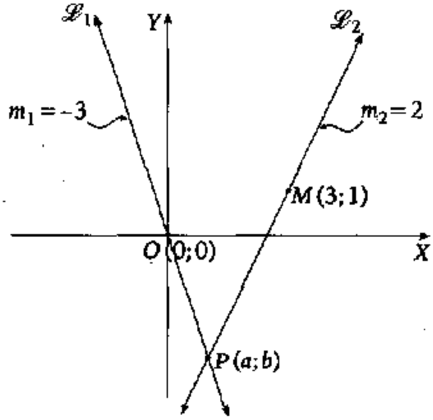
Sea $P=(a; b)$ un punto tal que la recta OP que lo une con el origen tenga pendiente –3, y que la recta MP trazada por los puntos P y $M=(3; 1)$ tiene pendiente 2. Calcule el valor de $a+b$.

A) 5/3
B) –3
C) –5/3
D) –2
E) –7/2

Resolución

Piden calcular el valor de $a+b$

De los datos, se presenta la siguiente gráfica



$$m_1=\frac{b-0}{a-0}=-3 \rightarrow b=-3a$$

$$m_2=\frac{b-1}{a-3}=2 \rightarrow 2a-b=5$$

$$a=1 \qquad b=-3$$

$\therefore\ a+b=-2$

Clave **D**

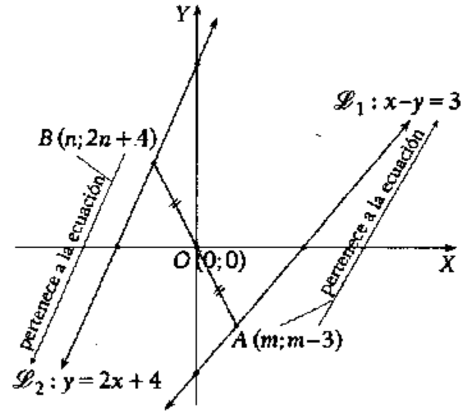
PROBLEMA N.° 14

Una recta que pasa por el origen corta a las rectas $x-y=3$ e $y=2x+4$ en los puntos A y B, respectivamente. Si el origen es punto medio del segmento $\overline{AB}$, halle las coordenadas del punto A.

A) (1; 3) B) (1; −2) C) (−1; 2)
D) (2; 4) E) (2; 1)

Resolución

Piden hallar las coordenadas del punto A.
Se tiene la siguiente información



Aplicamos coordenadas del punto medio del segmento AB

$$\frac{n+m}{2}=0 \qquad \frac{(2n+4)+(m-3)}{2}=0$$

$$m+n=0 \qquad m+2n=-1$$

$$\rightarrow\ m=1 \qquad n=-1$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto A son (1; −2).

Clave B

PROBLEMA N.° 15

Halle el perímetro del triángulo formado por los ejes X e Y y la recta $\mathscr{L}_1$, la cual pasa por el punto (10; −12) y es perpendicular a la recta $y=\frac{5}{12}x+10$.

A) 15 u B) 20 u C) 35 u
D) 10 u E) 30 u

Resolución

Piden el perímetro del triángulo formado.
Se sabe que

$$\overline{\mathscr{L}}_1 \perp \mathscr{L}: y=\frac{5}{12}x+10$$

Se observa que

$$m_{\overrightarrow{\mathscr{L}}}=\frac{5}{12} \ \rightarrow\ m_{\overrightarrow{\mathscr{L}_1}}=\frac{-12}{5}$$

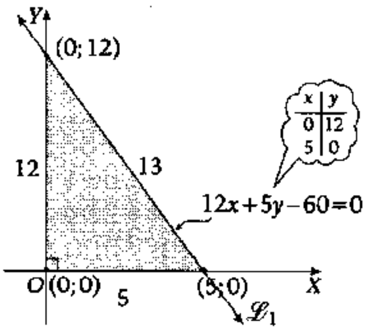
Además, el punto de paso de $\mathscr{L}_1$: (10; −12)

Ecuación de la recta

$$\mathscr{L}_1: y-(-12)=\left(\frac{-12}{5}\right)(x-10)$$

$$\mathscr{L}_1: 12x+5y-60=0$$

Determinando la región triangular



Por lo tanto, el perímetro del triángulo es 30 u.

Clave E

PROBLEMA N.° 16

Los puntos medios de los lados de un triángulo vienen dados por la intersección 2 a 2 de las siguientes rectas:

$\mathscr{L}_1$: $4x+3y-5=0$

$\mathscr{L}_2$: $x-3y+10=0$

$\mathscr{L}_3$: $x-2=0$

Halle el área de dicho triángulo.

A) $35\ u^2$ B) $40\ u^2$ C) $20\ u^2$

D) $30\ u^2$ E) $45\ u^2$

Resolución

Piden hallar el área del triángulo formado. Determinamos las intersecciones de las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ 2 a 2.

$$\mathscr{L}_1: y=\frac{5-4x}{3}$$

$$\mathscr{L}_2: y=\frac{x+10}{3}$$

$$\mathscr{L}_3: x=2$$

- $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2: \dfrac{5-4x}{3}=\dfrac{x+10}{3}$

  $\rightarrow\ x=-1;\ \ y=3$

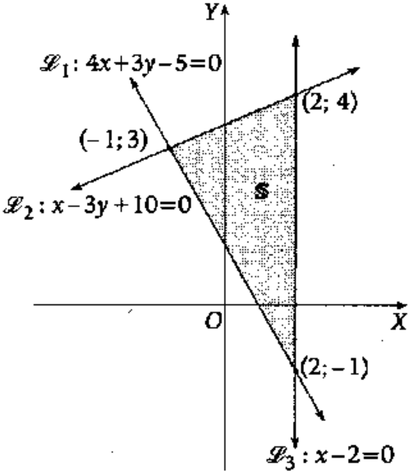
- $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3: y=\dfrac{5-4(2)}{3}$

  $\rightarrow\ y=-1;\ \ x=2$

- $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3: y=\dfrac{(2)+10}{3}$

  $\rightarrow\ y=4;\ \ x=2$

Graficamos las 3 rectas



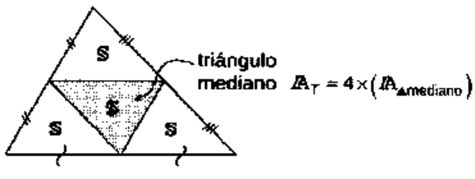
Calculamos el área de la región triangular

$$\begin{array}{rc|cc|cr} & & 2 & -1 & & \\ -2 & \leftarrow & 2 & 4 & \rightarrow & 8 \\ -4 & \leftarrow & -1 & 3 & \rightarrow & 6 \\ 6 & \leftarrow & 2 & -1 & \rightarrow & 1 \\ \hline 0 & & & & & 15 \end{array}$$

$$S=1/2(15-0)=7{,}5\ u^2$$

Por dato del problema, los vértices del triángulo sombreado representan los puntos medios de un triángulo, es decir, el triángulo sombreado es el triángulo mediano.

Recuerda



Por lo tanto, el área del triángulo pedido es $4\times(7{,}5)=30\ u^2$.

Clave D

PROBLEMA N.° 17

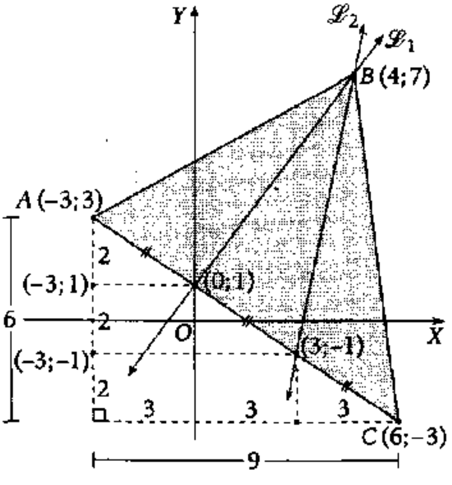
Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice B y trisecan al lado opuesto $\overline{AC}$ del triángulo cuyos vértices son $A(-3;3)$, $B(4;7)$, $C(6;-3)$.

A) $8x-y-25=0$ y $3x-2y+2=0$
B) $7x-y-25=0$ y $3x-2y+2=0$
C) $8x-y-25=0$ y $4x-3y+2=0$
D) $7x+y+25=0$ y $3x+2y+2=0$
E) $5x+y+25=0$ y $2y+3x-5=0$

Resolución

Piden hallar las ecuaciones de las rectas.

De los datos:



Calculamos la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$

$$\mathscr{L}_1: y-1=\left(\frac{7-1}{4-0}\right)(x-0)$$

$$4y-4=6x$$

$$6x-4y+4=0$$

$$\mathscr{L}_1: 3x-2y+2=0$$

Calculamos la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$

$$\mathscr{L}_2: y-7=\left(\frac{7-{}^{-}1}{4-3}\right)(x-4)$$

$$y-7=8x-32 \rightarrow \mathscr{L}_2: 8x-y-25=0$$

Por lo tanto, las ecuaciones de las rectas son

$8x-y-25=0$ y $3x-2y+2=0$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 18

Halle la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $\mathscr{L}_1$: $5x+3y-15=0$.

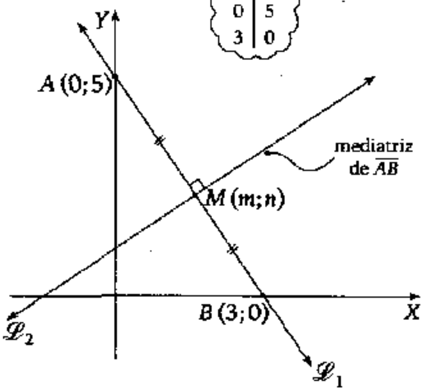
A) $5x-10y+7=0$
B) $6x-10y-16=0$
C) $6x-10y+16=0$
D) $6x+10y-16=0$
E) $6x+10y+16=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la mediatriz.
Graficamos la recta

$\mathscr{L}_1$: $5x+3y-15=0$

x	y
0	5
3	0



$$\mathscr{L}_1: 5x+3y-15=0 \rightarrow m_{\mathscr{L}_1}=-\frac{5}{3}$$

Como $\overrightarrow{\mathscr{L}}_2 \perp \overrightarrow{\mathscr{L}}_1 \rightarrow m_{\mathscr{L}_2} \times m_{\mathscr{L}_1} = -1 \rightarrow m_{\mathscr{L}_2} = \frac{3}{5}$

Determinamos las coordenadas del punto M

$$M(m;n) = M\left(\frac{0+3}{2}; \frac{5+0}{2}\right)$$

$$M(m;n) = M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Calculamos la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$

$$\mathscr{L}_2 : y - \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\mathscr{L}_2 : 6x - 10y + 16 = 0$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 19

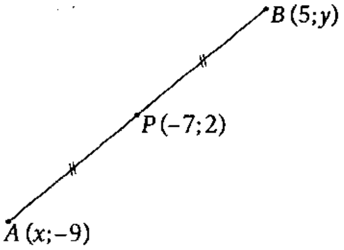
El punto medio de un segmento está en el punto $P(-7; 2)$. La abscisa de uno de los extremos es 5; y la ordenada del otro extremo, −9. Halle las coordenadas de los extremos.

A) (5; 13) y (10; 9)
B) (5; 13) y (−19; −9)
C) (5; −13) y (−19; −9)
D) (13; 5) y (9; −19)
E) (13; −5) y (−9; 19)

Resolución

Piden hallar la coordenada de los extremos del segmento.

De los datos:



Aplicando coordenadas del punto medio de un segmento tenemos

$$\frac{x+5}{2} = -7 \qquad \frac{-9+y}{2} = 2$$

$$\rightarrow x = -19 \qquad \rightarrow y = 13$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos extremos son (−19; −9) y (5; 13).

Clave **B**

PROBLEMA N.° 20

Halle la ecuación de una recta $\mathscr{L}$ que pasa por el punto $Q=(4; -3)$ y es paralela a la recta $\mathscr{L}_1$ cuya ecuación es $y=3x+5$.

A) $y=5x-13$
B) $y=-3x+15$
C) $y=3x+15$
D) $y=-3x-15$
E) $y=3x-15$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$.

Por dato:

$$\overrightarrow{\mathscr{L}} // \overrightarrow{\mathscr{L}}_1 : y = 3x + 5$$

$$\rightarrow m_{\overrightarrow{\mathscr{L}}} = m_{\overrightarrow{\mathscr{L}}_1} = 3$$

Además, $\mathscr{L}$ pasa por $Q=(\underset{\substack{\downarrow\\ x_0}}{4}; \underset{\substack{\downarrow\\ y_0}}{-3})$

Calculamos la ecuación de la recta $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}: y - {}^{-}3 = (3)(x-4)$$

$$\therefore \quad \mathscr{L}: y = 3x - 15$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 21

El punto P está en el segmento de recta entre los puntos $P_1(1;3)$ y $P_2(0;1)$ y está 3 veces más lejos de P_1 que de P_2. Halle las coordenadas de dicho punto.

A) (1; 7)
B) (1/5; 7)
C) (1; 7/5)
D) (1/5; 7/5)
E) (−1/5; −7/5)

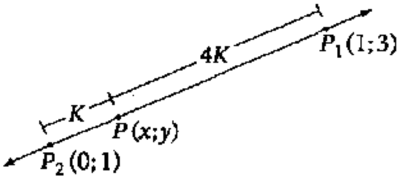
Resolución

Piden hallar las coordenadas del punto P.

Recuerda

3 veces más < > 4 veces.

De los datos:



Aplicamos coordenadas de un punto en una razón dada

$$x=\frac{0\times4+1\times1}{5} \qquad y=\frac{1\times4+3\times1}{5}$$

$$\rightarrow\ x=\frac{1}{5} \qquad \rightarrow\ y=\frac{7}{5}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto P son $\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$.

Clave D

PROBLEMA N.° 22

Halle la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ de pendiente −3/4 que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 24 u^2.

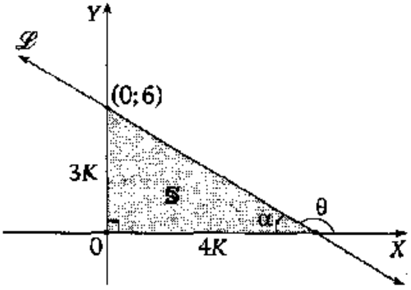
A) $3x+4y-24=0$
B) $3x-4y-24=0$
C) $3x-4y+24=0$
D) $2x+4y+24=0$
E) $3x-7y+15=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$

Dato: $m_{\mathscr{L}}=\frac{-3}{4}$

Graficamos la recta



$$\tan\theta=-\tan\alpha$$

$$m_{\mathscr{L}}=\tan\theta=\frac{-3}{4}=-\tan\alpha$$

$$\rightarrow\ \tan\alpha=\frac{3}{4}$$

Por dato:

$$\mathbb{S}=\frac{(3K)(4K)}{2}=24\ u^2\ \rightarrow\ K=2\ u$$

Ecuación de la recta $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}: y-6=\left(\frac{-3}{4}\right)(x-0)\ \rightarrow\ 4(y-6)=-3x$$

$$\therefore\ \mathscr{L}=3x+4y-24=0$$

Clave A

PROBLEMA N.° 23

El punto C equidista de $A(2;\,2)$ y de $B(10;\,2)$. El área de la región triangular ABC es 25 u^2. Halle las coordenadas de C.

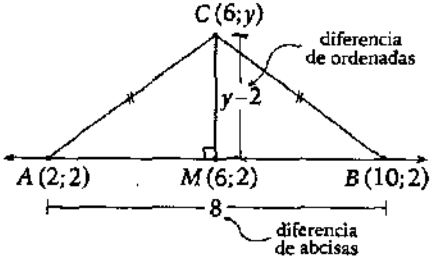
A) (6; 7)
B) (5; 33/4)
C) (5; 9)
D) (–6; 33/4)
E) (6; 33/4)

Resolución

Piden hallar las coordenadas de C.

Dato: $\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=25\ u^2$

Ubicando los puntos tenemos



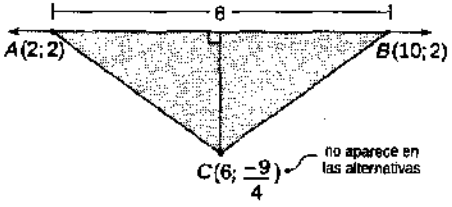
$$\mathbb{A}_{\blacktriangle ABC}=\frac{8(y-2)}{2}=25$$

$$8y-16=50\ \rightarrow\ y=\frac{33}{4}$$

Por lo tanto, las coordenadas de C son $\left(6;\,\dfrac{33}{4}\right)$.

Observación

También se podría considerar la ubicación simétrica del punto C.



Clave E

PROBLEMA N.° 24

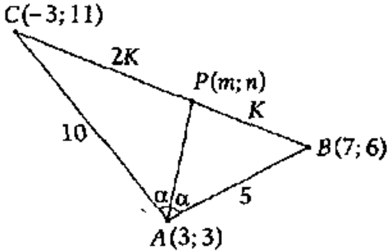
Dado el triángulo cuyos vértices son $A(3;\,3)$, $B(7;\,6)$ y $C(-3;\,11)$, halle el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado opuesto BC.

A) (11/3; 23/3)
B) (11; 23)
C) (12; 20)
D) (4; 6)
E) (5; 7)

Resolución

Piden hallar el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado opuesto BC.

De los datos se desprende el siguiente gráfico



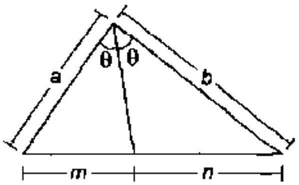
Luego

$$d_{\overline{AB}}=\sqrt{(7-3)^2+(6-3)^2}=5$$

$$d_{\overline{AC}}=\sqrt{(3-^{-}3)^2+(3-11)^2}=10$$

Recuerda

Teorema de la bisectriz interior:



$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{m}{n}}$$

Por el teorema de la bisectriz interior

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{PC}=\frac{5}{10}\;\rightarrow\;\begin{matrix}BP=K\\PC=2K\end{matrix}$$

Calculamos las coordenadas del punto *P*

$$P(m;\,n)=P\left(\frac{7\times2+-3\times1}{3};\frac{6\times2+11\times1}{3}\right)$$

$$\therefore\;\;P(m;\,n)=P\left(\frac{11}{3};\frac{23}{3}\right)$$

Clave **A**

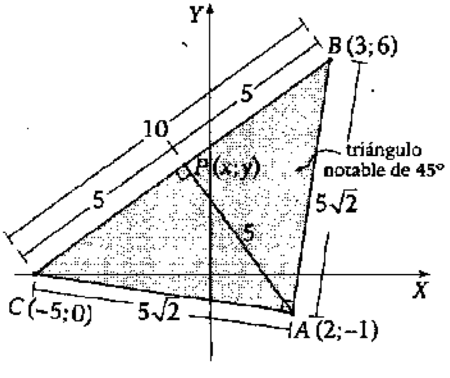
PROBLEMA N.° 25

Halle las coordenadas de un punto equidistante de los vértices del triángulo *ABC*, donde *A*(2; −1), *B*(3; 6) y *C*(−5;0).

A) (1; 3)
B) (−1; −3)
C) (−1; 3)
D) (1; −3)
E) (2; 4)

Resolución

Piden hallar las coordenadas del punto equidistante a los vértices del $\triangle ABC$.
De los datos, obtenemos la siguiente gráfica:



Del gráfico

$$d_{\overline{AB}}=\sqrt{(3-2)^2+(6-{}^{-}1)^2}=5\sqrt{2}$$

$$d_{\overline{AC}}=\sqrt{(2-{}^{-}5)^2+(-1-0)^2}=5\sqrt{2}$$

$$d_{\overline{BC}}=\sqrt{(-5-3)^2+(0-6)^2}=10$$

Por las dimensiones se deduce que

⊾*ABC*: rectángulo notable 45°.

Entonces, el punto que equidista de los 3 vértices se ubica sobre la hipotenusa $\overline{BC}$.

Coordenadas del punto *P*

$$x=\frac{-5+3}{2};\quad y=\frac{0+6}{2}$$

$$x=-1\quad;\quad y=3$$

Clave **C**

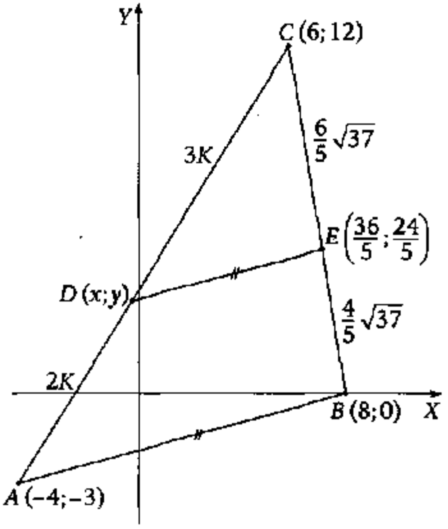
PROBLEMA N.° 26

Un triángulo tiene por vértices *A*(−4; −3), *B*(8; 0) y *C*(6; 12). Por el punto $E\left(\frac{36}{5};\frac{24}{5}\right)$, que pertenece al lado $\overline{BC}$, se traza una paralela a $\overline{AB}$ que corta al lado $\overline{AC}$ en el punto *D*. Halle las coordenadas de *D*.

A) (0; 3)
B) (6; 0)
C) (1; 5)
D) (−7; 3)
E) (−5; 6)

Resolución

Piden hallar las coordenadas de *D*.
De los datos: $\overline{DE}//\overline{AB}$



Por proporcionalidad:

$$\frac{EC}{BE}=\frac{DC}{AD}$$

$$d_{\overline{BE}}=\sqrt{\left(8-\frac{36}{5}\right)^2+\left(0-\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\sqrt{37}$$

$$d_{\overline{EC}}=\sqrt{\left(6-\frac{36}{5}\right)^2+\left(12-\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{6}{5}\sqrt{37}$$

De lo que

$$\frac{BE}{EC}=\frac{2}{3}=\frac{AD}{DC}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} AD=2K \\ DC=3K \end{array}$$

Hallamos las coordenadas de *D*

$$x=\frac{-4\times3+6\times2}{5}=0$$

$$y=\frac{-3\times3+12\times2}{5}=3$$

Por lo tanto, las coordenadas de *D* son (0; 3).

Clave A

PROBLEMA N.° 97

Halle el área determinada por la siguiente relación

$R=\{(x;y)/2|x|+|y|\leq 2\}$

A) 5 u^2
B) 3 u^2
C) 1 u^2
D) 4 u^2
E) 2 u^2

Resolución

Piden el área determinada por *R*.

Sea $R=\{(x;y)/2|x|+|y|\leq 2\}$

Analizamos las 4 soluciones:

$x\geq0$ e $y\geq0$ $\rightarrow$ $2x+y\leq2$

x	y
0	2
1	0

$x\geq0$ e $y<0$ $\rightarrow$ $2x-y\leq2$

x	y
0	−2
1	0

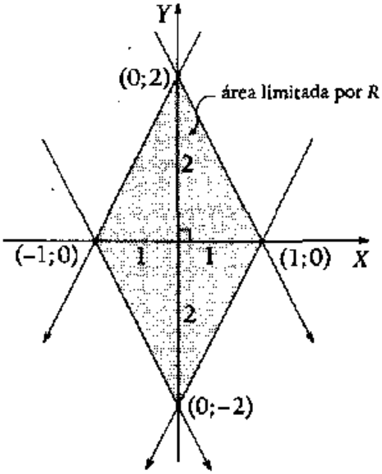
$x<0$ e $y\geq0$ $\rightarrow$ $2x-y\geq-2$

x	y
0	2
−1	0

$x<0$ e $y<0$ $\rightarrow$ $2x+y\geq-2$

x	y
0	−2
−1	0

Graficamos



$$\therefore\ A_{\diamond}=\frac{2\times 4}{2}=4\ u^2$$

Clave $\boxed{D}$

PROBLEMA N.° 28

Halle la ecuación general de la recta que es perpendicular a $\mathscr{L}$:$3x+4y-12=0$ en un punto P cuya distancia al punto de intersección de $\mathscr{L}$ y el eje X es la cuarta parte de la distancia de dicho punto al punto de intersección de $\mathscr{L}$ y el eje Y.

Obs.: las coordenadas de P son positivas.

A) $\mathscr{L}_1: 4x-3y-11=0$

B) $\mathscr{L}_1: 4x+3y+4=0$

C) $\mathscr{L}_1: 4x-3y-4=0$

D) $\mathscr{L}_1: -4x-5y+7=0$

E) $\mathscr{L}_1: 4x+3y-4=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación general de la recta $\mathscr{L}_1$.

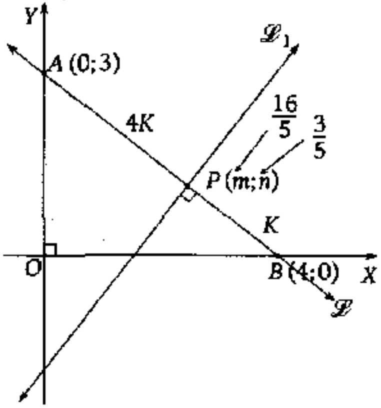
Por dato:

$$\overline{\mathscr{L}}_1 \perp \mathscr{L}: 3x+4y-12=0;\quad m_{\overline{\mathscr{L}}}=\frac{-3}{4}$$

Se sabe

$$m_{\overline{\mathscr{L}}_1}\times \underbrace{m_{\overline{\mathscr{L}}}}_{-3/4}=-1 \rightarrow m_{\overline{\mathscr{L}}_1}=\frac{4}{3}$$

Graficamos



Por dato: $AP=4(PB) \rightarrow AP=4K$ y $PB=K$

Calculamos las coordenadas del punto P:

$$P(m;n)=P\left(\frac{0\times 1+4\times 4}{5};\ \frac{3\times 1+0\times 4}{5}\right)$$

$$P(m;n)=P\left(\frac{16}{5};\ \frac{3}{5}\right)$$

La ecuación de $\overline{\mathscr{L}}_1$

$$\mathscr{L}_1: y-\frac{3}{5}=\frac{4}{3}\left(x-\frac{16}{5}\right)$$

$$\mathscr{L}_1: 4x-3y-11=0$$

Clave $\boxed{A}$

PROBLEMA N.° 29

Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $R(8;-6)$ y forma un triángulo isósceles con las rectas $\overrightarrow{\mathscr{L}}_1$: $y=3$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}}_2$: $3x+y-12=0$; de tal manera que el lado desigual del triángulo esté contenido sobre $\overrightarrow{\mathscr{L}}_1$.

A) $3x+y-30=0$
B) $3x+2y-40=0$
C) $2x+y+30=0$
D) $3x-y+30=0$
E) $3x-y-30=0$

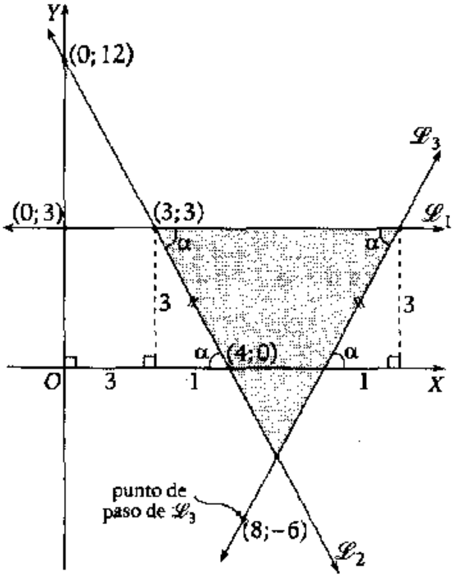
Resolución

Piden la ecuación de la recta $\overrightarrow{\mathscr{L}}_3$.

Datos:

$\overrightarrow{\mathscr{L}}_1 : y=3$; $\overrightarrow{\mathscr{L}}_2 : 3x+y-12=0$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}}_3$ pasa por $R(8;-6)$.

Se deduce que $m_{\overline{\mathscr{L}}_2}: -3$
Graficamos



Del gráfico

$\tan\alpha=3 \rightarrow m\overline{\mathscr{L}}_3=3$

Ecuación de la recta $\overrightarrow{\mathscr{L}}_3$:

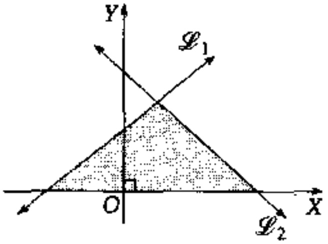
$\overrightarrow{\mathscr{L}}_3$: $y-^{-}6=3(x-8)$

$\overrightarrow{\mathscr{L}}_3$: $3x-y-30=0$

Clave E

PROBLEMA N.° 30

Halle el área de la región sombreada si $\mathscr{L}_1$: $y-x-6=0$ y $\mathscr{L}_2$: $y+x-12=0$.



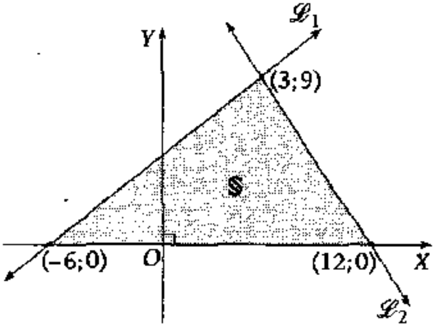
A) 162 u^2
B) 70 u^2
C) 81 u^2
D) 94 u^2
E) 56 u^2

Resolución

Piden hallar el área de la región sombreada.
Datos:

$\overrightarrow{\mathscr{L}}_1$: $y-x-6=0$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}}_2$: $y+x-12=0$

Del gráfico



Calculamos

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1:\ y=x+6$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2:\ y=12-x$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1\cap\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2:\overbrace{x+6}^{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1}=\overbrace{12-x}^{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2}\ \rightarrow\ x=3;\ y=9$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1\cap\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2=(3;9)$$

Hallamos el área de la región limitada

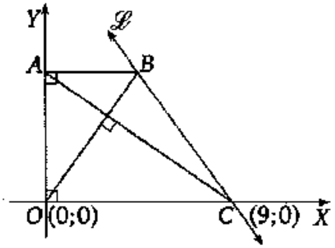
$$\begin{array}{r|cc|r} & -6 & 0 & \\ 0\leftarrow & 12 & 0 & \rightarrow 0 \\ 0\leftarrow & 3 & 9 & \rightarrow 108 \\ -54\leftarrow & -6 & 0 & \rightarrow 0 \\ \hline -54 & & & 108 \end{array}$$

$$\therefore\ \mathbb{S}=\frac{1}{2}(108-(-54))=81\ \text{u}^2$$

Clave C

PROBLEMA N.° 31

Según el gráfico, halle la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, si $OA=6$.



A) $6x-3y-4=0$

B) $6x+5y-54=0$

C) $6x+5y+54=0$

D) $6x-5y-54=0$

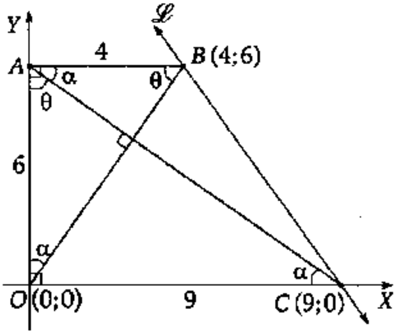
E) $-5x+5y-1=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Dato: $OA=6$

Del gráfico



$$\triangle OAB\sim\triangle OAC:\ \frac{AO}{OC}=\frac{AB}{OA}$$

$$\frac{6}{9}=\frac{AB}{6}\ \rightarrow\ AB=4$$

Determinamos la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}:y-0=\left(\frac{6-0}{4-9}\right)(x-9)$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}:y=\frac{-6}{5}(x-9)$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}:6x+5y-54=0$$

Clave B

PROBLEMA N.° 32

Determine la ecuación de una parábola cuyo foco es $F=(6;\ 3)$ y su directriz es $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}:x=2$.

A) $(y+3)^2=8x-4$

B) $(y-3)^2=8(x+4)$

C) $(y-3)^2=8x+4$

D) $(y-3)^2=8(x-4)$

E) $(y+3)^2=8(x-4)$

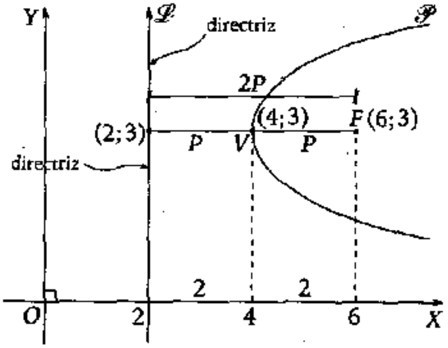
Resolución

Piden determinar la ecuación de la parábola.

Datos:

$F=(6;3)$ y directriz es $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: x=2$

Graficamos



Recuerda

Ecuación de la parábola

$\mathscr{P}: (y-K)^2=4p(x-h)$

En la parábola, las coordenadas del vértice son: (4; 3)

$\rightarrow\ h=4 \wedge K=3$

Reemplazamos

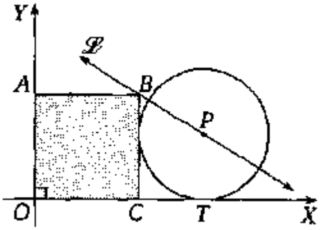
$\mathscr{P}: (y-3)^2=4(2)(x-4)$

$\therefore\ \mathscr{P}: (y-3)^2=8(x-4)$

Clave D

PROBLEMA N.° 33

Según el gráfico, halle la ecuación de la recta $\mathscr{L}$, si $C(4;0)$ y $T(7;0)$ ($ABCO$: cuadrado)

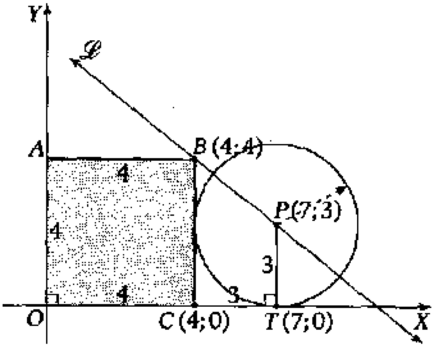


A) $3x-y-16=0$
B) $3y+x-16=0$
C) $3x+y-16=0$
D) $3y-x-16=0$
E) $3y+x+16=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Del gráfico



Determinamos la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y-3=\left(\frac{4-3}{4-7}\right)(x-7)$$

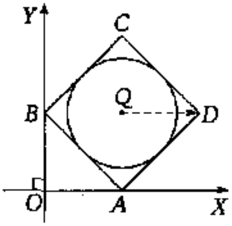
$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: 3y-9=-x+7$$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}}: x+3y-16=0$$

Clave B

PROBLEMA N.° 34

Si $B=(0;\ 8)$, $Q=(7;\ b)$ y el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado, determine la ecuación de la circunferencia mostrada.



A) $x^2+y^2=16$

B) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

C) $(x-3)^2+(y-2)^2=36$

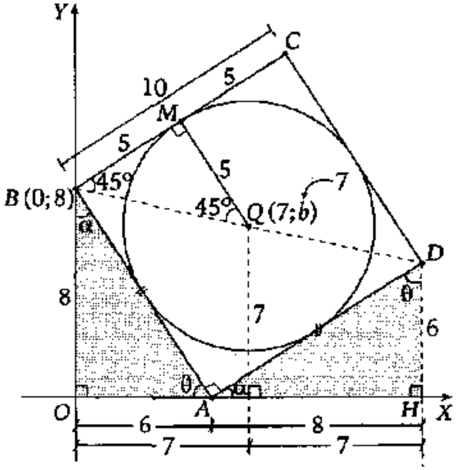
D) $(x-7)^2+(y-5)^2=25$

E) $(x-7)^2+(y-7)^2=25$

Resolución

Piden determinar la ecuación de la circunferencia.

Datos: $B=(0;\ 8)$ y $Q=(7;\ b)$



$\triangle BOA \cong \triangle AHD$ (A.L.A.)

$BO=AH=8$

$AO=DH=6$

$\rightarrow\ AB=BC=CD=DA=10$

M punto medio de $BC\ \rightarrow\ BM=MQ=5$

Por proporcionalidad, en $\square OBDH$

$b=7\ \rightarrow\ Q(7;\ 7)$

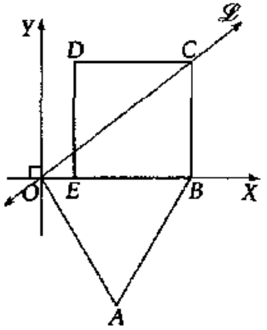
Determinamos la ecuación de la circunferencia:

$\mathscr{C}$: $(x-7)^2+(y-7)^2=5^2$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 35

Según el gráfico, halle la ecuación de $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ si la región cuadrada $EDCB$ y la región triangular equilátera OBA tienen igual perímetro.



A) $4y=3x$ B) $3y=4x$ C) $3y=x$

D) $4y=x$ E) $5y=4x$

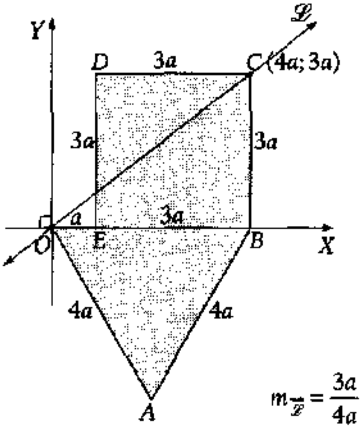
Resolución

Piden hallar la ecuación de $\overrightarrow{\mathscr{L}}$.

Dato: $(\text{perímetro}_{\blacksquare EDCB})=(\text{perímetro}_{\blacktriangle OBA})$

Asignamos el perímetro común $12a$, ya que será dividido entre 3 y 4 para determinar la longitud de los lados.

En el gráfico



$$m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}=\frac{3a}{4a}=\frac{3}{4}$$

Calculamos la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y-0=\frac{3}{4}(x-0)$$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $4y=3x$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 36

Los vértices de un triángulo son los puntos $A(3;\,6)$, $B(-1;\,3)$ y $C(2;\,-1)$. Halle la ecuación de la recta que contiene a la altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$.

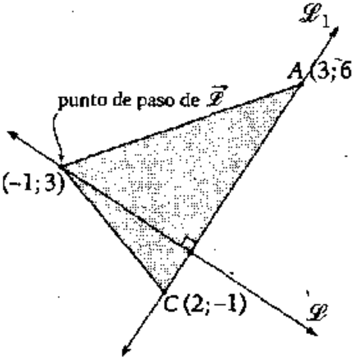
A) $7y+x-20=0$
B) $7x-y-20=0$
C) $7y-x-20=0$
D) $7x+y-20=0$
E) $6x-4y=20$

Resolución

Piden hallar la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa a $\overline{AC}$.

Datos: $A(3;\,6)$, $B(-1;\,3)$ y $C(2;\,-1)$

Graficamos



Luego $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}}=\dfrac{6-{}^{-}1}{3-2}=7$

Además $m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}}\times m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}=-1 \rightarrow m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}=\dfrac{-1}{7}$

Ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

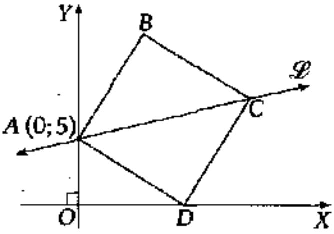
$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y-3=\frac{-1}{7}(x-{}^{-}1)$$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $x+7y-20=0$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 37

Según el gráfico, halle la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ si el lado del cuadrado $ABCD$ mide 13.



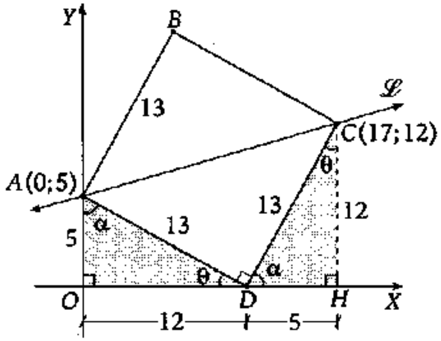
A) $17x-y=85$
B) $17y-7x=85$
C) $17y-7x+85=0$
D) $17x-7y=85$
E) $17y-6x-85=0$

Resolución

Piden hallar la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

Dato: El lado del cuadrado *ABCD* es 13.

En el gráfico



$⊾AOD$ (notable) → $OD=12$

$⊾AOD \cong ⊾DHC$ (A.L.A): $DH=5$ y $CH=12$

Ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

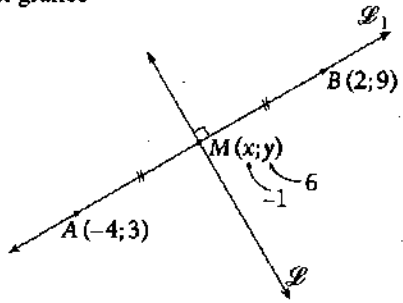
$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y-5=\left(\frac{12-5}{17-0}\right)(x-0)$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: 17(y-5)=7x$$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{\mathscr{L}}: 17y-7x=85$$

Clave B

En el gráfico



Coordenadas del punto *M*

$$M(x;\, y)=M\left(\frac{-4+2}{2};\frac{3+9}{2}\right)$$

$$M(x;\, y)=M(-1;\, 6)$$

Además

$$m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}}=\frac{9-3}{2-(-4)}=1$$

$$m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}\times m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}}=-1\ \rightarrow\ m_{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}}=-1$$

Ecuación de la recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y-6=-1(x-{}^{-}1)$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y-6=-x-1$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y+x-5=0$$

Clave C

PROBLEMA N.° 38

Determine la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$ si $A(-4;\,3)$ y $B(2;\,9)$.

A) $y=5x+3$
B) $y-x+5=0$
C) $y+x-5=0$
D) $y+x+5=0$
E) $x-y+5=0$

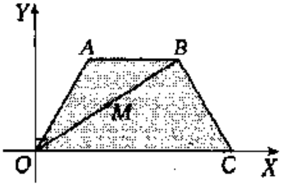
Resolución

Piden determinar la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

PROBLEMA N.° 39

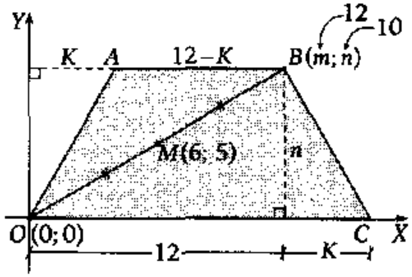
Según el gráfico *OABC* es un trapecio isósceles, $OM=MB$. Siendo las coordenadas del punto $M(6;\,5)$, calcule el área de la región sombreada.

A) $100\ \text{u}^2$
B) $60\ \text{u}^2$
C) $90\ \text{u}^2$
D) $120\ \text{u}^2$
E) $180\ \text{u}^2$



Resolución

Piden calcular el área de la región sombreada.
Datos: $OABC$ es un trapecio isósceles, $OM=MB$ y $M(6; 5)$.
En el gráfico



Coordenadas del punto medio de $\overline{OB}$

$$M(6;5)=M\left(\frac{0+m}{2};\frac{0+n}{2}\right)\rightarrow\begin{matrix}m=12\\n=10\end{matrix}$$

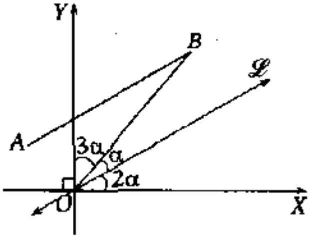
$$\mathbb{A}_{\blacksquare OABC}=\left[\frac{(12+\cancel{K})+(12-\cancel{K})}{2}\right]\times10$$

$$\mathbb{A}_{\blacksquare OABC}=120\ \text{u}^2$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 40

Según el gráfico, determine la ecuación de la recta que contiene a $\overline{AB}$ si $\overline{AB}//\overrightarrow{\mathscr{L}}$ y $OB=6\sqrt{2}$.



A) $\sqrt{3}y-x+6-6\sqrt{3}=0$

B) $3y-x+6=0$

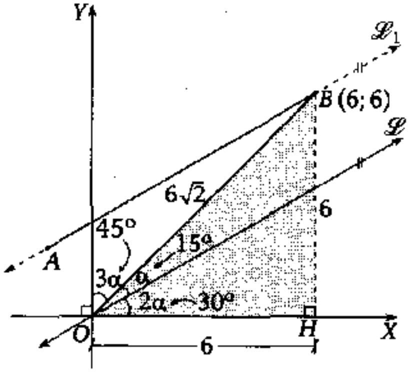
C) $y+x-6\sqrt{3}=0$

D) $y-x+6\sqrt{3}=0$

E) $\sqrt{3}y-x+6=0$

Resolución

Piden determinar la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
Datos: $AB//\overrightarrow{\mathscr{L}}$ y $OB=6\sqrt{2}$
En el gráfico



Se observa $6\alpha=90°$ → $\alpha=15°$

$\triangle OHB$ (notable 45°) → $BH=OH=6$

→ coordenadas del punto B (6; 6)

Además $m_{\overrightarrow{\mathscr{L}}}=\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Luego $\overrightarrow{\mathscr{L}_1}//\overrightarrow{\mathscr{L}}$ → $m_{\overrightarrow{\mathscr{L}_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Hallamos la ecuación de la recta $\overrightarrow{\mathscr{L}}_1$

$$\overrightarrow{\mathscr{L}}_1: y-6=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-6)$$

$$3y-18=\sqrt{3}x-6\sqrt{3}$$

$$3y-\sqrt{3}x-18+6\sqrt{3}=0$$

$$3\sqrt{3}y-3x-18\sqrt{3}+18=0$$

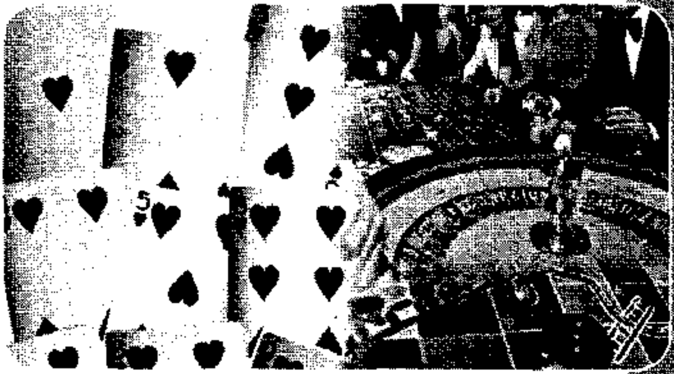
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathscr{L}}_1:\sqrt{3}y-x-6\sqrt{3}+6$$

Clave **A**

Capítulo

20

Introducción al análisis combinatorio



En este capítulo se desarrollará el contenido teórico de la Introducción a la Geometría Analítica: punto, recta y circunferencia.

El capítulo trata sobre esa rama de la Matemática que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos formar con los elementos de un conjunto dado. Por ejemplo, si quisiéramos saber cuántos números diferentes de teléfonos podemos formar con el nuestro, o de cuántas formas distintas se puede sentar un grupo de amigos alrededor de una mesa en la playa, etc. Para ello, es necesario conocer este tema, por ello se inicia su desarrollo con algunos conceptos, tales como el factorial de un número, para luego ya continuar con los principios fundamentales del conteo y las técnicas de conteo, como son las combinaciones y permutaciones. La práctica constante mediante la resolución de problemas permitirá familiarizarnos y comprender correctamente los diversos conceptos que se desarrollan en este capítulo.

Capítulo 20

Introducción al análisis combinatorio

PROBLEMA N.° 1

Adquiere destreza con el manejo de los factoriales de un número resolviendo los siguientes ejercicios:

a. Simplifica $M=\left(\dfrac{4!-5!+6!}{5!+6!-7!}\right)\times 175$

b. Calcule el valor de a en $\dfrac{a!(a!-3)}{a!+4}=18$

Dé como respuesta el valor de $M+a$.

A) −26 B) 4 C) 22
D) −22 E) 32

Resolución

Se pide el valor de $M+a$

Recuerda

Degradación de factoriales

$(a+1)!=(a+1)a!$
$(a+2)!=(a+2)(a+1)a!$
$(a+3)!=(a+3)(a+2)(a+1)a!$

a. $M=\left(\dfrac{4!-5!+6!}{5!+6!-7!}\right)\times 175$

Expresamos el numerador en términos de 4! y el denominador en términos de 5! (para ambos casos, los menores factoriales).

$$M=\left(\frac{4!-5\times 4!+6\times 5\times 4!}{5!+6\times 5!-7\times 6\times 5!}\right)\times 175$$

Factorizamos

$$M=\left[\frac{4!(1-5+6\times 5)}{5!(1+6-7\times 6)}\right]\times 175$$

$$M=\left[\frac{4!(26)}{5!(-35)}\right]\times 175$$

$\therefore\ M=-26$

b. $M=\dfrac{a!(a!-3)}{a!+4}=18$

Sea $a!=x$, reemplazando se tiene

$x(x-3)=18(x+4)$

Operando resulta

$x^2-21x-72=0$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -24 \\ x & & 3 \end{array}$$

$\rightarrow\ x=24\ \vee\ x=-3$

Pero

$x=a!\ \rightarrow\ x>0$

Luego

$x=a!=24$

$\rightarrow\ a=4$

$M+a=-26+4$

$\therefore\ M+a=-22$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Halle $M-n!!$, si $M^{-1}=\dfrac{7!+8!+9!}{9!(7!+8!)}$

y además, $1\times3\times5\times7\times\ldots\times(2n-1)=\dfrac{11\times12\times13\times\ldots\times20}{2^{10}}$

A) 36 480 B) 35 220 C) 40 320 D) 33 840 E) 14 720

Resolución

Se pide el valor de $M-n!!$
Se sabe que

$$M^{-1}=\frac{7!+8!+9!}{9!(7!+8!)}$$

Expresamos en términos de 7! y factorizamos

$$M^{-1}=\frac{7!+8\times7!+9\times8\times7!}{9!(7!+8\times7!)}$$

$$M^{-1}=\frac{\cancel{7!}(1+8+9\times8)}{9!\times\cancel{7!}(1+8)}=\frac{81}{9!\times9}=\frac{1}{8!}\quad\rightarrow\quad M=8!=40\ 320$$

Además, se tiene:

$$1\times3\times5\times7\times\ldots\times\ (2n-1)=\frac{11\times12\times13\times\ldots\times20}{2^{10}}$$

$$1\times3\times5\times7\times\ldots\times\ (2n-1)=\frac{11\times\overset{3}{\cancel{12}}\times13\times\overset{7}{\cancel{14}}\times15\times\cancel{16}\times17\times\overset{9}{\cancel{18}}\times19\times\overset{5}{\cancel{20}}}{\cancel{2\times2}\times\cancel{2}\times\cancel{2\times2\times2\times2}\times\cancel{2}\times\cancel{2\times2}}$$

Ordenamos los factores

$$1\times3\times5\times7\ldots\times(2n-1)=1\times3\times5\times7\times11\times13\times15\times17\times19$$

$$2n-1=19$$

$$\rightarrow\ \ n=10$$

Finalmente

$$M-n!!=40\ 320-\underbrace{10!!}_{}$$

$$M-n!!=40\ 320-3840$$

$\therefore\ \ M-n!!=36\ 480$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 3

¿Cuántos números de la forma

$\overline{\left(5-\frac{a}{2}\right)(3-b)(c+4)\left(\frac{a+4}{2}\right)}$ existen?

A) 400 B) 700 C) 9000
D) 900 E) 970

Resolución

Se pide la cantidad de números de la forma mostrada.

Recuerda

Cantidad de números $\overline{abc}$ =9×10×10=900

$$\begin{array}{ccc}
\overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
3 & 2 & 2 \\
\vdots & \vdots & 3 \\
 & & \vdots \\
9 & 9 & 9
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\ \vdots\\9\end{array}}\right\}\text{10 valores}$$

En el problema, se tiene lo siguiente:

$$\overline{\left(5-\frac{@}{2}\right)\boxed{(3-b)}(c+4)\left(\frac{@+4}{2}\right)}$$

$$\begin{array}{ccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{7 valores}\left\{\begin{array}{c}-4\\-2\\0\\2\\4\\6\\8\end{array}\right. &
\begin{array}{c}0\\1\\2\\ \vdots\\ \\ \\ \\9\end{array} &
\left.\begin{array}{c}0\\1\\2\\ \vdots\\ \\ \\ \\9\end{array}\right\}\text{10 valores}
\end{array}$$

Por lo tanto, la cantidad de números es

7×10×10=700

Clave B

PROBLEMA N.° 4

¿Cuántos números de 4 cifras significativas existen de modo que el producto de sus cifras sea un número par?

A) 5378 B) 8357 C) 7583
D) 8753 E) 5936

Resolución

Se pide la cantidad de números de cuatro cifras significativas cuyo producto de cifras sea par: C.

Si intentamos resolver el problema de manera directa; es decir, calculando el total de casos en que el producto de cuatro cifras significativas es par, resultaría demasiado laborioso. Lo que haremos es utilizar un método por complemento, de la siguiente forma:

$$C=\begin{pmatrix}\text{total de números}\\\text{con 4 cifras sig-}\\\text{nificativas.}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{total de números con 4}\\\text{cifras significativas cuyo}\\\text{producto sea impar.}\end{pmatrix}$$

- Cantidad total de números

$$\begin{array}{cccc}
\overline{a} & \overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\underline{9} & \underline{9} & \underline{9} & \underline{9}
\end{array}$$

$9\times 9\times 9\times 9=6561$

- Ahora, si

$a\times b\times c\times d=$impar

entonces a, b, c y d son todos impares.

Así que la cantidad de números con $a\times b\times c\times d$ son impares.

a	b	c	d
↓	↓	↓	↓
1	1	1	1
3	3	3	3
5	5	5	5
7	7	7	7
9	9	9	9

$\overline{5}\times\overline{5}\times\overline{5}\times\overline{5}=625$

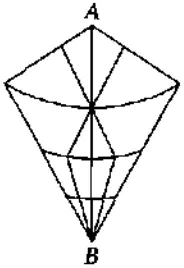
$C=6561-625$

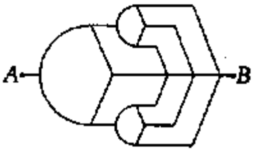
$\therefore\ C=5936$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 5

¿De cuántas maneras se puede ir de la ciudad A a la ciudad B, siempre avanzando?



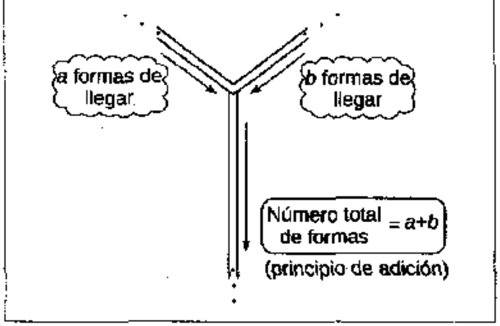


A) 47; 10
B) 21; 10
C) 40; 9
D) 52; 31
E) 91; 18

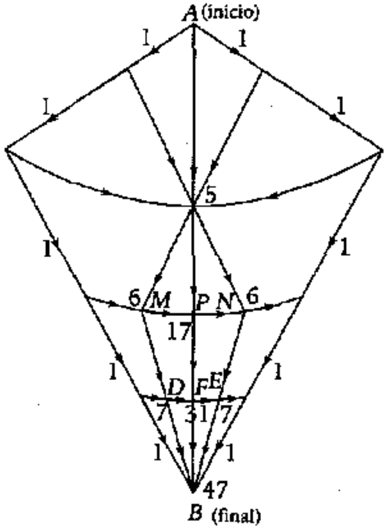
Resolución

Se pide el número de maneras para ir de A a B.

Recuerda



a. Por el principio de adición se tiene que:



Procedimiento:

En M: $5+1=6$

En N: $5+1=6$

En P: $6+5+6=17$

En D: $6+1=7$

En E: $6+1=7$

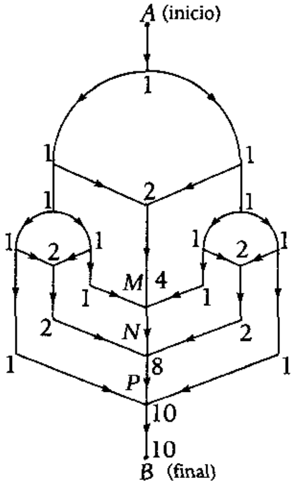
En F: $7+17+7=31$

En B:

Número de maneras$=1+7+31+7+1$

Por lo tanto, el número de maneras es 47.

b. En forma similar al caso anterior se tiene que:



Procedimiento:

En M: $1+2+1=4$

En N: $2+4+2=8$

En P: $1+8+1=10$

Por lo tanto, el número de maneras es 10.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 6

Un funcionario desea viajar de Lima a Tacna y tiene a su disposición 3 líneas aéreas y 5 líneas terrestres. ¿De cuántas maneras diferentes puede realizar dicho viaje?

A) 15 B) 2 C) 8
D) 4 E) 30

Resolución

Se pide el número de maneras diferentes de realizar el viaje.
Para realizar el viaje, el funcionario dispone de líneas aéreas y líneas terrestres. Como no podrá viajar de ambas formas (por aire y por tierra) a la vez, entonces será:

		Principio de adición ↓		
	Línea aérea	o	**Línea terrestre**	
Maneras diferentes de viajar =	3	+	5	=8

Clave **C**

PROBLEMA N.° 7

De una ciudad A a otra ciudad B hay 6 caminos diferentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje de ida y vuelta, si en el regreso no se puede tomar el camino de ida?

A) 12
B) 42
C) 25
D) 36
E) 30

Resolución

Se pide el número de maneras diferentes en realizar el viaje de ida y vuelta.
Dato: En el regreso no puede tomar el camino de ida.
Como el viaje consiste en ir y regresar (eventos sucesivos) aplicaremos el principio de multiplicación.

Es decir:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \textbf{Ida} & & \textbf{Regreso} & & \\ & & \textbf{(de } A \textbf{ a } B\textbf{)} & \text{y} & \textbf{(de } B \textbf{ a } A\textbf{)} & & \\ \text{Número de maneras diferentes} & = & 6 & \times & \underset{\uparrow}{5} & =30 \end{array}$$

No puede regresar por el camino de ida

Clave **E**

PROBLEMA N.° 8

Un grupo de 5 amigos se va de paseo en un auto que tiene 2 asientos adelante y 3 atrás. ¿De cuántas formas se podrán ubicar, si solo 2 de ellos saben manejar?

A) 10
B) 48
C) 16
D) 24
E) 120

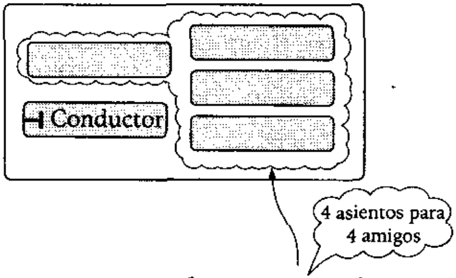
Resolución

Se pide el número de formas diferentes de ubicarse en el auto.

Dato:
De los cinco amigos, solo dos saben manejar.

Graficamos la distribución de los asientos y observamos que los cuatro amigos que van en los cuatro asientos que no son del conductor se ubicarán sin ninguna condición que los pueda restringir; por ello, se refiere a ubicar a cuatro personas en cuatro lugares distintos.

Es decir:



$$\begin{array}{lcccc} & & \textbf{conductor} & \textbf{y} & \textbf{4 amigos} \\ \text{Número de formas diferentes} & = & 2 & \times & P_4 \\ & = & 2 & \times & (24) \end{array}$$

Por lo tanto, el número de formas diferentes es 48.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 9

Si se tiene 4 libros de Aritmética y 3 libros de Álgebra, ¿de cuántas formas se podrán ubicar en un estante donde sólo entran 5 libros y deben estar alternados?

A) 144
B) 72
C) 216
D) 220
E) 352

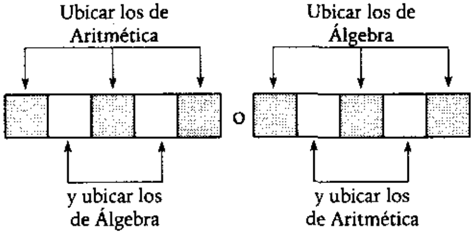
Resolución

De los datos del problema se tiene lo siguiente:

$$\overbrace{A_1, A_2, A_3, A_4}^{\text{4 libros de Aritmética}} \text{ y } \overbrace{X_1, X_2, X_3}^{\text{3 libros de Álgebra}}$$

de los cuales se ubicarán cinco en un estante en forma alternada.

La ubicación de los libros podrá ser de dos formas distintas:



Como la ubicación de los libros implica ordenarlos (permutarlos), entonces:

$$\text{N.° total de formas de ubicar 5 libros} = \overset{\text{Arit. y Álg.}}{P_3^4 \times P_2^3} \overset{\text{o}}{+} \overset{\text{Álg. y Arit.}}{P_3^3 \times P_2^4}$$

$$=\frac{4!}{(4-3)!}\times\frac{3!}{(3-2)!}+\frac{3!}{(3-3)!}\times\frac{4!}{(4-2)!}$$

$$=24\times 6+6\times 12$$

$$=216$$

Por lo tanto, el número total de formas de ubicar los cinco libros es 216.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 10

Rosa tiene 3 anillos distintos. ¿De cuántas maneras puede colocarlos en sus dedos de la mano izquierda, colocando solo un anillo por dedo, sin contar el pulgar? (Considere una sola forma de colocación en cada dedo).

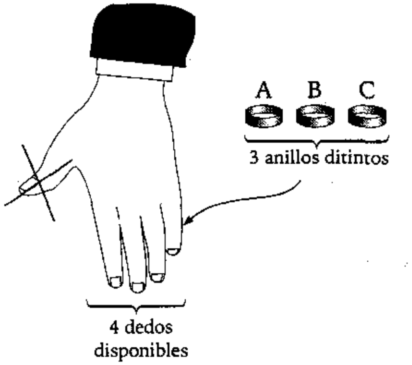
A) 36 B) 48 C) 16
D) 24 E) 6

Resolución

Se pide el número de maneras distintas de colocar tres anillos en su mano izquierda.

Condición:

Se debe colocar un anillo por dedo, sin contar el pulgar.



De la condición del problema, en 3 de los 4 dedos disponibles se ubicará un anillo en cada uno. Estas ubicaciones determinarán un orden de los anillos, por ejemplo, el anillo A en el dedo índice, el B en el dedo medio y el C en el anular. Entonces, para calcular el total de maneras de ubicarlos haremos:

$$P_3^4=\frac{4!}{(4-3)!} \rightarrow P_3^4=24$$

Por lo tanto, puede colocarlos de 24 maneras distintas.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 11

Anita tiene 6 blusas de colores diferentes y 6 minifaldas también de colores distintos. ¿De cuántas maneras diferentes puede lucir ambas prendas a la vez, si la blusa azul y la minifalda blanca las usa siempre juntas y la minifalda roja con la blusa negra nunca las usa juntas?

A) 25 B) 36 C) 100
D) 64 E) 49

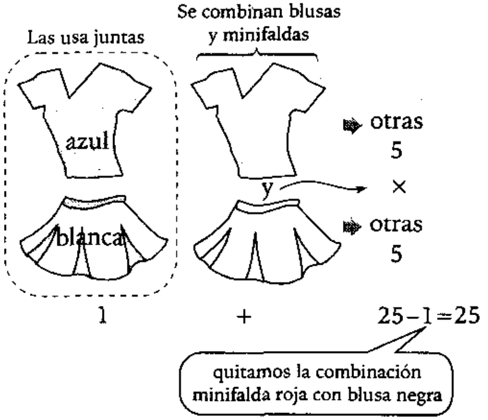
Resolución

Se pide el número de maneras distintas en que Anita puede lucir una blusa y una minifalda a la vez.

Condición:

La blusa azul y la minifalda blanca las usa siempre juntas, además, la blusa negra y la minifalda roja nunca las usa junta.

El número de maneras distintas que se pide lo calcularemos de la siguiente forma:



Por lo tanto, Anita se puede vestir de 25 maneras diferentes.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

Un equipo de vóley se sienta a dialogar en una mesa circular. ¿De cuántas formas se pueden sentar sus integrantes si 3 de ellos siempre deben estar juntos?

A) 22 B) 24 C) 12
D) 36 E) 6

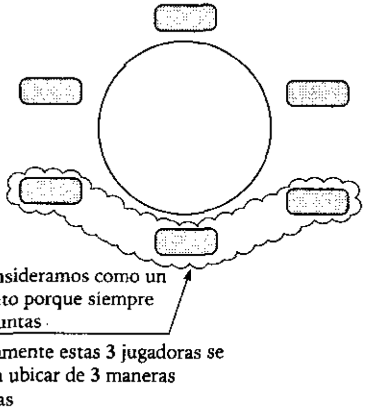
Resolución

Se pide el número de formas distintas de sentarse seis jugadoras alrededor de una mesa circular.

Condición:

Tres de las jugadoras siempre deben estar juntas.

Como se ubicarán alrededor de un objeto, en este caso una mesa, estamos frente a una permutación circular.



Del gráfico se tiene que:

N.° de maneras distintas=$P_{C_4}\times P_3$

N.° de maneras distintas=$(4-1)!\times 3!$

Por lo tanto, número de maneras distintas es 36.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 13

Un bote de 8 remos será tripulado por un grupo, seleccionado de 14 hombres, de los cuales 3 pueden llevar el timón, pero no pueden remar, el resto puede remar pero no llevar el timón. ¿De cuántas maneras puede ordenarse el grupo, si 2 de los hombres solo pueden remar en el lado derecho, pero no ambos integrando el mismo grupo? (Cada remo es utilizado por un hombre a cada lado).

A) 15(9!) B) 30(8!) C) 23(7!)
D) 23(8!) E) 30(9!)

Resolución

Se pide el número de maneras de ordenarse un grupo para tripular un bote.

Condición:

Dos de los hombres solo pueden remar en el lado derecho; pero no ambos integrando el mismo grupo.

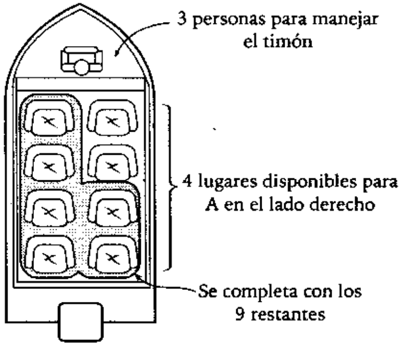
Sean A y B los que no pueden estar en el mismo grupo, por la condición del problema, a partir de ello tendremos 3 casos para analizar.

Caso 1: cuando A integre el grupo, pero no B.
Caso 2: cuando B integre el equipo, pero no A.
Caso 3: cuando ni A ni B integren el grupo.

Para realizar el conteo de cada caso no debemos olvidar las restricciones:

- Solo hay 3 personas que pueden manejar el timón.
- A y B solo pueden estar a la derecha.
- Hay otras 9 personas disponibles para los remos.

Caso 1: cuando A integre el grupo, pero no B.



Entonces

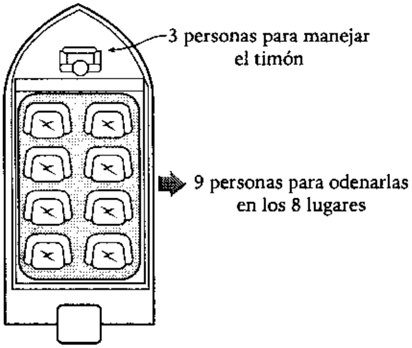
$$\begin{matrix} \text{N.° de maneras diferentes} = \overset{\text{En el timón}}{3} \overset{\text{y}}{\times} \overset{\text{lugar de A}}{4} \overset{\text{y}}{\times} \overset{\text{Completando con el resto}}{P_7^9} \end{matrix}$$

$$\text{N.° de maneras diferentes} = 12\times\frac{9!}{(9-7)!} = 6\times 9!$$

Caso 2: cuando B integre el grupo, pero no A. (Análogo al primer caso)

$$\text{N.° de maneras diferentes} = 6\times 9!$$

Caso 3: Cuando ni A ni B integran el grupo.



Entonces

$$\text{N.° de maneras diferentes} = \overset{\text{En el timón}}{3} \overset{\text{y}}{\times} \overset{\text{En los remos}}{P_8^9}$$

$$\text{N.° de maneras diferentes} = 3\times\frac{9!}{(9-8)!}$$

$$\text{N.° de maneras diferentes} = 3\times 9!$$

Finalmente

$$\text{N.° de maneras diferentes} = \overbrace{6\times 9!}^{\text{Caso 1}} \overset{\text{ó}}{+} \overbrace{6\times 9!}^{\text{Caso 2}} \overset{\text{ó}}{+} \overbrace{3\times 9!}^{\text{Caso 3}}$$

$$\therefore\ \text{N.° de maneras diferentes} = 15(9!)$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

Norma tiene 5 aretes diferentes y para usarlos todos se hace 2 perforaciones en la oreja derecha y 3 perforaciones en la de la izquierda. ¿De cuántas maneras diferentes puede lucir todos los aretes?

A) 440
B) 720
C) 120
D) 640
E) 210

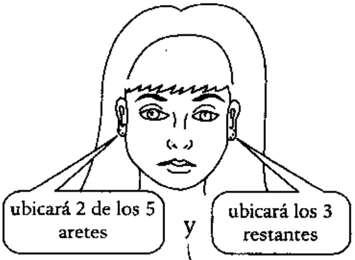
Resolución

Se pide el número de maneras distintas de lucir Norma sus cinco aretes diferentes.

Condición:

Usa dos aretes en la oreja derecha y tres en la izquierda.

De los datos, esquematizamos de la siguiente forma:



$$\text{N.° de maneras diferentes} = P_2^5 \times P_3^3$$

$$\text{N.° de maneras diferentes} = \frac{5!}{(5-2)!}\times\frac{3!}{(3-3)!}$$

$$\therefore \ \text{N.° de maneras diferentes} = 20\times6=120$$

Clave **C**

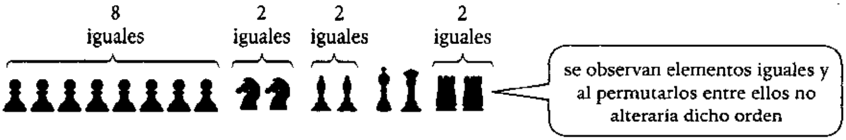
PROBLEMA N.° 15

Si disponemos de las fichas de ajedrez (solo las negras) y queremos ordenarlas en una fila, ¿de cuántas maneras se puede realizar este ordenamiento?

A) $2\left(\frac{15!}{8!}\right)$ B) $\left(\frac{15!}{8!}\right)$ C) 23! D) 16! E) 15!

Resolución

Se pide el número de maneras diferentes de ordenar en fila las fichas de ajedrez de color negro. Debemos tener en cuenta que el juego de ajedrez tiene 32 fichas, de las cuales 16 son negras y las otras son blancas. Las 16 fichas de igual color son: 8 peones (P), 2 caballos (C), 2 alfiles (A), 2 torres (T), un rey (Re) y una reina (Ra). Las ordenamos en fila:



Nos encontramos con una permutación con repetición de elementos, entonces:

$$\text{N.° de maneras diferentes} = P^{16}_{8;2;2;2} = \frac{16!}{8!\times 2!\times 2!\times 2!}$$

$$\text{N.° de maneras diferentes} = P^{16}_{8;2;2;2} = \frac{\overset{2}{\cancel{16}}!\times 15!}{8!\times \cancel{2}!\times \cancel{2}!\times \cancel{2}!}$$

$$\therefore \ \text{N.° de maneras diferentes} = 2\left(\frac{15!}{8!}\right)$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 16

Un mozo debe servir 10 vasos iguales de cerveza y gaseosa en una mesa donde hay 6 caballeros y 4 damas. Considerando que los vasos de cerveza son para los caballeros y los de gaseosa, para las damas, calcule la cantidad de maneras diferentes en que el mozo puede realizar la distribución.

A) 205
B) 450
C) 210
D) 120
E) 135

Resolución

Se pide la cantidad de maneras distintas en distribuir los 10 vasos iguales.

Condición:

De los 10 vasos, 6 son de cerveza para los caballeros y 4 son de gaseosa para las damas.

Sea:

vaso de cerveza: C
vaso de gaseosa: G

La distribución de los vasos de cerveza y gaseosa será:

$$\begin{array}{cccccccccc}
G & G & G & G & C & C & C & C & C & C \\
G & G & G & C & G & C & C & C & C & C \\
G & G & G & C & C & G & C & C & C & C \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C & C & C & C & C & C & G & G & G & G
\end{array}$$

Una distribución se diferencia de otra por el orden de sus elementos, donde 6 son iguales y los otros 4 también, entonces:

$$\text{Cantidad de maneras distintas} = \underbrace{P^{10}_{6;\,4}}_{\text{permutación con repetición de elementos}}$$

$$P^{10}_{6;\,4} = \frac{10!}{6!\times 4!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{6}\times 4\times 3\times 2\times 1}$$

$$\therefore \ P^{10}_{6;\,4} = 210$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 17

¿Cuántas señales diferentes pueden emitirse con tres focos rojos, cuatro amarillos y tres azules en una serie navideña que contiene diez portafocos?

A) 8400 B) 4200 C) 1316
D) 2632 E) 2100

Resolución

Se pide el número de señales diferentes emitidas por 10 focos (3 rojos, 4 amarillos y 3 azules).

Sea

R: foco rojo
A: foco amarillo
a: foco azul

Señales que se forman al ubicar linealmente 3 focos rojos, 4 amarillos y 3 azules.

R R R A A A A a a a
R R R a A A A A a a
R R R a a A A A A a
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
a a a A A A A R R R

Una distribución se diferencia de otra por el orden de sus elementos, donde 3 son iguales, otros 4 también y los últimos 3 también son iguales, entonces:

$$\begin{array}{c}\text{Número de}\\ \text{señales distintas}\end{array} = \underbrace{P^{10}_{3;\,4;\,3}}_{\begin{array}{l}\text{permutación con re-}\\ \text{petición de elementos}\end{array}}$$

Donde:

$$P^{10}_{3;\,4;\,3}=\frac{10!}{3!\times 4!\times 3!}$$

$$P^{10}_{3;\,4;\,3}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times \cancel{6}\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{3\times 2\times 1}\times \cancel{4!}\times 3\times 2\times 1}$$

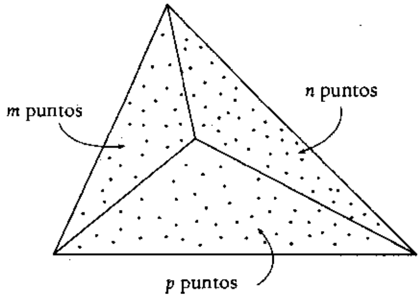
$$P^{10}_{3;\,4;\,3}=4200$$

Por lo tanto, el número de señales distintas es 4200.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 18

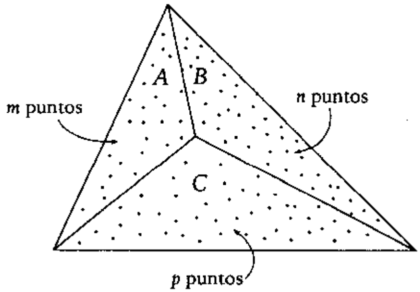
Calcule el número total de segmentos que se pueden formar en el siguiente gráfico al unir los puntos de una región con los de otra.



A) mnp
B) $mn+np+mp$
C) $mn+p$
D) $m+n+p$
E) $\frac{mn}{2}+\frac{np}{3}+\frac{mp}{4}$

Resolución

Se pide el número total de segmentos que se forman al unir los puntos de regiones distintas. Se sabe que:



Entonces, los elementos se obtienen al unir puntos de las regiones:

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & \text{y} & B & \text{o} & B & \text{y} & C & \text{o} & A & \text{y} & C\\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ m & \times & n & + & n & \times & p & + & m & \times & p \end{array}$$

Por lo tanto, el número total de segmentos es $mn+np+mp$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 19

¿Cuántos ordenamientos diferentes pueden obtenerse con las letras de la palabra BLANQUIAZUL?

A) $\frac{11!}{8}$ B) $\frac{11!}{6}$ C) $\frac{12!}{5}$ D) $\frac{10!}{8}$ E) $\frac{10!}{5}$

Resolución

Se pide el número de ordenamientos diferentes con las letras de la palabra BLANQUIAZUL.
A partir de

$$\text{BLANQUIAZUL} \Rightarrow \overbrace{B\,\underbrace{L\,L}_{2}\,\underbrace{A\,A}_{2}\,N\,Q\,\underbrace{U\,U}_{2}\,I\,Z}^{11\text{ letras}} \Rightarrow P^{11}_{2;2;2}\ \left(\begin{matrix}\text{permutación con}\\ \text{elementos repetidos}\end{matrix}\right)$$

$$P^{11}_{2;\,2;\,2}=\frac{11!}{2!\times2!\times2!}=\frac{11!}{8}$$

Por lo tanto, el número de ordenamientos diferentes es $\frac{11!}{8}$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 20

Calcule el número total de ordenaciones diferentes que se pueden formar con todas las letras, a la vez, de la palabra KATTII, de manera que las vocales iguales estén juntas.

A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60

Resolución

Se pide el número total de ordenamientos diferentes con las letras de la palabra KATTII.

Condición:

Las vocales iguales deben estar juntas.

De la condición se tiene:

$$\left.\begin{matrix}\overbrace{K\ A\ \underbrace{T\ T}_{2}\ \boxed{I\ I}}^{5\text{ elementos}}\\ \Downarrow\\ \text{juntas, como si}\\ \text{fuera un solo}\\ \text{elemento}\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\text{Número total de}\\ \text{ordenamientos}\end{matrix} = P^{5}_{2}$$

las letras T

donde

$$P^{5}_{2}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2\times1}=60$$

Por lo tanto, el número total de ordenamientos diferentes es 60.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 21

¿Cuál será el número de letras de una palabra sabiendo que el número de combinaciones tomadas de 2 a 2 es al número de combinaciones tomadas de 3 a 3, como 3 es a 5?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución

Se pide el número de letras de una palabra: n

Dato:

$$\frac{\text{N.° de combinaciones de 2 en 2}}{\text{N.° de combinaciones de 3 en 3}}=\frac{3}{5}$$

Del dato se obtiene:

$$\frac{C_2^n}{C_3^n}=\frac{3}{5}$$

$$5C_2^n=3C_3^n$$

$$5\times\frac{\cancel{n}\,(\cancel{n-1})}{\cancel{2}\times\cancel{1}}=\cancel{3}\times\frac{\cancel{n}\,(\cancel{n-1})(n-2)}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}$$

$$5=n-2$$

$\therefore\ n=7$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 22

¿De cuántas maneras se pueden ubicar 4 parejas de esposos en una mesa circular para jugar casino, si estas parejas juegan siempre juntas?

A) 364 B) 50 C) 24
D) 124 E) 96

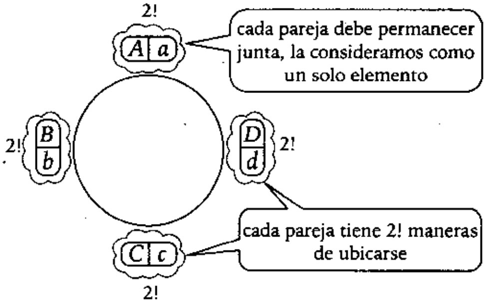
Resolución

Se pide el número de maneras diferentes de ubicar 4 parejas de esposos en una mesa circular.

Condición

Las parejas siempre juegan juntas.

Como se trata de ubicar (ordenar) alrededor de un objeto (mesa), estamos ante el caso de una permutación circular.



$$\begin{matrix}\text{N.° de maneras}\\ \text{diferentes}\end{matrix}=P_{C_4}\times(2!)^4$$

$$\begin{matrix}\text{N.° de maneras}\\ \text{diferentes}\end{matrix}=(4-1)!\times 2^4$$

$$\therefore\ \begin{matrix}\text{N.° de maneras}\\ \text{diferentes}\end{matrix}=96$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Un club tiene 15 miembros (10 hombres y 5 mujeres). ¿Cuántos comités de 8 miembros se pueden formar, si cada comité debe tener 3 mujeres?

A) 2520 B) 2585 C) 1348
D) 2250 E) 5258

Resolución

Se pide el número de comités formado por 8 miembros.

Condición:

Cada comité debe tener 3 mujeres.

De la *condición, se deduce que se elegirán 5* hombres de los 10 para completar el comité de 8 personas. Es decir:

de 10 hombres se eligen y de 5 mujeres se eligen

N.° de maneras de formar el comité de 8 miembros: 5 y 3 (condición)

$$= C_5^{10} \times C_3^5$$

$$\text{N.° de maneras} = \frac{\cancel{10}\times 9\times \cancel{8}\times 7\times \cancel{6}}{\cancel{5}\times \cancel{4}\times 3\times \cancel{2}\times 1}\times\frac{5\times 4}{2\times 1}$$

$\therefore$ N.° de maneras=2520

Clave **A**

PROBLEMA N.° 24

Alrededor de una mesa circular de 6 asientos se ubican 2 mujeres y 3 hombres. ¿De cuántas formas podrán ubicarse, si el asiento vacío debe quedar entre las dos mujeres?

A) 6 B) 12 C) 32
D) 24 E) 48

Resolución

Se pide el número de maneras diferentes de ubicar 2 mujeres y 3 hombres en una mesa circular con 6 asientos.

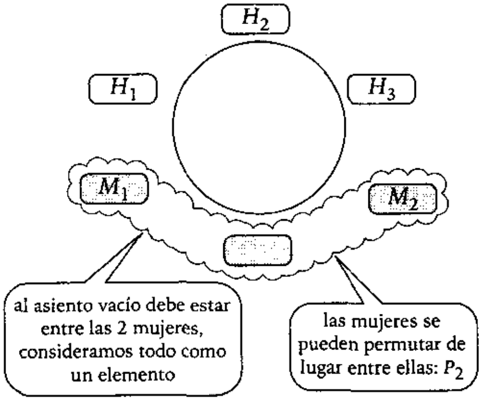
Condición:

El asiento vacío debe quedar entre las mujeres.

De los datos graficamos lo siguiente:

H_1, H_2 y H_3: 3 hombres

M_1 y M_2: 2 mujeres



al asiento vacío debe estar entre las 2 mujeres, consideramos todo como un elemento

las mujeres se pueden permutar de lugar entre ellas: P_2

Del gráfico, se obtiene que:

$$\text{N.° de maneras diferentes} = P_{C_4} \times \overset{\text{mujeres}}{P_2}$$

$$\text{N.° de maneras diferentes} = (4-1)!\times 2!$$

$$\therefore\ \text{N.° de maneras diferentes} = 12$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 25

Hay dos obras de 3 volúmenes cada una y otras dos de 2 volúmenes cada una. ¿De cuántas maneras puede colocarse los 10 libros en un estante, si deben quedar de tal manera que no se separen los volúmenes de la misma obra?

A) 5634 B) 1465 C) 6345
D) 3456 E) 4616

Resolución

Se pide el número de maneras diferentes de ubicar 10 libros en un estante.

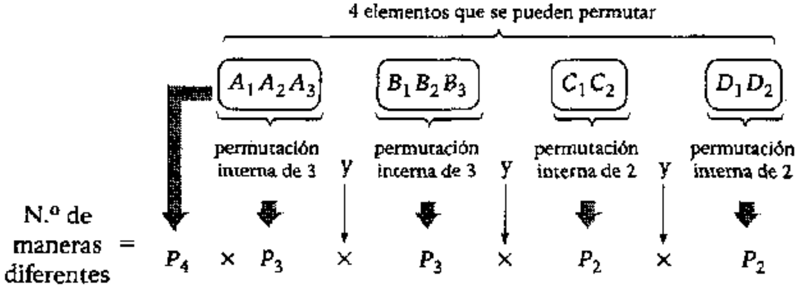
Condición: los volúmenes de la misma obra no deben separarse.

De los datos se tiene:

$$\left.\begin{matrix} A_1, A_2, A_3 \\ B_1, B_2, B_3 \end{matrix}\right\} \text{2 obras de 3 volúmenes c/u}$$

$$\left.\begin{matrix} C_1, C_2 \\ D_1, D_2 \end{matrix}\right\} \text{2 obras de 2 volúmenes c/u}$$

Al ubicarlos en un estante, tenemos lo siguiente:



$$\therefore \begin{matrix}\text{N.º de}\\ \text{maneras}\\ \text{diferentes}\end{matrix} = 4! \times 3! \times 3! \times 2! \times 2! = 3456$$

Clave D

PROBLEMA N.° 26

¿De cuántas maneras pueden sentarse correctamente $2n$ personas alrededor de una mesa circular de modo que n de ellas siempre queden juntas?

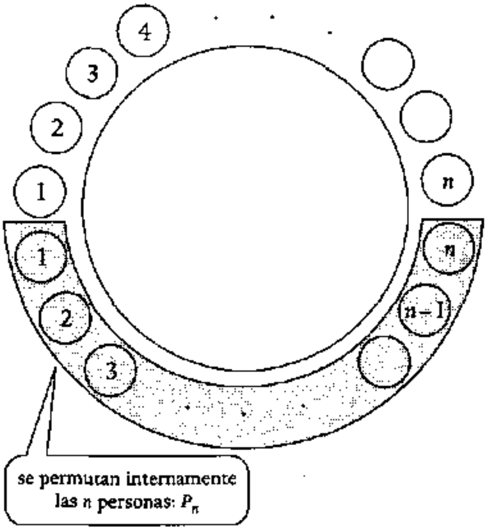
A) n^2 B) $2n!$ C) $(n^2)!$ D) $2(n!)$ E) $(n!)^2$

Resolución

Se pide el número de formas diferentes de sentarse $2n$ personas alrededor de una mesa circular.

Condición: n personas siempre deben estar juntas.

De los datos, graficamos lo siguiente:



Alrededor de la mesa circular consideramos $(n+1)$ elementos: el bloque y los otros n elementos.

Del gráfico:

$$\begin{array}{lccc} & \text{Permutación externa} & \text{y} & \text{Permutación interna} \\ \text{N.° de maneras diferentes} = & P_{C(n+1)} & \times & P_n \end{array}$$

$$\text{N.° de maneras diferentes} = (n+1-1)! \times n!$$

$$\therefore \text{N.° de maneras diferentes} = (n!)^2$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

En una tienda hay 6 camisas y 5 pantalones que me gustan. Si decido comprar 3 camisas y 2 pantalones, ¿de cuántas maneras diferentes puedo escoger las prendas que me gustan?

A) 100 B) 120 C) 200
D) 240 E) 480

Resolución

Se pide el número de maneras diferentes de escoger 3 camisas y 2 pantalones.

$$\begin{array}{lcccc} & & 6 & & 5 \\ \text{Se tiene} & : & \text{camisas} & \text{y} & \text{pantalones} \\ & & \text{se eligen} & & \text{se eligen} \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & 3 & & 2 \\ \text{Se quiere} & : & \text{camisas} & \text{y} & \text{pantalones} \\ & & \Downarrow & \downarrow & \Downarrow \\ \text{N.° de maneras diferentes} & : & C_3^6 & \times & C_2^5 \end{array}$$

$$= \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{5\times4}{2\times1}$$

$$\therefore \text{N.° de maneras diferentes} = 200$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

¿Cuántas comisiones integradas por un chico y una chica pueden formarse de cinco chicos y ocho chicas, si cierto chico rehusa trabajar con dos chicas en particular?

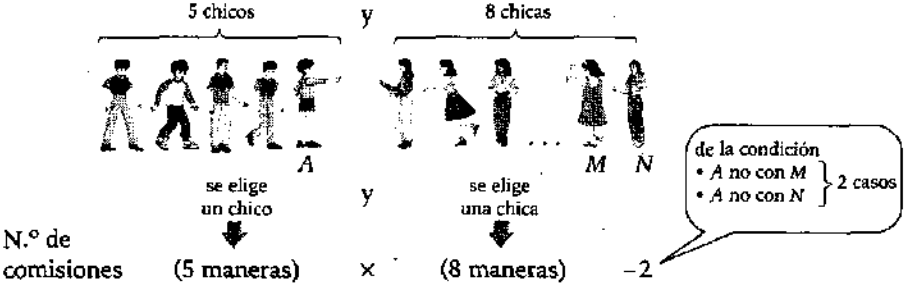
A) 38 B) 40 C) 42
D) 44 E) 46

Resolución

Se pide el número de comisiones distintas integradas por un chico y una chica.

Condición: cierto chico se rehusa a trabajar con dos chicas en particular.

De los datos se tiene:



Por lo tanto, el número de comisiones es 38.

Clave A

PROBLEMA N.° 29

Luchito desea repartir 12 cartas diferentes a Lucía, María y Aurora, en ese orden, dándole a cada una 3 cartas respectivamente. ¿De cuántas maneras diferentes podrá hacer la repartición si debe sobrarle siempre 3 cartas?

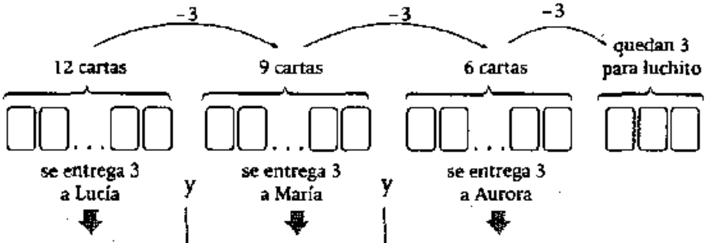
A) $\frac{12!}{108}$ B) $\frac{11!}{108}$ C) $\frac{9!}{3}$ D) 9! E) 12!

Resolución

Se pide el número de maneras distintas de repartir 9 de 12 cartas.

Condición: cada una de las 3 amigas debe recibir 3 cartas.

Grafiquemos según los datos:



N.º de maneras $C_3^{12} \times C_3^{9} \times C_3^{6}$

$$\text{N.º de maneras} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} \times \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} \times \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{3!}{\underset{1}{3!}}$$

Simplifiquemos

$$\text{N.° de maneras}=\frac{\overbrace{\cancel{12\times 11}\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3!}^{11!}}{\cancel{3\times 2\times 1}\times 3\times \cancel{2}\times 1\times 3\times 2\times 1\times 3!}$$

$$\therefore\ \text{N.° de maneras}=\frac{11!}{108}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 30

Se escoge un comité de 4 personas de 5 varones y 6 mujeres. ¿De cuántas maneras distintas se podrá escoger dicho comité si entre ellos debe haber por lo menos 2 hombres?

A) 300 B) 420 C) 125 D) 215 E) 452

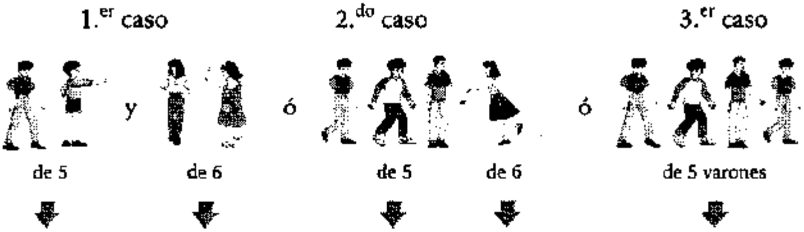
Resolución

Se pide el número de maneras distintas de escoger un comité de 4 personas.

Condición: *en el comité debe haber por lo menos 2 hombres (dos hombres como mínimo).*

Dato: el total de personas lo conforman 5 varones y 6 mujeres.

La elección de los comités se llevará a cabo, según la condición, de la siguiente manera:



$$\text{N.° de maneras}=C_2^5\times C_2^6+C_3^5\times C_1^6+C_4^5$$

por complemento

$$\text{N.° de maneras}=\frac{5\times 4}{2\times 1}\times\frac{6\times 5}{2\times 1}+\frac{5\times 4\times 3}{\cancel{3\times 2\times 1}}\times\frac{\cancel{6}}{1}+\frac{5}{1}$$

$$\text{N.° de maneras}=150+60+5$$

$$\text{N.° de maneras}=215$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 31

Si se tiene 4 consonantes diferentes y 3 vocales diferentes, ¿cuántos arreglos de 4 letras se pueden formar donde intervengan 2 vocales diferentes y 2 consonantes diferentes?

A) 36 B) 432 C) 144
D) 24 E) 720

Resolución

Se pide el número de arreglos de 4 letras diferentes.

Condición: deben tener los arreglos 2 vocales diferentes y 2 consonantes también diferentes.

Se tiene 4 consonantes diferentes y 3 vocales diferentes, de estas se debe elegir (no interesa el orden) 2 vocales y 2 consonantes diferentes y formar los arreglos (aquí si interesa el orden).

Veamos:

$$\begin{array}{cccc} & \text{escogemos 2 consonantes y 2 vocales} & \text{y} & \text{con 4 elementos diferentes formamos los arreglos} \\ \text{N.° de arreglos diferentes} = & C_2^4\times C_2^3 & \times & P_4 \\ \text{N.° de arreglos diferentes} = & \dfrac{4\times3}{2\times1}\times\dfrac{3}{1} & \times & 4! \end{array}$$

$$\therefore\ \text{N.° de arreglos diferentes} = 432$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 32

Se tiene 8 plátanos, 6 manzanas y 4 naranjas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer una ensalada de frutas con 8 de estas pero con la condición de que 4 sean plátanos, entre ellos uno de isla, insustituible (único entre los demás); además, manzanas y naranjas en igual número?

A) 3051 B) 5130 C) 1530 D) 1350 E) 3150

Resolución

Se pide las diferentes maneras de hacer una ensalada de frutas con 8 de estas.

Condición: de las 8 frutas, 4 deben ser plátanos donde uno de ellos debe ser de la isla y las otras frutas deben ser manzanas y naranjas en igual número. Se tiene:

$$\begin{array}{lccccccc} & \underbrace{\text{8 plátanos}}_{\text{1 isla+7 otros}} & , & \text{6 manzanas} & , & \text{4 naranjas} & & \\ & \downarrow \quad \downarrow \text{ se eligen 3 plátanos} & \text{y} & \downarrow \text{ se eligen 2 manzanas} & \text{y} & \downarrow \text{ se eligen 2 naranjas} & & \\ & 1\ \times\ C_3^7 & \times & C_2^6 & \times & C_2^4 & & \\ \text{N.° de maneras diferentes} = & 1\times\dfrac{7\times\cancel{6}\times5}{\cancel{3\times2\times1}} & \times & \dfrac{6\times5}{\cancel{2\times1}} & \times & \dfrac{\cancel{4}\times3}{\cancel{2\times1}} & =3150 \end{array}$$

Clave **E**

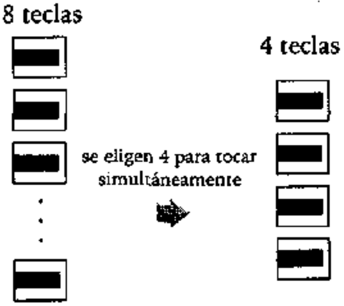
PROBLEMA N.° 33

¿Cuántos sonidos distintos pueden producirse con las ocho teclas de un piano, si solo se tocan 4 de ellas y simultáneamente?

A) 70 B) 48 C) 36
D) 50 E) 64

Resolución

Se pide cantidad de sonidos distintos que se producen al tocar 4 teclas de un piano.



$$\text{Cantidad de sonidos distintos}=C_4^8=\frac{8\times7\times\cancel{6}\times5}{4\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}=70$$

Por lo tanto, la cantidad de sonidos distintos es 70.

Clave A

PROBLEMA N.° 34

De un grupo de 8 hombres y 7 mujeres, ¿cuántos grupos mixtos de 7 personas se pueden formar sabiendo que en cada grupo hay 4 varones y el resto son mujeres?

A) 2480 B) 4520 C) 2450
D) 4250 E) 5240

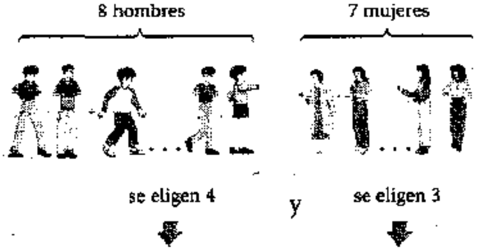
Resolución

Se pide la cantidad de grupos mixtos de 7 personas.

Condición:

En cada grupo hay 4 varones y el resto son mujeres.

De los datos, se sabe que:



$$\text{Cantidad de grupos}\quad C_4^8 \times C_3^7$$

$$\text{Cantidad de grupos}=\frac{\cancel{8}\times7\times\cancel{6}\times5}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}\times\frac{7\times\cancel{6}\times5}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}=2450$$

Por lo tanto, la cantidad de grupos mixtos es 2450

Clave C

PROBLEMA N.° 35

El asta de la bandera de un barco tiene tres posiciones en las que puede colocarse una bandera. Suponiendo que el barco lleva cuatro banderas (diferentes) para hacer señales, ¿cuántas señales diferentes pueden hacerse con dos banderas?

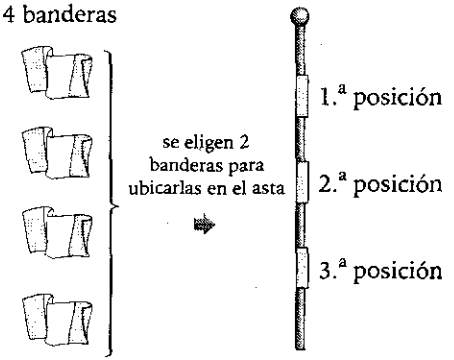
A) 72 B) 24 C) 48
D) 36 E) 12

Resolución

Se pide la cantidad de señales diferentes con 2 de 4 banderas distintas.

Dato: las banderas se colocan en un asta que presenta 3 posiciones distintas.

Grafiquemos según los datos:



$$\begin{array}{lccc} & \text{Elegir 2 banderas} & & \text{Ubicarlas en el asta} \\ \text{Cantidad de señales diferentes} = & C_2^4 & \times & P_2^3 \\ \text{Cantidad de señales diferentes} = & \dfrac{4\times 3}{2\times 1} & \times & \dfrac{3!}{(3-2)!}=36 \end{array}$$

Por lo tanto, la cantidad de señales diferentes es 36.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 36

¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en total en un campeonato que se juega a dos ruedas? Supongamos que participan 20 equipos.

A) 190
B) 380
C) 830
D) 890
E) 910

Resolución

Se pide la cantidad total de partidos de fútbol en un campeonato que se juega a dos ruedas.

Se tiene 20 equipos.

Para un partido se necesitan dos equipos:

$C_2^{20}=190$ partidos en una rueda

En dos ruedas, la cantidad total de partidos será

$$2(190)=380$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 37

Diego tiene 8 bolitas negras; y Rudy, 5 bolitas rojas. Si quieren intercambiar sus bolitas, de modo que se intercambien grupos de al menos 2 pero no más de 4, ¿cuántos intercambios posibles se darán?

A) 1180
B) 1190
C) 1345
D) 1980
E) 1520

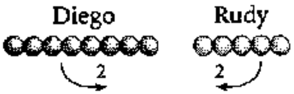
Resolución

Se pide la cantidad de intercambios posibles

Condición: de las 8 bolitas negras de Diego y 5 rojas de Rudy se deben intercambiar al menos 2, pero no más de 4.

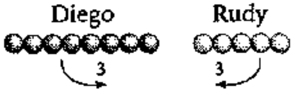
Los casos que se pueden dar son:

Caso 1: Intercambian 2 bolitas



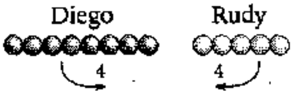
Cantidad de *intercambios* $=C_2^8\times C_2^5$

Caso 2: Intercambian 3 bolitas



Cantidad de intercambios $=C_3^8\times C_3^5$

Caso 3: Intercambian 4 bolitas



Cantidad de intercambios $=C_4^8\times C_4^5$

Caso 1 **o** **Caso 2** **o** **Caso 3**

$$\text{Cantidad total de intercambios} = C_2^8\times C_2^5 + C_3^8\times C_3^5 + C_4^8\times C_4^5$$

$$\text{Cantidad total de intercambios} = \frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1} + \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1} + \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times\frac{5}{1}$$

Por lo tanto, la cantidad total de intercambios es 1190.

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 38

Si de 10 artículos, 6 de ellos son defectuosos, ¿de cuántas maneras podemos escoger 3 artículos de tal modo que entre ellos hay al menos 2 defectuosos?

A) 60 B) 50 C) 70 D) 80 E) 90

Resolución

Se pide el número de maneras diferentes de escoger 3 artículos.

Condición: de los 3 artículos al menos 2 deben ser defectuosos.

Dato: 6 artículos son defectuosos y 4 son no defectuosos.
La expresión "al menos 2 defectuosos" quiere decir que debe haber 2 defectuosos o más, pero no menos. Para el problema se presentan dos casos.

		2 artículos defectuosos	y	Uno no defectuoso	o	3 artículos defectuosos
N.° de maneras diferentes	=	C_2^6	×	C_1^4	+	C_3^6
N.° de maneras diferentes	=	$\frac{6\times5}{2\times1}$	×	$\frac{4}{1}$	+	$\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

Por lo tanto, el número de maneras diferentes es 80.

Clave D

PROBLEMA N.° 39

El número de permutaciones de x objetos tomados de 6 en 6, es 720 veces el número de combinaciones de esos mismos objetos agrupados de 4 en 4. Halle el valor de x.

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

Resolución

Se pide el valor de x
Dato:

$$\begin{matrix}\text{N.° de permutaciones de } x\\ \text{objetos tomados de 6 en 6}\end{matrix} = 720\begin{pmatrix}\text{N.° de combinaciones de los}\\ x \text{ objetos agrupados de 4 en 4}\end{pmatrix}$$

Del dato:

$$P_6^x=720C_4^x$$

$$\frac{\cancel{x!}}{(x-6)!}=720\times\frac{\cancel{x!}}{4!\times(x-4)!}$$

$$4!\times(x-4)!=720(x-6)!$$

$$\cancel{24}\times(x-4)(x-5)\cancel{(x-6)!}=720\cancel{(x-6)!}$$

$$(x-4)(x-5)=30=6\times5$$

$\therefore\ x=10$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 40

¿Cuántos números enteros y diferentes, mayores que 10 y menores que 100, se pueden formar con las cifras 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 y 8?

A) 72 B) 58 C) 64
D) 50 E) 35

Resolución

Se pide la cantidad de números enteros y diferentes mayores que 10 y menores que 100 formados con las cifras:

1; 2; 3; ...; 7; 8.

Sea

$\overline{ab}$: número entero mayor que 10 pero menor que 100

Para calcular la cantidad de números hacemos lo siguiente:

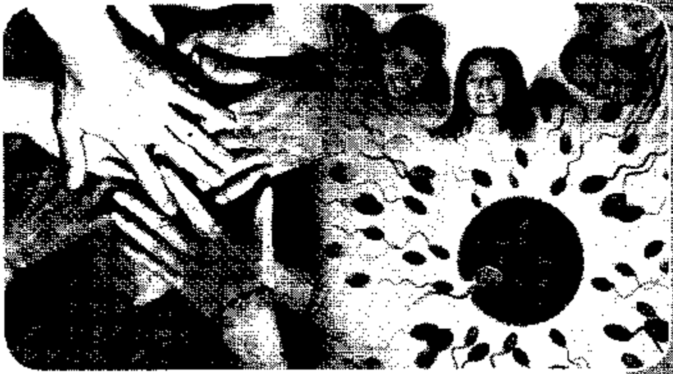
$$\begin{array}{cc} \overline{a} & \overline{b} \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{8} & \underline{8} \end{array}$$
$$8\times8=64$$

Por lo tanto, la cantidad de números que cumplen la condición es 64.

Clave **C**

Capítulo 21

Introducción al cálculo de probabilidades



Los juegos de azar muestran que durante milenios ha habido un interés por cuantificar la idea de la probabilidad, pero las descripciones matemáticas exactas de utilidad en estos problemas solo surgieron mucho después. La probabilidad constituye un importante parámetro en la determinación de las diversas causalidades obtenidas tras una serie de eventos esperados dentro de un rango estadístico. Las probabilidades pertenecen a la rama de la matemática que estudia ciertos experimentos llamados aleatorios, con los que se conocen todos los resultados posibles, pero no es posible tener certeza de cuál será en particular el resultado del experimento.

Capítulo 21

Introducción al cálculo de probabilidades

PROBLEMA N.° 1

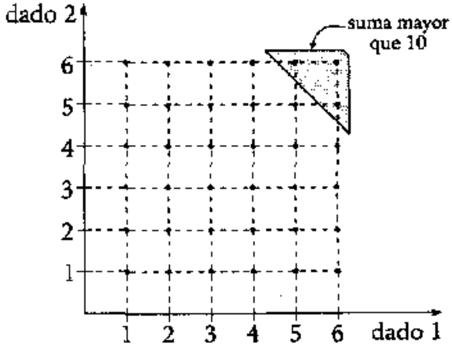
Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor que diez?

A) 11/12
B) 10/15
C) 13/12
D) 1/12
E) 13/15

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor que 10?

Al lanzar 2 dados se obtienen los posibles resultados:



Casos favorables: 3
Casos totales: 36

$$\therefore \quad P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{suma mayor}\\ \text{que 10}\end{smallmatrix}\right)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

Clave D

PROBLEMA N.° 2

Se lanzan tres dados. Halle la probabilidad de obtener exactamente un as (el número uno).

A) 28/72
B) 52/72
C) 30/72
D) 25/72
E) 42/72

Resolución

Piden hallar la probabilidad de obtener exactamente un as.

Al lanzar tres dados, tendremos:

	1.er dado	y	2.° dado	y	3.er dado	
casos totales:	6	×	6	×	6	=216

Se quiere obtener exactamente un as, para ello hay tres opciones: en el primer dado o en el segundo dado o en el tercer dado.

Así

$$\text{casos favorables: }\left(\underset{\substack{\text{aquí}\\ \text{sale}\\ \text{el "as"}}}{\overset{\text{1.}^{\text{er}}\text{ dado}}{1}} \times \underset{\substack{\text{aquí}\\ \text{no sale}\\ \text{el "as"}}}{\overset{\text{2.}^{\text{o}}\text{ dado}}{5}} \times \underset{\substack{\text{aquí}\\ \text{no sale}\\ \text{el "as"}}}{\overset{\text{3.}^{\text{er}}\text{ dado}}{5}}\right) \times \underset{\substack{\text{el "as" se}\\ \text{puede encontrar}\\ \text{en cualquiera}\\ \text{de los 3 dados}}}{3} = 75$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{obtener}\\ \text{exactamente}\\ \text{un as}}\right)} = \frac{75}{216} = \frac{25}{72}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 3

En una caja hay 10 bolas de billar; de las cuales solo cuatro son amarillas, se toman tres al azar. Halle la probabilidad de que por lo menos una resulte de color amarillo.

A) 1/30 B) 15/24 C) 10/12
D) 1/6 E) 5/6

Resolución

Piden hallar la probabilidad de que por lo menos una bola resulte de color amarillo.

Se extrae 3 bolas de:

Utilizamos la probabilidad por complemento

$$P_{\left(\substack{\text{por lo menos}\\ \text{una bola}\\ \text{amarilla}}\right)} = 1 - P_{\left(\substack{\text{ninguna}\\ \text{bola}\\ \text{amarilla}}\right)}$$

Calculando

$$P_{\left(\substack{\text{ninguna}\\ \text{bola amarilla}}\right)} = \frac{C_3^6 \rightarrow \text{las no amarillas}}{C_3^{10} \rightarrow \text{las totales}} = \frac{1}{6}$$

Reemplazamos

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{por lo menos}\\ \text{una bola}\\ \text{amarilla}}\right)} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 4

De un total de 52 cartas, se extraen 2 a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que dichas cartas sean de espadas?

A) $\frac{13}{52}$ B) $\frac{1}{17}$ C) $\frac{1}{23}$

D) $\frac{1}{52}$ E) $\frac{3}{17}$

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que dichas cartas sean de espadas?
De un total de 52 cartas, se extraen 2 a la vez.

Recuerda

52 cartas
- 13 de corazones
- 13 de espadas
- 13 de diamantes
- 13 de tréboles

Luego
Casos favorables:

$C_2^{13} \leftarrow$ de espadas

Casos totales:

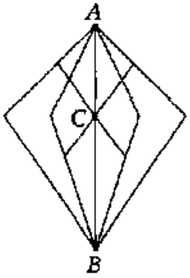
$C_2^{52} \leftarrow$ total de cartas

$$\therefore\quad P_{\left(\substack{\text{las dos cartas}\\ \text{son de espadas}}\right)} = \frac{C_2^{13}}{C_2^{52}} = \frac{1}{17}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 5

¿Cuál es la probabilidad de que una persona que realiza un paseo aleatorio pase por *C*, si inicialmente partió de *A* y en ningún momento debe retroceder respecto a su meta que es *B*?



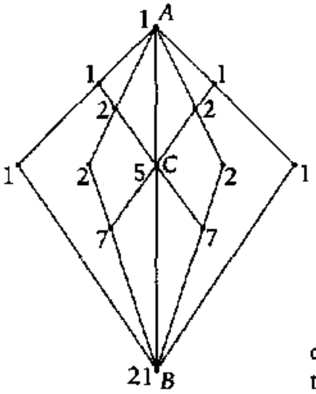
A) $\frac{5}{21}$ B) $\frac{6}{13}$ C) $\frac{5}{7}$

D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{7}{9}$

Resolución

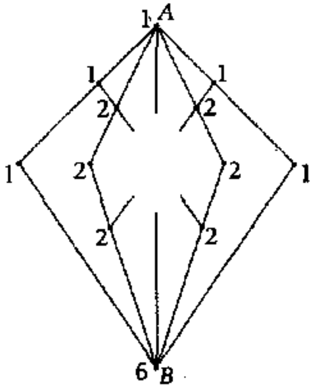
Piden: ¿cuál es la probabilidad de que una persona que realiza un paseo aleatorio pase por *C*?

Analizamos el total de caminos posibles:



casos totales=21

Analizamos los caminos posibles sin pasar por el punto C.



Número de recorridos sin pasar por C=6

$$\text{Número de recorridos pasando por C} = \underbrace{21}_{\text{totales}} - \underbrace{6}_{\substack{\text{sin pasar}\\ \text{por C}}} = 15 \leftarrow \text{casos favorables}$$

$$\therefore\quad P_{\left(\substack{\text{realizar un}\\ \textit{recorrido}\\ \text{pasando por C}}\right)} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 6

Se lanzan dos dados insesgados (no cargados) un blanco y otro negro. Halle la probabilidad de

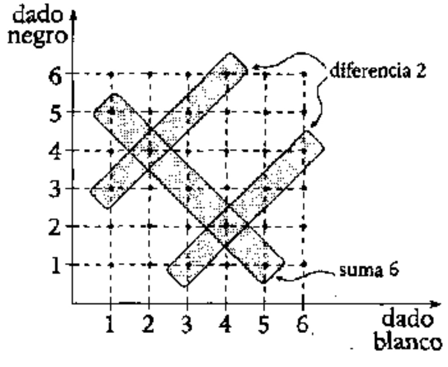
I. sacar la suma 6.
II. sacar la diferencia 2
III. sacar la diferencia 2 ó la suma 6.
IV. sacar la suma 6 y la diferencia 2.

A) 5/36; 7/9; 13/36; 5/162
B) 5/36; 2/9; 13/36; 5/162
C) 5/36; 2/7; 13/36; 5/162
D) 5/36; 2/9; 13/37; 5/162
E) 5/36; 2/7; 13/37; 5/162

Resolución

Piden hallar la probabilidad de I, II, III y IV.

Al lanzar dos dados (uno blanco y uno negro) obtenemos



I. $P_{\left(\substack{\text{sacar}\\ \text{suma 6}}\right)}=\dfrac{5}{36}$

II. $P_{\left(\substack{\text{sacar}\\ \text{diferencia 2}}\right)}=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

III. $P_{\left(\substack{\text{sacar diferencia 2}\\ \text{o suma 6}}\right)}=\dfrac{5}{36}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{13}{36}$

IV. $P_{\left(\substack{\text{sacar suma 6}\\ \text{y diferencia 2}}\right)}=\dfrac{5}{36}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{5}{162}$

Por lo tanto, las probabilidades pedidas son

$\dfrac{5}{36};\dfrac{2}{9};\dfrac{13}{36};\dfrac{5}{162}$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 7

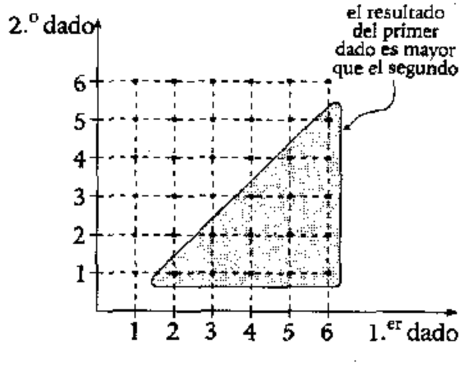
Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el segundo?

A) 2/36 B) 6/18 C) 5/12
D) 6/36 E) 2/6

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el segundo?

Al lanzar 2 dados, obtenemos



Casos favorables=15
Casos totales=36

$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{el resultado del}\\ \text{primer dado mayor}\\ \text{que el segundo dado}}\right)}=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 8

Si se arrojan 6 monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 caras y 2 sellos?

A) 1/64 B) 63/64 C) 1/5 D) 1/2 E) 15/64

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 caras y 2 sellos?

Al lanzar 6 monedas podemos obtener:

$$\text{N.° casos totales}: \overset{\text{moneda 1}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\text{moneda 2}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\text{moneda 3}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\text{moneda 4}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\text{moneda 5}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\text{moneda 6}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} = 2^6 \rightarrow \text{casos totales}=64$$

Se quiere obtener 4 caras y 2 sellos.

casos favorables: CCCCSS; CCCSCS; ...

$\rightarrow$ N.° casos favorables: $P^6_{4;2}=\dfrac{6!}{4!\times 2!}=15$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{obtener 4 caras}\\ \text{y 2 sellos}}\right)}=\frac{15}{64}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 9

En una habitación, 6 personas tienen respectivamente S/.1; S/.2; S/.3; S/.4; S/.5 y S./6. Se eligen tres personas al azar y se apunta el número de soles que tiene cada uno. ¿Cuál es la *probabilidad* de que *uno de los números* de soles escrito sea 3?

A) 2/3
B) 9/11
C) 1/2
D) 1/7
E) 3/5

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que uno de los números de soles escrito sea 3?

Se tiene

Se eligen tres personas al azar:

N.° casos totales= $C^6_3=20$

Luego, si consideramos ya elegido al S/.3, entonces solo faltaría seleccionar dos de las cinco cantidades restantes.

N.° casos favorables= $C^5_2=10$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{uno de los números}\\ \text{elegidos es el 3}}\right)}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 10

En una carrera de caballos, el caballo *A* tiene las apuestas 5:1 en su contra; mientras el caballo *B* las tiene 9:1 en su contra. ¿Cuál es la probabilidad de que cualquiera de estos dos caballos gane?

Obs.: La notación *a*:*b* nos indica *a* apuestas a favor y *b* en contra.

A) 15/17 B) 13/16 C) 13/19
D) 14/17 E) 4/15

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que cualquiera de estos dos caballos gane?

Se sabe que:

apuestas del caballo *A*: $\underset{\text{a favor}}{\boxed{1\times5}}\underset{\text{en contra}}{\boxed{5\times5}} \rightarrow \overset{\text{total}}{6\times5=30}$

apuestas del caballo *B*: $\underset{\text{a favor}}{\boxed{1\times3}}\underset{\text{en contra}}{\boxed{9\times3}} \rightarrow \overset{\text{total}}{10\times3=30}$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{que gane}\\ A\text{ o }B}\right)}=\frac{5+3}{30}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

Clave **E**

PROBLEMA N.° 11

Se escogen, al azar, cinco planchas de un grupo de quince de las cuales cinco son defectuosas. Halle la probabilidad de que al menos tres sean defectuosas.

A) 187/1001
B) 185/1001
C) 167/1001
D) 178/1001
E) 170/1001

Resolución

Piden hallar la probabilidad de que al menos 3 sean defectuosas.

Se tiene:

$$\overbrace{\underset{\text{defectuosas}}{\boxed{5}}\qquad\underset{\text{buenas}}{\boxed{10}}}^{\text{planchas}}$$

Se extraen 5 planchas:

N.° de casos totales$=C_5^{15\leftarrow\text{total}}$

De los cuales al menos 3 sean defectuosas.

$$\text{N.° de casos favorables}=\underset{\uparrow\ \text{defect.}}{C_3^5}\times C_2^{10}+\underset{\uparrow\ \text{defect.}}{C_4^5}\times C_1^{10}+\underset{\uparrow\ \text{defect.}}{C_5^5}$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{al menos}\\ \text{3 sean}\\ \text{defectuosas}}\right)}=\frac{C_3^5\times C_2^{10}+C_4^5\times C_1^{10}+C_5^5}{C_5^{15}}=\frac{167}{1001}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 12

La probabilidad de aprobar Matemática I es 0,8, la probabilidad de no aprobar Física I es 0,75 y la probabilidad de aprobar sólo uno de dichos cursos es 0,79. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar Física I, si sabemos que no se aprobó Matemática I?

A) 3/4 B) 2/7 C) 3/25
D) 2/25 E) 5/17

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de aprobar Física I si sabemos que no se aprobó Matemática I?

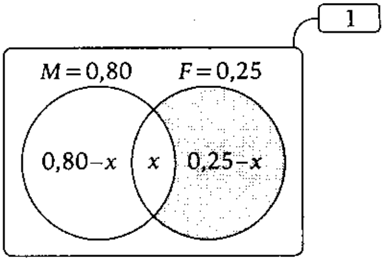
Datos

$P_{(M)}=0{,}8;$

$P_{(N\text{ o }F)}=0{,}75;\ \rightarrow\ P_{(F)}=0{,}25$

$P_{(M\text{ o }F)}=0{,}79$

Gráficamente



Luego, $P_{(M\text{ o }F)}=0{,}79$

$$(0{,}80-x)+(0{,}25-x)=0{,}79$$

$$\rightarrow\ x=0{,}13$$

Luego, la probabilidad que aprueben Física I pero no Matemática I es $0{,}25-\underset{\substack{\downarrow\\0{,}13}}{x}=0{,}12$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{aprobar Física I}\\\text{pero no Matemática I}}\right)}=0{,}12=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 13

Se tiene una baraja de 52 cartas. Calcule la probabilidad de:

I. Obtener un rey o una reina al tomar una sola carta de la baraja.

II. Que al tomar una sola carta esta sea una reina o una espada.

III. Que al tomar una carta de la baraja y luego de ponerla de nuevo, en el mazo, se toma otro naipe, siendo ambos naipes ases.

A) 2/13; 4/13; 1/169
B) 3/13; 4/13; 1/116
C) 2/13; 4/13; 2/169
D) 2/13; 5/13; 1/169
E) 4/13; 5/13; 1/169

Resolución

Piden la probabilidad de I, II y III.

Se tiene una baraja de 52 cartas, luego

- Al tomar una sola carta de la baraja.

$$\text{I.}\quad P_{\left(\substack{\text{obtener un rey}\\\text{o una reina}}\right)}=\frac{\overset{\text{4 reyes y 4 reinas}}{8}}{52}=\frac{2}{13}$$

$$\text{II.}\quad P_{\left(\substack{\text{obtener}\\\text{una reina o}\\\text{una espada}}\right)}=\frac{\overset{\text{N.° de reinas}}{4}+\overset{\text{N.° de espadas}}{13}-1}{52}\ \leftarrow \text{Se repite la reina de espadas}$$

$$P_{\left(\substack{\text{obtener}\\\text{una reina o}\\\text{una espada}}\right)}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$$

- Al tomar una carta, obtenemos un as, devolvemos la carta extraída (el total es el mismo). Extraemos otra carta, obtenemos nuevamente as.

$$\text{III.}\quad P_{\left(\substack{\text{obtener en las 2}\\\text{cartas ases}}\right)}=\frac{\overset{\text{primer as}}{4}}{\underbrace{52\times\frac{\overset{\text{segundo as}}{4}}{52}}_{\text{el total es el mismo}}}\!\!=\frac{1}{169}$$

Por lo tanto, las probabilidades pedidas son:

$$\frac{2}{13};\ \frac{4}{13}\ \text{y}\ \frac{1}{169}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 14

Juan y cuatro amigos se ubican en una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan quede en el centro?

A) 1/5 B) 2/5 C) 3/10
D) 4/7 E) 3/13

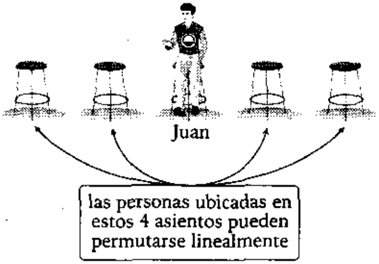
Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que Juan quede en el centro?

Se ubica en una fila (permutación lineal) Juan y cuatro amigos más.

N.° de casos totales: $P_5=5!$

Luego, Juan debe ubicarse en el centro.



N.° de casos favorables: $P_4=4!$

$$\therefore\ P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{Juan se}\\ \text{ubique en}\\ \text{el centro}\end{smallmatrix}\right)}=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 15

Para una rifa se venden 20 boletos, comprando Luis 2 de ellos.
Si se ofrecen dos premios, ¿cuál es la probabilidad de que Luis obtenga solo uno de los premios?

A) 19/95
B) 1/190
C) 3/190
D) 18/95
E) 5/98

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que Luis obtenga sólo uno de los premios?

De los 20 boletos que se pusieron a la venta, Luis compró 2 boletos.

$$\text{N.° de casos totales}=C_2^{20}=190$$

Para obtener solo uno de los 2 premios ganadores se debe comprar uno de los 2 boletos ganadores y uno de los 18 boletos no ganadores.

$$\text{N.° de casos favorables}=C_1^2\times C_1^{18}=36$$

$$\therefore\ P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{obtener}\\ \text{solo un}\\ \text{premio}\end{smallmatrix}\right)}=\frac{36}{190}=\frac{18}{95}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 16

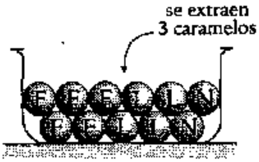
En una bolsa se tienen cinco caramelos de fresa, cuatro de limón y dos de naranja. Si extraemos tres caramelos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que entre los tres que se han sacado exista por lo menos un caramelo de cada tipo?

A) 3/15 B) 8/33 C) 7/21
D) 4/15 E) 9/15

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que entre los 3 que se han sacado exista por lo menos un caramelo de cada tipo?

En una bolsa se tiene



$$\begin{matrix}\text{N.° casos}\\ \text{totales}\end{matrix} = C_3^{11} = 165$$

Se quiere uno de cada tipo

$$\begin{matrix}\text{N.° casos}\\ \text{favorables}\end{matrix} = C_1^5 \times C_1^4 \times C_1^2 = 40$$

$$\therefore \quad P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{sacar al menos}\\ \text{uno de cada tipo}\end{smallmatrix}\right)} = \frac{40}{165} = \frac{8}{33}$$

Clave

PROBLEMA N.° 17

En una urna se tienen 12 bolas, 7 blancas y 5 negras. Se extraen 2 bolas al azar una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda sea negra?

A) 30/121 B) 35/132 C) 38/121
D) 33/121 E) 36/121

Resolución

Piden, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda sea negra?

Tenga en cuenta que son extracciones sin reposición, así que el total disminuye.

Luego:

La primera bola debe ser blanca

$$\rightarrow \quad P = \frac{7}{12}\begin{matrix}\leftarrow \text{blancas}\\ \leftarrow \text{total}\end{matrix}$$

La segunda bola debe ser negra

$$\rightarrow \quad P = \frac{5}{\underset{\text{nuevo total}}{11}} \leftarrow \text{negras}$$

$$\therefore \quad P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{la primera sea blanca}\\ \text{y la segunda sea negra}\end{smallmatrix}\right)} = \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

Clave

PROBLEMA N.° 18

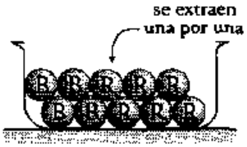
En una urna se tienen 4 bolas blancas y 6 rojas. Se extrae al azar una por una. ¿Cuál es la probabilidad de que en la tercera extracción se obtenga por primera vez la bola blanca?

A) 1/6 B) 1/15 C) 3/16
D) 2/13 E) 5/12

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que en la tercera extracción se obtenga por primera vez la bola blanca?

En urna se tiene



Considerando extracciones sin reposición, tenemos

$$\therefore\ P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{la tercera}\\ \text{bola recién}\\ \text{sea blanca}\end{smallmatrix}\right)}=\overset{\substack{1.^{\text{a}}\\ \text{bola roja}}}{\frac{6}{10}}\times\overset{\substack{2.^{\text{a}}\\ \text{bola roja}}}{\frac{5}{9}}\times\overset{\substack{3.^{\text{a}}\\ \text{bola roja}}}{\frac{4}{8}}=\frac{1}{6}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 19

Si se lanza un dado legal, ¿cuál es la probabilidad de obtener un puntaje mayor que 2?

A) 2/7 B) 2/5 C) 2/3
D) 3/5 E) 5/7

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de obtener un puntaje mayor que 2?

Al lanzar un dado:

casos favorables: {3; 4; 5 y 6} → 4 casos.

casos totales: {1; 2; 3; 4; 5 y 6} → 6 casos.

$$\therefore\ P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{puntaje}\\ \text{mayor que 2}\end{smallmatrix}\right)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

Entre los números 1; 2; 3; ...; 50 se escoge un número al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 u 8?

A) 0,24 B) 0,48 C) 0,36
D) 0,32 E) 0,49

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 u 8?
Del conjunto: {1; 2; 3; 4; ... ; 50}, se escoge un número al azar:
casos totales: 50 (cualquier número)
Luego, divisibles por 6 u 8:
casos favorables:

$$\underbrace{8}_{\text{cantidad de números } \overset{\circ}{6}}+\underbrace{6}_{\text{cantidad de números } \overset{\circ}{8}}-\underbrace{2}_{\substack{\text{aquellos números}\\ \overset{\circ}{6}\text{ y }\overset{\circ}{8}\text{, simultáneamente}\\ (24\text{ y }48)}}=12$$

$$\therefore\ P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{el número}\\ \text{sea } \overset{\circ}{6} \text{ u } \overset{\circ}{8}\end{smallmatrix}\right)}=\frac{12}{50}=0{,}24$$

Clave **A**

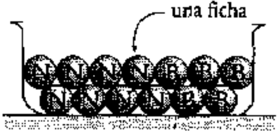
PROBLEMA N.° 21

En una urna hay 8 fichas negras y 5 fichas blancas. Se extrae una ficha al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de color negro?

A) 7/15 B) 3/17 C) 8/13
D) 9/13 E) 5/31

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que sea de color negro?
En una urna se tiene



$$\therefore\ P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{ficha de}\\ \text{color negro}\end{smallmatrix}\right)}=\frac{\overset{\text{fichas negras}}{C_1^8}}{\underset{\text{total}}{C_1^{13}}}=\frac{8}{13}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 22

¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 caras en 4 tiros de una moneda y una suma igual a 11 en un tiro de dos dados?

A) 3/73 B) 5/72 C) 17/72 D) 2/73 E) 1/72

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 caras en 4 tipos de una moneda y una suma igual a 11 en un tiro de 2 dados?

Analizando cada evento en forma independiente

- Lanzamiento de una moneda 4 veces

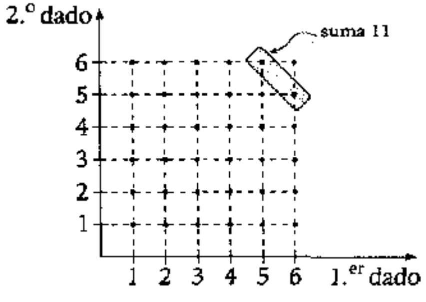
$$\text{N.° casos totales} = \overset{\substack{1.^{er}\\ \text{lanzam.}}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\substack{2.^{o}\\ \text{lanzam.}}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\substack{3.^{er}\\ \text{lanzam.}}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} \times \overset{\substack{4.^{o}\\ \text{lanzam.}}}{\underset{\text{cara o sello}}{2}} = 16$$

Se quiere obtener

todas las permutaciones posibles

$$\longrightarrow \text{N.° de casos favorables} = P^4_{3;1} = \frac{4!}{3!\times 1!} = 4$$

- Al lanzar 2 dados



N.° total de casos=36 y N.° de casos favorables=2

$$\therefore \quad P_{\left(\substack{\text{obtener 3 caras}\\ \text{y suma 11 en 2}\\ \text{dados}}\right)} = \frac{4}{16}\times\frac{2}{36} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{18} = \frac{1}{72}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 23

En una urna hay 10 bolitas numeradas del 1 al 10. Se extraen de esta urna 2 bolitas al azar. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento aleatorio?

A) 45 B) 53 C) 62
D) 47 E) 70

Resolución

Piden: ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento aleatorio?
En una urna hay 10 bolitas enumeradas del 1 al 10. Se extraen 2 bolitas al azar.

$$\underset{\text{de casos}}{\text{total}}=C_2^{10}=45$$

$\therefore\ n(\Omega)=45$

Clave **A**

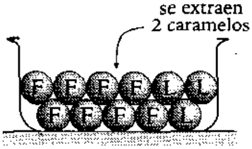
PROBLEMA N.° 24

En una bolsa se tienen 8 caramelos de fresa y 3 de limón. Si se extraen al azar 2 caramelos; ¿cuál es la probabilidad de que salgan 2 caramelos de fresa?

A) 31/45 B) 13/45 C) 28/55
D) 29/45 E) 17/45

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que salgan 2 caramelos de fresa?



$$\underset{\text{totales}}{\text{N.°casos}}=C_2^{11}=55$$

Queremos que los 2 caramelos sean de fresa

$$\underset{\text{favorables}}{\text{N.° casos}}=C_2^{\overset{\text{fresa}}{8}}=28$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{que salgan 2}\\ \text{caramelos}\\ \text{de fresa}}\right)}=\frac{28}{55}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

Se escribe al azar un número de 2 cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho número escrito sea múltiplo de 5?

A) 1/5 B) 1/13 C) 2/15
D) 1/17 E) 3/17

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que dicho número sea múltiplo de 5?
Se escribe un número de 2 cifras $(\overline{ab})$

$$\underset{\text{de casos}}{\text{N.° total}}=\overset{\overline{a\quad b}}{\overset{\downarrow\quad\downarrow}{9\times10}}=90$$

De estos números, determinemos los múltiplos de 5:

$$\underset{\text{favor}}{\text{casos a}}:\ \underbrace{10;\ 15;\ 20;\ \ldots\ ;\ 90;\ 95}$$

$$\underset{\text{favorables}}{\text{N.° casos}}=18$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{dicho número}\\ \text{es múltiplo de 5}}\right)}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 26

Una moneda se lanza 4 veces. Calcule la probabilidad de que haya salido un número igual de caras y sellos.

A) 2/5 B) 7/10 C) 11/13 D) 3/7 E) 3/8

Resolución

Piden calcular la probabilidad de obtener 2 caras y 2 sellos.
Al lanzar una moneda 4 veces.

$$\text{N.° casos totales} = \begin{array}{c}1.^{\text{er}}\\ \textbf{lanzam.}\\ \underbrace{2}_{\text{cara o sello}}\end{array} \times \begin{array}{c}2.^{\text{o}}\\ \textbf{lanzam.}\\ \underbrace{2}_{\text{cara o sello}}\end{array} \times \begin{array}{c}3.^{\text{er}}\\ \textbf{lanzam.}\\ \underbrace{2}_{\text{cara o sello}}\end{array} \times \begin{array}{c}4.^{\text{o}}\\ \textbf{lanzam.}\\ \underbrace{2}_{\text{cara o sello}}\end{array} = 16$$

Se quiere 2 caras y 2 sellos (C C S S)

$$\text{N.° casos favorables} = P^{4}_{2;\,2} = \frac{4!}{2!\times 2!} = 6$$

$$\therefore\ P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{obtener}\\ \text{2 caras y}\\ \text{2 sellos}\end{smallmatrix}\right)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 27

Se reunieron 10 hombres y 5 mujeres para elegir un presidente (a) dentro de los presentes. ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer sea elegida?

A) 1/5 B) 1/3 C) 3/15 D) 1/7 E) 4/13

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que una mujer sea elegida?

Se reunieron: 10 hombres y 5 mujeres, se elige uno de ellos como presidente.

$$\text{N.° casos totales} = C^{15}_{1} = 15$$

Luego, en el caso que el elegido sea una mujer, tenemos

$$\text{N.° casos favorables}=\overset{\text{mujeres}}{C_1^5}=5$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{una mujer}\\ \text{sea elegida}}\right)}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

Clave **B**

PROBLEMA N.° 28

Una empresa quiere contratar un empleado y se presentan 3 candidatos: *M*, *N*, *P*. Las probabilidades de *M* son de 7 contra 5 y las de *N* de 1 contra 3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene *P* de ocupar la vacante?

A) 1/12 B) 3/12 C) 1/5
D) 1/6 E) 1/10

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad que tiene *P* de ocupar la vacante?

Se presentan 3 candidatos: *M*, *N* y *P*.

$$\text{opción de } M:\ \underset{\text{a favor}}{\boxed{7}}\underset{\text{en contra}}{\boxed{5}}\ \longrightarrow\ \overset{\text{total}}{12}$$

$$\text{opción de } N:\ \underset{\text{a favor}}{\boxed{1\times 3}}\underset{\text{en contra}}{\boxed{3\times 3}}\ \rightarrow\ \overset{\text{total}}{4\times 3}$$

Evaluando las opciones de los candidatos *M*, *N* y *P*, simultáneamente:

$$\overbrace{\underset{\substack{\text{a favor}\\ \text{de } M}}{\boxed{7}}\underset{\substack{\text{a favor}\\ \text{de } N}}{\boxed{3}}\underset{\substack{\text{a favor}\\ \text{de } P}}{\boxed{2}}}^{12}$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{ocupe la}\\ \text{vacante el}\\ \text{candidato } P}\right)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Clave **D**

PROBLEMA N.° 29

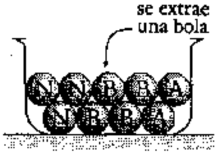
De una caja que contiene 3 bolas negras, 4 blancas y 2 amarillas, se extrae al azar una de ellas. Halle la probabilidad de que la bola extraída no sea negra.

A) 2/7 B) 1/5 C) 2/3
D) 3/5 E) 7/9

Resolución

Piden hallar la probabilidad de que la bola extraída no sea negra.

En una caja se tiene



$$\text{N.° casos totales}=C_1^9=9$$

Se quiere que la bola extraída no sea negra. Entonces, que sea blanca o amarilla.

$$\text{N.° casos favorables}=\overset{\text{blanca}}{C_1^4}+\overset{\text{amarilla}}{C_1^2}=4+2=6$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{la bola no}\\ \text{sea negra}}\right)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Nueve libros, de los cuales 5 son de Razonamiento Matemático y 4 de Razonamiento Verbal, se colocan al azar en una estantería. Halle la probabilidad de que los libros de cada materia estén juntos.

A) 7/63 B) 1/63 C) 3/57
D) 3/62 E) 2/63

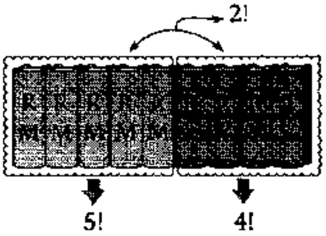
Resolución

Piden hallar la probabilidad de que los libros de cada materia estén juntos.

Se ubican 9 libros (5 de RM y 4 de RV) en un estante (permutación lineal).

N.° casos totales $= P_{(9)} = 9!$

Queremos que los libros por materia se ubiquen juntos.



$$\text{N.° casos favorables} = \underbrace{5! \times 4!}_{\text{permutación interna}} \times \underbrace{2!}_{\text{permutación en grupos}}$$

$$\therefore \quad P_{\left(\substack{\text{cada materia}\\ \text{estén juntos}}\right)} = \frac{5! \times 4! \times 2!}{9!} = \frac{1}{63}$$

Clave [illegible]

PROBLEMA N.° 31

Si se lanzan 3 monedas, ¿cuál es la probabilidad de no obtener 2 caras?

A) 1/8 B) 7/8 C) 5/8
D) 3/8 E) 1/2

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de no obtener 2 caras?

Al lanzar 3 monedas se puede obtener

$$\begin{array}{lccccccl} & \textbf{1.}^{\text{a}} & & \textbf{2.}^{\text{a}} & & \textbf{3.}^{\text{a}} & \\ & \textbf{moneda} & & \textbf{moneda} & & \textbf{moneda} & \\ \text{N.° casos totales} = & \underset{\text{cara o sello}}{2} & \times & \underset{\text{cara o sello}}{2} & \times & \underset{\text{cara o sello}}{2} & = 8 \end{array}$$

Se quiere obtener todos los casos posibles, con excepción de aquellos donde se presenten 2 caras.

$$\underbrace{1 \quad + \quad P_2^3 = 3 \quad + \quad 1}$$

N.° de casos favorables = 5

$$\therefore \quad P_{\left(\substack{\text{no obtener}\\ \text{2 caras}}\right)} = \frac{5}{8}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 32

Siete parejas de casados participan en un concurso. Si se escogen 2 personas al azar, halle la probabilidad de que uno sea hombre y la otra mujer.

A) 7/13 B) 5/13 C) 7/12
D) 2/13 E) 13/15

Resolución

Piden hallar la probabilidad de que uno sea hombre y la otra mujer.

En un concurso participan 7 hombres y 7 mujeres, se escoge 2 personas al azar.

$$\text{N.° casos totales} = C_2^{14} = 91$$

Se desea haber seleccionado 1 hombre y 1 mujer.

$$\text{N.° casos favorables} = \overset{\text{hombres}}{C_1^7} \times \overset{\text{mujeres}}{C_1^7} = 49$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{escoger un}\\ \text{hombre y}\\ \text{una mujer}}\right)} = \frac{49}{91} = \frac{7}{13}$$

Clave A

PROBLEMA N.° 33

En una justa deportiva internacional, 10 atletas compiten en una carrera de 1000 metros. Se otorga un primer, segundo y tercer premio. Si un país cuenta con cuatro participantes en la carrera, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga los 3 premios?

A) 1/25
B) 7/30
C) 3/25
D) 2/25
E) 1/30

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que obtenga los 3 premios?

En dicha competencia participan 10 atletas, 4 de la misma nacionalidad y 6 de otras nacionalidades.

Para los 3 primeros puestos se dan las siguientes opciones:

$$\text{N.° casos totales: } \begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{1.^{\text{er}}\text{ puesto}} & \multicolumn{1}{c}{2.^{\text{o}}\text{ puesto}} & \multicolumn{1}{c}{3.^{\text{er}}\text{ puesto}} \\ \hline 10\ \times & 9\ \times & 8 \\ \hline \end{array} = 720$$

Se quiere que estos puestos sean ocupados por los 4 atletas de la misma nacionalidad.

$$\text{N.° casos favorables: } \begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{1.^{\text{er}}\text{ puesto}} & \multicolumn{1}{c}{2.^{\text{o}}\text{ puesto}} & \multicolumn{1}{c}{3.^{\text{er}}\text{ puesto}} \\ \hline 4\ \times & 3\ \times & 2 \\ \hline \end{array} = 24$$

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{obtener los 3 premios}\\ \text{de igual nacionalidad}}\right)} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$$

Clave E

PROBLEMA N.° 34

Un grupo de 10 amigos (4 hombres y 6 mujeres), fueron de paseo. En el grupo se encuentran Nano e Yngrid. Se elige al azar una pareja de exploradores, ¿cuál es la probabilidad de que la pareja esté constituida por Nano e Yngrid?

A) 2/73
B) 2/45
C) 3/50
D) 1/45
E) 4/45

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que la pareja esté constituida por Nano e Yngrid?
El grupo está conformado por 4 hombres y 6 mujeres de lo cual se eligen 2 personas.

$$\text{N.° casos totales} = C_2^{10} = 45$$

De los cuales solo queremos una pareja (Nano e Yngrid).

N.° casos favorables = 1

$$\therefore\ P_{\left(\substack{\text{que la pareja esté conformada}\\ \text{por Nano e Yngrid}}\right)} = \frac{1}{45}$$

Clave D

PROBLEMA N.° 35

Una ficha cuyas caras están marcadas con los números 3 y 4, respectivamente, es lanzada 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 17?

A) 9/17 B) 3/16 C) 5/16 D) 7/16 E) 5/17

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de obtener un total de 17?

Al lanzar una ficha (numerada con 3 y 4) 5 veces:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & \text{1.}^{\text{er}} & & \text{2.}^{\text{do}} & & \text{3.}^{\text{er}} & & \text{4.}^{\text{to}} & & \text{5.}^{\text{to}} & & \\ & & \text{lanzam.} & & \text{lanzam.} & & \text{lanzam.} & & \text{lanzam.} & & \text{lanzam.} & & \\ \begin{array}{c}\text{N.° casos}\\ \text{totales}\end{array} & = & \underset{\text{3 ó 4}}{2} & \times & \underset{\text{3 ó 4}}{2} & \times & \underset{\text{3 ó 4}}{2} & \times & \underset{\text{3 ó 4}}{2} & \times & \underset{\text{3 ó 4}}{2} & = & 32 \end{array}$$

Para obtener suma 17 tendríamos que considerar los siguientes casos: ④ ④ ③ ③ ③

$$\begin{array}{c}\text{N.° casos}\\ \text{favorables}\end{array} = P_{2;3}^{5} = \frac{5!}{2!\times 3!} = 10 \quad \therefore \quad P_{\left(\begin{array}{c}\text{obtener}\\ \text{suma 17}\end{array}\right)} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Clave C

PROBLEMA N.° 36

Se lanzan 2 dados y una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan un número par, una cara y un número impar?

A) 1/2
B) 1/4
C) 3/5
D) 3/4
E) 2/7

Resolución

Piden: ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan un número par, una cara y un número impar?

- Al lanzar dado 1:

$$P_{(\text{par})} = \frac{1}{2}$$

- Al lanzar dado 2:

$$P_{(\text{impar})} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad P_{\left(\begin{array}{c}\text{un resultado}\\ \text{par y otro impar}\end{array}\right)} = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times \underset{\begin{array}{c}\text{par - impar}\\ \text{o}\\ \text{impar - par}\end{array}}{2} = \frac{1}{2}$$

- Al lanzar una moneda:

$$P_{(\text{cara})} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad P_{\left(\begin{array}{l}\text{un N.° par,}\\ \text{un N.° impar}\\ \text{y una cara}\end{array}\right)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Clave B

PROBLEMA N.° 37

Tres estudiantes de la academia ADUNI intervienen en una prueba de Razonamiento Matemático. Yngrid y Fernando tienen la misma probabilidad de ganar y el doble que la de Nano. Halle la probabilidad de que gane Nano o Yngrid.

A) 3/5 B) 5/7 C) 3/7
D) 2/5 E) 1/5

Resolución

Piden hallar la probabilidad de que gane Nano o Yngrid.

Se sabe que

$$\begin{tikzcd}\text{Yngrid} & \text{Fernando} \arrow[l, bend right, "="'] \arrow[r, bend left, "\times 2"] & \text{Nano}\end{tikzcd}$$

Probabilidades $2x <> \frac{2}{5}$ $2x <> \frac{2}{5}$ $x <> \frac{1}{5}$

De lo que: $2x+2x+x=1 \rightarrow x=\frac{1}{5}$

$$\therefore P_{\left(\substack{\text{gane Nano}\\ \text{o Yngrid}}\right)} = \overset{\overset{\text{Nano}}{\nearrow}}{\frac{1}{5}} + \overset{\overset{\text{Yngrid}}{\nearrow}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$$

Clave **A**

PROBLEMA N.° 38

Suponga que se tiene un dado cargado de tal forma que la probabilidad del número que salga sea proporcional al mismo. Calcule la probabilidad de la ocurrencia de:

I. Un número par.
II. Un número mayor que 4.

A) 4/7; 12/21 B) 5/7; 11/21 C) 6/7; 11/21 D) 4/7; 11/21 E) 4/7; 13/21

Resolución

Piden calcular la probabilidad de la ocurrencia de a y b.
Se sabe que

probabilidades: $\overset{1}{x<>\frac{1}{21}}\ \overset{2}{2x<>\frac{2}{21}}\ \overset{3}{3x<>\frac{3}{21}}\ \overset{4}{4x<>\frac{4}{21}}\ \overset{5}{5x<>\frac{5}{21}}\ \overset{6}{6x<>\frac{6}{21}}$

De lo que: $x+2x+3x+4x+5x+6x=1 \rightarrow x=\frac{1}{21}$

I. $P_{\left(\substack{\text{un}\\ \text{número}\\ \text{par}}\right)} = \overset{2}{\frac{2}{21}} \overset{6}{+} \overset{4}{\frac{4}{21}} \overset{6}{+} \overset{6}{\frac{6}{21}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

II. $P_{\left(\substack{\text{un número}\\ \text{mayor que 4}}\right)} = \overset{5}{\frac{5}{21}} + \overset{6}{\frac{6}{21}} = \frac{11}{21}$

Por lo tanto, las probabilidades de I y II son: $\frac{4}{7}$ y $\frac{11}{21}$.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 39

Un dado está cargado de tal modo que la probabilidad de obtener 1; 2; 3; 4; 5 ó 6 es proporcional a los números 1; 2; 3; 4; 5 y 6 respectivamente. Si se lanza este dado, calcule la probabilidad de que el resultado sea par.

A) 3/17
B) 3/7
C) 4/7
D) 5/21
E) 2/7

Resolución

Piden calcular la probabilidad de que el resultado sea par.

Del dato:

$$P_{(1)}=\frac{1}{21};\ P_{(2)}=\frac{2}{21};\ P_{(3)}=\frac{3}{21};$$

$$P_{(4)}=\frac{4}{21};\ P_{(5)}=\frac{5}{21}\ \text{ y }\ P_{(6)}=\frac{6}{21}$$

$$\therefore\quad P_{(\text{par})}=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

Clave **C**

PROBLEMA N.° 40

Digamos que las familias con hijos están bien repartidas, si están compuestos de tantos varones como mujeres. Halle la probabilidad de que una familia de 4 hijos esté bien repartida.

A) 2/7
B) 1/5
C) 3/4
D) 1/4
E) 7/9

Resolución

Piden:
Hallar la probabilidad de que una familia de 4 hijos esté bien repartida.

Por dato:
Una familia con hijos está bien repartida si está compuesta de tantos varones como mujeres.

Entonces, una familia constituida por 4 hijos presenta las siguientes posibilidades:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\textbf{hijos varones} & \textbf{hijas mujeres}\end{array} \\ \text{5 casos posibles} & \left\{\begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ \boxed{2 \qquad 2} & \rightarrow \text{bien repartida} \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\therefore\quad P_{\left(\begin{smallmatrix}\text{familia de 4 hijos}\\ \text{bien repartida}\end{smallmatrix}\right)}=\frac{1}{5}$$

Clave **B**

Capítulo

22

Lógica proposicional y de clases

En la actualidad, la lógica proposicional y de clases toma su mayor importancia asociada a la investigación científica y es la herramienta fundamental en la inferencia y predicción de sucesos con cierta recurrencia.

En nuestra actividad diaria, constantemente tomamos decisiones a partir de ciertas conclusiones que establecemos como producto de nuestra observación y relación con nuestro entorno. Por ello, la importancia del estudio de la lógica proposicional que toma como elemento básico los enunciados o proposiciones y que, a través de un proceso simple, asigna valores de verdad a la proposición compuesta, basándose en los valores de verdad de las proposiciones simples y en la naturaleza de los conectores lógicos involucrados. Así también, veremos la lógica de clases, la cual se ocupa de métodos de argumentación sólidos. Tales argumentaciones se denominan reglas de inferencia. *Si se da un conjunto de axiomas que son aceptados como verdaderos, las reglas de inferencia garantizan que solo serán derivadas consecuencias verdaderas. Con la resolución de diversos ejercicios y problemas, se podrá comprender con claridad y se verá la aplicación de estos conceptos.*

Capítulo 22

Lógica proposicional y de clases

PROBLEMA N.° 1

¿Cuántos V y F tiene la matriz principal de
$\sim[(\sim p \vee q) \to r] \wedge r$
en ese orden?

A) 2 y 6
B) 3 y 5
C) 8 (V)
D) 8 (F)
E) 6 y 2

Resolución

Piden la cantidad de V y F en la matriz principal.

p	q	r	~	[(~p	∨	q)	→	r]	∧	r
V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	F

∴ 8 (F)

Clave **D**

PROBLEMA N.° 2

Si $\sim p \vee [(p \wedge r) \to (r \leftrightarrow q)]$
es falso, halle el valor de verdad de
$[(p \to q) \vee r] \leftrightarrow (p \wedge r)$

A) V
B) F
C) V o F
D) V y F
E) No se puede determinar

Resolución

Piden hallar el valor de verdad.

Dato:

$$\sim p \vee [(p \wedge r) \to (r \leftrightarrow q)] \equiv F$$

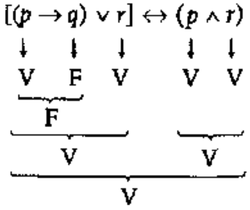
Desarrollamos

$$\underbrace{\underbrace{\sim\underset{\substack{\downarrow\\ V}}{p}}_{F} \vee \underbrace{[\underbrace{(\underset{\substack{\downarrow\\ \textcircled{V}}}{p} \wedge \underset{\substack{\downarrow\\ V}}{r})}_{V} \to \underbrace{(\underset{\substack{\downarrow\\ \textcircled{V}}}{r} \leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow\\ \textcircled{F}}}{q})}_{F}]}_{F}}_{F}$$

Se concluye que:

$p \equiv V$;
$q \equiv F$ y
$r \equiv V$

Luego



Por lo tanto, el valor veritativo es V.

Clave A

PROBLEMA N.° 3

Si $(p \rightarrow \sim q) \vee [(r \leftrightarrow \sim p) \vee (q \leftrightarrow \sim s)]$ es falsa, halle el valor de verdad de:

$(p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow s)$

A) V
B) F
C) V o F
D) V y F
E) No se puede determinar

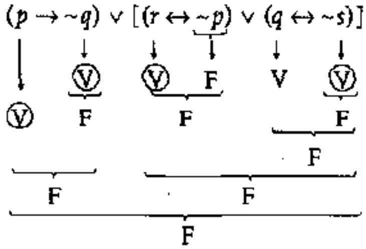
Resolución

Piden hallar el valor de verdad.

Dato:

$$(p \rightarrow \sim q) \vee [(r \leftrightarrow \sim p) \vee (q \leftrightarrow \sim s)] \equiv F$$

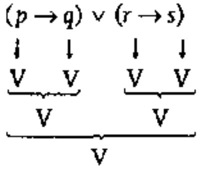
Desarrollamos



Se concluye que

$p \equiv V;\ q \equiv V;\ r \equiv V$ y $s \equiv V$

Luego



Por lo tanto, el valor veritativo es V.

Clave A

PROBLEMA N.° 4

Si las proposiciones:

$\sim[(p \vee \sim q) \wedge \sim p] \vee (r \leftrightarrow s)$ y $(r \rightarrow s)$

son equivalentes a F, entonces determine el valor de verdad de:

$\sim(p \,\Delta\, p) \vee \sim(q \leftrightarrow q)$ y

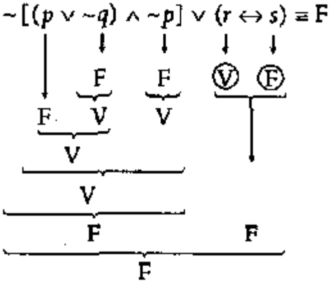
$[(p \vee q) \wedge \sim(p \rightarrow q)] \leftrightarrow (\sim r \wedge s)$

A) VV
B) FF
C) VF
D) FV
E) No se puede determinar

Resolución

Piden determinar los valores de verdad.

Se sabe



Además

$$(\underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{r}} \to \underset{\textcircled{F}}{\underset{\downarrow}{s}}) \equiv F$$

Se concluye que

$p \equiv F$; $q \equiv F$; $r \equiv V$ y $s \equiv F$.

Luego

$$\underbrace{\underbrace{\sim\underbrace{(\underset{F}{\underset{\downarrow}{p}}\,\Delta\,\underset{F}{\underset{\downarrow}{p}})}_{F}}_{V} \vee \underbrace{\sim\underbrace{(\underset{F}{\underset{\downarrow}{q}}\leftrightarrow\underset{F}{\underset{\downarrow}{q}})}_{V}}_{F}}_{\therefore\ V}$$

$$\underbrace{\underbrace{[\underbrace{(\underset{F}{\underset{\downarrow}{p}}\vee\underset{F}{\underset{\downarrow}{q}})}_{\underset{F}{\downarrow}} \wedge \underbrace{\sim\underbrace{(\underset{F}{\underset{\downarrow}{p}}\to\underset{F}{\underset{\downarrow}{q}})}_{V}}_{F}]}_{F} \leftrightarrow \underbrace{(\underbrace{\sim\underset{V}{\underset{\downarrow}{r}}}_{F}\wedge\underset{F}{\underset{\downarrow}{s}})}_{F}}_{\therefore\ V}$$

Por lo tanto, los valores de verdad son VV.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 5

Si $[(p \wedge q) \wedge r] \to \sim p$ es falso, determine los valores de verdad de p, q y r.

A) FVF B) FVV C) VVV
D) VVF E) FFF

Resolución

Piden determinar los valores de verdad de p, q y r.

Se sabe que

$$\underbrace{\underbrace{[\underbrace{(\underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{p}}\wedge\underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{q}})}_{V}\wedge\underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{r}}]}_{V} \to \underbrace{\sim\underset{V}{\underset{\downarrow}{p}}}_{F}}_{F} \equiv F$$

Por lo tanto, los valores de verdad de p, q y r son VVV.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 6

Si $\sim\{[\sim(p \to q) \to s] \to (\sim q \vee t)\}$ es verdadero, halle el valor de verdad de:
$[(p \vee q) \to r] \vee [(p \wedge r) \to (q \vee \sim t)]$

A) Verdadero
B) Falso
C) V o F
D) V y F
E) No se puede determinar

Resolución

Piden hallar el valor de verdad.
Se sabe que

$$\underbrace{\sim\underbrace{\{\underbrace{[\underbrace{\sim(\underset{?}{\underset{\downarrow}{p}}\to\underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{q}})}_{?}\to\underset{?}{\underset{\downarrow}{s}}]}_{V}\to\underbrace{(\underbrace{\sim\underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{q}}}_{F}\vee\underset{\textcircled{F}}{\underset{\downarrow}{t}})}_{F}\}}_{F}}_{V} \equiv V$$

Se concluye que

$q \equiv V$ y $t \equiv F$

Luego

$$\underbrace{\underbrace{[(\underbrace{\underset{?}{p}\vee\underset{V}{q}}_{V})\to\underset{?}{r}]}_{?}\vee\underbrace{[(\underbrace{\underset{?}{p}\wedge\underset{?}{r}}_{?})\to\underbrace{(\underbrace{\underset{V}{q}\vee\sim\underbrace{\underset{F}{t}}_{V}}_{V\ V})}_{V}]}_{V}}_{V}$$

Por lo tanto, el valor de verdad es verdadero.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 7

Si $[\sim(p\to q)\wedge\sim r]\to[p\wedge(q\vee r)]$
es falsa, halle los valores de verdad de p, q y r.

A) VFF
B) VVF
C) VVV
D) FVV
E) FFF

Resolución

Piden hallar los valores de verdad de p, q y r.
Se sabe que

$$\underbrace{\underbrace{[\sim\underbrace{(\underbrace{\underset{\textcircled{V}}{p}\to\underset{\textcircled{F}}{q}}_{F})}_{V}\wedge\sim\underbrace{\underset{\textcircled{F}}{r}}_{V}]}_{V}\to\underbrace{[\underset{V}{p}\wedge\underbrace{(\underbrace{\underset{F}{q}\vee\underset{F}{r}}_{F})}_{F}]}_{F}}_{F}\equiv F$$

Se concluye que
$p\equiv V$; $q\equiv F$ y $r\equiv F$

Por lo tanto, los valores de verdad de p, q y r son VFF.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 8

Si la proposición $(p\,\Delta\,q)\wedge\sim(q\to s)$
es verdadera, halle los valores de verdad de
$(s\wedge r)\to(p\vee s)$ y
$(s\to q)\,\Delta\,(p\vee s)$

A) VF
B) FF
C) VV
D) FV
E) No se puede determinar

Resolución

Piden hallar los valores de verdad.

Se sabe que

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{\textcircled{F}}{p}\,\Delta\,\underset{\textcircled{V}}{q})}_{V}\wedge\sim\underbrace{\underbrace{(\underset{V}{q}\to\underset{\textcircled{F}}{s})}_{F}}_{V}}_{V}\equiv V$$

Se concluye que

$p\equiv F$; $q\equiv V$ y $s\equiv F$

Luego

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{F}{s}\wedge\underset{?}{r})}_{F}\to\underbrace{(\underset{F}{p}\vee\underset{F}{s})}_{F}}_{V}\qquad\underbrace{\underbrace{(\underset{F}{s}\to\underset{V}{q})}_{V}\,\Delta\,\underbrace{(\underset{F}{p}\vee\underset{F}{s})}_{F}}_{V}$$

Por lo tanto, los valores de verdad son VV.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 9

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautológicas?

I. $\{[(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)]\wedge(q\vee p)\}\rightarrow(p\wedge q)$

II. $\{[(p\rightarrow q)\wedge(\sim p\rightarrow q)]\vee(q\vee p)\}\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$

A) solo I B) solo II C) I y II D) ninguno E) I o II

Resolución

Piden: ¿cuáles de las proposiciones son tautológicas?

I. $\{[\underbrace{(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)]\wedge(q\vee p)}\}\rightarrow(p\wedge q)$

$\{(p\wedge \underbrace{q)\wedge(q\vee p}\}\rightarrow(p\wedge q)$ absorción

$\{p\wedge\underbrace{(q\wedge[q\vee p]}\}\rightarrow(p\wedge q)$ asociativa

$\{p\wedge q\}\rightarrow(p\wedge q)$ absorción

$V \rightarrow V \equiv V$

$F \rightarrow F \equiv V$

$\therefore$ tautología

II. $\{[(p\rightarrow q)\wedge(\sim p\rightarrow q)]\vee(q\vee p)\}\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$

$\{[(\sim p\vee q)\wedge(p\vee\sim q)]\vee(q\vee p)\}\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$ del condicional

$\{[(\sim p\vee q)\wedge p]\vee[(\sim p\vee q)\wedge\sim q]\vee(q\vee p)\}\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$ distributiva

$\{[p\wedge q]\vee[\underline{\sim q\wedge\sim p}]\vee(\underline{q\vee p})\}\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$ absorción

$\{[p\wedge q]\vee(q\vee p)\}\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$ idempotencia

$\{([p\wedge q]\vee q)\vee p\}\leftrightarrow\sim(p\vee q)$ asociativa, de Morgan

$\{p\vee q\}\leftrightarrow\sim(p\vee q)$ absorción

$V \leftrightarrow F \equiv F$

$F \leftrightarrow V \equiv F$

$\therefore$ contradictorio

Por lo tanto, la proposición tautológica es solo I.

Clave A

PROBLEMA N.° 10

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Si 2+3=7 entonces 5+5=10.
II. No es verdad que 3+3=7 si y solo si 4+4=10.
III. Es falso que si París está en Francia entonces Lima está en Colombia.
IV. No es cierto que 1+1 es 3 o que 2+1=3.

A) VVFF B) VFVF C) VVVV D) FFFF E) VFFV

Resolución

Piden el valor de verdad de las cuatro proposiciones.

Analizamos cada proposición:

I. Si $\underbrace{2+3=7}$ entonces $\underbrace{5+5=10}$

$F \rightarrow V \equiv V$

II. No es verdad que $\underbrace{3+3=7}$ si y solo si $\underbrace{4+4=10}$

$\sim (F \leftrightarrow F) \equiv F$

III. Es falso que $\underbrace{\text{si París está en Francia}}$ entonces $\underbrace{\text{Lima está en Colombia}}$.

$\sim (V \rightarrow F) \equiv V$

IV. No es cierto que $\underbrace{1+1 \text{ es } 3}$ o que $\underbrace{2+1=3}$

$\sim (F \vee V) \equiv F$

Por lo tanto, los valores de verdad son VFVF.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 11

Se define la proposición: $p*q \equiv \sim p \vee q$

Halle cuántas V o F tiene la matriz principal de $(p*\sim q) \rightarrow (\sim p*q)$

A) 3V y 1F B) 1V y 3F C) 2V y 2F
D) 4V E) 4F

Resolución

Piden: ¿cuántas V o F tiene la matriz principal?

Dato: $p*q \equiv \sim p \vee q$

Luego $(p*\sim q) \rightarrow (\sim p*q)$

Reemplazamos: $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \vee q)$

Analizamos la matriz principal

p	q	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F

$\therefore$ 3 V y 1 F

Clave **A**

PROBLEMA N.° 12

Si $p_{(x)}: x^2=16$

$q_{(x)}: x-4=8$

$r_{(x)}: x^2-4 > 5$

Halle el valor de verdad de:

I. $\{[p_{(1)} \wedge p_{(3)}] \leftrightarrow [r_{(2)} \vee p_{(3)}]\} \to q_{(4)}$

II. $[p_{(2)} \wedge \sim q_{(12)}] \leftrightarrow r_{(4)}$

III. $\sim p_{(4)} \to [r_{(5)} \vee \sim q_{(4)}]$

A) FFF B) VVV C) VFV
D) VVF E) FFV

Resolución

Piden hallar el valor de verdad de las tres proposiciones.
Datos:

$p(x): x^2=16;$

$q(x): x-4=8;$

$r(x): x^2-4 > 5$

Analizamos las proposiciones:

I.
$$\underbrace{\underbrace{\{\underbrace{[\underbrace{p_{(1)}}_{F} \wedge \underbrace{p_{(3)}}_{F}]}_{F} \leftrightarrow \underbrace{[\underbrace{r_{(2)}}_{F} \vee \underbrace{p_{(3)}}_{F}]}_{F}\}}_{V} \to \underbrace{q_{(4)}}_{F}}_{F}$$

II.
$$\underbrace{\underbrace{[\underbrace{p_{(2)}}_{F} \wedge \underbrace{\sim \underbrace{q_{(12)}}_{V}}_{F}]}_{F} \leftrightarrow \underbrace{r_{(4)}}_{V}}_{F}$$

III.
$$\underbrace{\underbrace{\sim \underbrace{p_{(4)}}_{V}}_{F} \to \underbrace{[\underbrace{r_{(5)}}_{V} \vee \underbrace{\sim \underbrace{q_{(4)}}_{F}}_{V}]}_{V}}_{V}$$

Por lo tanto, los valores de verdad son FFV.

Clave E

PROBLEMA N.° 13

¿Cuál de las siguientes proposiciones es siempre falsa?

I. $[\sim(p \wedge q) \to p] \wedge \sim p$

II. $\sim[\sim(p \to q) \to (p \vee \sim q)]$

III. $[(\sim p \to q) \leftrightarrow \sim(p \to q)] \wedge \sim(p \to q)$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) I y II

Resolución

Piden: ¿cuál de las proposiciones es siempre falsa?

Analizamos las proposiciones:

I. $[\sim(p \wedge q) \to p] \wedge \sim p$

$[(p \wedge q) \vee p] \wedge \sim p$ del condicional

$\underbrace{p \wedge \sim p}_{F}$ absorción

ley lógica adicional

II. $\sim[\sim(p \to q) \to (p \vee \sim q)]$

$\sim[(p \to q) \vee (p \vee \sim q)]$ del condicional

$\sim[\sim p \vee q \vee p \vee \sim q]$ del condicional

$\sim[\underline{\sim p \vee p} \vee \underline{q \vee \sim q}]$ conmutativa

$\sim[\;V \;\vee\; V\;]$ ley lógica adicional

$\sim[V] = F$

III. $[(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \rightarrow q)] \wedge \sim(p \rightarrow q)$

$[\sim(\sim p \rightarrow q) \vee \sim(p \rightarrow q)] \wedge [(p \rightarrow q) \vee (\sim p \rightarrow q)] \wedge \sim(p \rightarrow q)$	del bicondicional del condicional
$[\sim(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)] \vee [\sim(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)] \wedge \sim(p \rightarrow q)$	absorción distribución
$[\sim p \wedge \sim q \wedge (\sim p \vee q)] \vee [p \wedge \sim q \wedge (p \vee q)] \wedge \sim(p \rightarrow q)$	del condicional
$[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)] \wedge (p \wedge \sim q)$	absorción del condicional
$\underbrace{p \wedge \sim q}_{\text{V o F}}$	absorción

Por lo tanto, las proposiciones falsas son I y II.

Clave E

PROBLEMA N.° 14

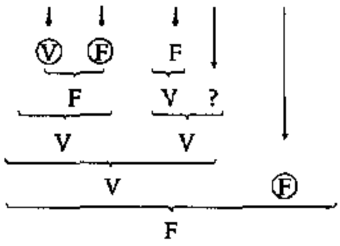
Si la proposición $[\sim(p \rightarrow q) \wedge (\sim r \vee s)] \rightarrow r$ es falsa, halle los valores de verdad de p, q y r.

A) VVV B) FFF C) VVF
D) FVV E) VFF

Resolución

Piden hallar los valores de verdad de p, q y r.
Se sabe que

$$[\sim(p \rightarrow q) \wedge (\sim r \vee s)] \rightarrow r \equiv \text{F}$$



Por lo tanto, los valores de verdad de p, q y r son VFF.

Clave E

PROBLEMA N.° 15

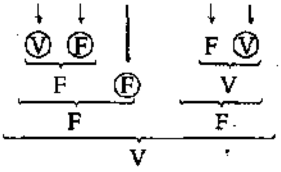
Si la proposición: $\{[(r \rightarrow s) \vee p] \rightarrow \sim(p \,\Delta\, q)\}$ es verdadera, además $p \leftrightarrow q$ es falsa, halle los valores de verdad de p, q, r y s.

A) FVFF B) FVVF C) FFFV
D) VVVF E) VFFV

Resolución

Piden hallar los valores de verdad de p, q, r y s.
Se sabe que $p \leftrightarrow q \equiv$ F,
entonces, se deduce que $p \,\Delta\, q \equiv$ V
Además

$$\{[(r \rightarrow s) \vee p] \rightarrow \sim(p \,\Delta\, q)\} \equiv \text{V}$$



Por lo tanto, los valores de verdad de p, q, r y s son FVVF.

Clave B

PROBLEMA N.° 16

Si s es verdadera y la proposición

$[(s \to p) \to (p \leftrightarrow q)] \vee (p \wedge r)$

es falsa, halle los valores de verdad de p, q y r.

A) VVV B) FFF C) VFF

D) FFV E) VFV

Resolución

Piden hallar los valores de verdad de p, q y r.

Se sabe que $s \equiv V$, además

$$[(s \to p) \to (p \leftrightarrow q)] \vee (p \wedge r) \equiv F$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\text{Ⓥ}\quad\text{Ⓥ}}_{V}\qquad\underbrace{V\quad\text{Ⓕ}}_{F}}_{F}\qquad\underbrace{V\quad\text{Ⓕ}}_{F}}_{F}$$

Por tanto, los valores de verdad de p, q y r son VFF.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 17

Dadas las proposiciones

I. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

II. $\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

III. $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

Indique cuál o cuáles son una contradicción (F).

A) solo I

B) solo II

C) solo III

D) I y II

E) I y III

Resolución

Piden: ¿cuál o cuáles de las proposiciones son contradictorias?

Analizamos las proposiciones

I. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

p	q	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$\sim q)$
V	V	F	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V

II. $\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

p	q	$\sim$	$(\sim p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$\sim q)$
V	V	F	F	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F	V	V

III.

p	q	$\sim$	$(p\leftrightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\leftrightarrow$	$\sim q)$
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V	V

Por lo tanto, solo III es una proposición contradictoria.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 18

¿Cuál o cuáles de las proposiciones son equivalentes a $\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r)$?

I. $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$
II. $p \wedge (\sim q) \wedge \sim(q \wedge r)$
III. $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

A) I y II
B) II y III
C) I y III
D) I, II y III
E) solo I

Resolución

Piden: ¿cuál o cuáles de las proposiciones son equivalentes a $\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r)$?
Desarrollamos la proposición

$\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r)$
$\sim(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$ del condicional
$p \wedge \sim q \wedge (\sim q \vee \sim r)$ de Morgan
$p \wedge \sim q \wedge \sim(q \wedge r)$ de Morgan

Luego

$$\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r) \equiv p \wedge \sim q \wedge \sim(q \wedge r)$$

Además

$p \wedge \sim q \wedge \sim(q \wedge r)$
$p \wedge \underline{\sim q} \wedge (\underline{\sim q} \vee \sim r)$ de Morgan
$p \wedge \sim q$ absorción
$p \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$ inversa de absorción

Luego

$$\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r) \equiv p \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$$

Además

$p \wedge \sim q$
$[p \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim q)]$ inversa de absorción
$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim q)$ inversa distributiva
$(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$ asociativa

Luego

$$\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r) \equiv (p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$$

Por lo tanto, I, II y III son proposiciones equivalentes.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 19

¿Cuál de las siguientes expresiones es una tautología?

I. $\sim[\sim(p \vee q) \to \sim q] \leftrightarrow (p \to q)$
II. $\sim(\sim p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q)$
III. $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$

A) I
B) II
C) III
D) I y II
E) I, II y III

Resolución

Piden: ¿cuál de las siguientes expresiones es una tautología?
Analizamos las proposiciones, teniendo:

I. $\sim[\sim(p \vee q) \to \sim q] \leftrightarrow (p \to q)$

$$\underbrace{\sim[\underbrace{(p \vee q) \vee \sim q}_{V}]}_{F} \leftrightarrow (p \to q) \quad \text{del condicional}$$

$$F \leftrightarrow (p \to q)$$

Por lo tanto, no es tautológico.

II. $\sim(\sim p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q)$

p	q	$(\sim p$	Δ	$q)$	$\leftrightarrow$	$(p \to q)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

Por lo tanto, no es tautológico.

III. $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

$\sim\{(p \wedge q) \vee (p \wedge q)\} \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$ absorción

$\sim\{(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ idempotencia del condicional

$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)$ de Morgan

Por lo tanto, es taulógica.

Por lo tanto, solo III es tautológica.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 20

De la falsedad de $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$, deduzca el valor de verdad de

I. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

II. $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

III. $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

A) FVF B) FFF C) VVV

D) VVF E) FFV

Resolución

Piden deducir el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

A partir de

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{\substack{\downarrow\\ \textcircled{V}}}{p} \rightarrow \underbrace{\sim \underset{\substack{\downarrow\\ \textcircled{V}}}{q}}_{F})}_{F} \vee \underbrace{(\underbrace{\sim \underset{\substack{\downarrow\\ \textcircled{F}}}{r}}_{V} \rightarrow \underset{\substack{\downarrow\\ \textcircled{F}}}{s})}_{F}}_{F} \equiv F$$

Se deduce que

$p \equiv V$; $q \equiv V$; $r \equiv F$ y $s \equiv F$

Analizamos las proposiciones:

I. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q \equiv \sim q \equiv F$

II. $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

$$\underbrace{\underset{\substack{\downarrow\\ V}}{q} \leftrightarrow \underbrace{[\underbrace{(\underbrace{\sim q}_{F} \vee \underset{\substack{\downarrow\\ F}}{r})}_{F} \wedge \underset{\substack{\downarrow\\ F}}{s}]}_{F}}_{F} \quad \text{absorción}$$

III. $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{\substack{\downarrow\\ V}}{p} \rightarrow \underset{\substack{\downarrow\\ F}}{r})}_{F} \rightarrow \underbrace{(\underset{\substack{\downarrow\\ V}}{p} \wedge \underbrace{\sim q}_{F})}_{F}}_{V} \quad \text{absorción}$$

Por lo tanto, los valores de verdad son FFV

Clave **E**

PROBLEMA N.° 21

¿Cuál de las siguientes expresiones son equivalentes entre sí?

I. $\sim\{(q \vee \sim p) \vee [q \wedge (r \vee \sim p)]\}$

II. $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$

III. $\sim[\sim q \rightarrow \sim p] \wedge [q \rightarrow \sim(p \rightarrow r)]$

A) I y II B) II y III C) I y III

D) todas E) ninguna

Resolución

Piden: ¿cuál de las siguientes expresiones son equivalentes?

Simplificamos las proposiciones

I. $\sim\{(q \vee \sim p) \vee [q \wedge (r \vee \sim p)]\}$

$\equiv \sim\{q \vee \sim p\}$ absorción

$\equiv \sim q \wedge p$

II. $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$

$\equiv p \wedge \sim q$ absorción

III. $\sim[\sim q \to \sim p] \wedge [q \to \sim(p \to r)]$

$\equiv [\sim q \wedge p] \wedge [\sim q \vee \sim(\sim p \vee r)]$ del condic.

$\equiv \sim q \wedge p$ absorción

Por lo tanto, todas las proposiciones son equivalentes.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 22

La proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera, teniendo r y s valores veritativos opuestos, se afirma que son ciertas:

I. $[(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$: verdadera
II. $[\sim(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$: falsa
III. $[(\sim r \wedge \sim s) \to (p \vee r)] \wedge \sim(r \wedge s)$: verdadera
IV. $[(\sim r \wedge \sim s) \to (s \vee p)]\ \Delta \sim(r \wedge p)$: verdadera

A) I y II B) II y III C) III y IV
D) I y IV E) III

Resolución

Piden determinar la veracidad de las afirmaciones.
Se sabe que r y s tienen valores de verdad diferentes.
$\to$ $r \wedge s \equiv \text{F}$; $r \vee s \equiv \text{V}$; $\sim r \wedge \sim s \equiv \text{F}$; $\sim r \vee \sim s \equiv \text{V}$

Además

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{\textcircled{F}}{p} \vee \underset{\textcircled{F}}{q})}_{\text{F}} \leftrightarrow \underbrace{(r \wedge s)}_{\text{F}}}_{\text{V}} \equiv \text{V}$$

Se deduce que: $p \equiv \text{F}$; $q \equiv \text{F}$

Analizamos la veracidad de las afirmaciones:

$$\text{I. } \underbrace{\underbrace{[\underbrace{(\underbrace{\sim p}_{\text{V}} \wedge \underbrace{\sim q}_{\text{V}})}_{\text{V}} \vee \underbrace{(r \wedge s)}_{\text{F}}]}_{\text{V}} \wedge \underbrace{p}_{\text{F}}}_{\text{F}\ \neq} : \text{verdadera}$$

$$\text{II. } \underbrace{\underbrace{[\underbrace{\sim\underbrace{(p \vee q)}_{\text{F}}}_{\text{V}} \wedge \underbrace{(r \vee s)}_{\text{V}}]}_{\text{V}} \vee \underbrace{(\underbrace{\sim p}_{\text{V}} \wedge \underbrace{q}_{\text{F}})}_{\text{F}}}_{\text{V}\ \neq} : \text{falsa}$$

$$\text{III. } \underbrace{\underbrace{[\underbrace{(\sim r \wedge \sim s)}_{\text{F}} \to \underbrace{(\underset{\text{F}}{p} \vee \underset{?}{r})}_{?}]}_{\text{V}} \wedge \underbrace{\sim\underbrace{(r \wedge s)}_{\text{F}}}_{\text{V}}}_{\text{V}\ =} : \text{verdadera}$$

$$\text{IV. } \underbrace{\underbrace{[\underbrace{(\sim r \wedge \sim s)}_{\text{F}} \to \underbrace{(\underset{?}{s} \vee \underset{\text{F}}{p})}_{?}]}_{\text{V}}\ \Delta \underbrace{\sim\underbrace{(\underset{?}{r} \wedge \underset{\text{F}}{p})}_{\text{F}}}_{\text{V}}}_{\text{F}\ \neq} : \text{verdadera}$$

Por lo tanto, solo es correcta la afirmación de la expresión III.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 23

Si $p \downarrow q$ se define como $\sim q \wedge \sim p$, entonces el equivalente a $(p \leftrightarrow q)$ es:

I. $(\sim p \downarrow q) \vee (q \downarrow p)$

II. $(\sim p \downarrow q) \vee (\sim q \downarrow p)$

III. $(\sim p \downarrow \sim q) \vee (p \downarrow q)$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

Resolución

Piden la expresión equivalente a $p \leftrightarrow q$.
Dato: $p \downarrow q \equiv \sim q \wedge \sim p$
Reemplazamos en las proposiciones:

I. $(\sim p \downarrow q) \vee (q \downarrow p)$
$\equiv (\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
$\equiv [(\sim q \wedge p) \vee \sim p] \wedge [(\sim q \wedge p) \vee \sim q]$ distrib.
$\equiv (\sim q \vee \sim p) \wedge \sim q$ absorc.
$\equiv \sim q$ absorc.

II. $(\sim p \downarrow q) \vee (\sim q \downarrow p)$
$\equiv (\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$
$\equiv [(\sim q \wedge p) \vee \sim p] \wedge [(\sim q \wedge p) \vee q]$ distrib.
$\equiv (\sim q \vee \sim p) \wedge (p \vee q)$ absorc.

III. $(\sim p \downarrow \sim q) \vee (p \downarrow q)$
$\equiv (q \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim p)$
$\equiv [(q \wedge p) \vee \sim q] \wedge [(q \wedge p) \vee \sim p]$ distrib.
$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p)$ absorc.
$\equiv [(p \vee \sim q) \wedge q] \wedge [(p \vee \sim q) \wedge \sim p]$ distrib.
$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ absorc.
$\equiv p \leftrightarrow q$

Por lo tanto, solo es equivalente la proposición III.

Clave C

PROBLEMA N.° 24

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes a $(p \rightarrow q) \rightarrow r$?

I. $\sim [p \wedge \sim q \wedge \sim r]$

II. $(p \wedge \sim q) \vee r$

III. $(r \vee q) \wedge (\sim r \wedge q)$

IV. $\sim p \vee q \vee r$

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) todos

Resolución

Piden: ¿cuál de las siguientes proposiciones son equivalentes a $(p \rightarrow q) \rightarrow r$?
Analizamos las proposiciones, teniendo:

I. $\sim [p \wedge \sim q \wedge \sim r] \equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee r$
$\equiv (p \rightarrow q) \vee r$ del condicional
$\equiv \sim (p \rightarrow q) \rightarrow r$ del condicional

II. $(p \wedge \sim q) \vee r \equiv \sim (p \rightarrow q) \vee r$ del condicional
$\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$ del condicional

III. $(r \vee q) \wedge (\sim r \wedge q) \equiv \sim r \wedge q$ absorción
$\equiv \sim (q \rightarrow r)$ del condicional

IV. $\sim p \vee q \vee r \equiv (p \rightarrow q) \vee r$ del condicional
$\equiv \sim (p \rightarrow q) \rightarrow r$ del condicional

Por lo tanto, solo la proposición II es equivalente a la proposición original.

Clave B

PROBLEMA N.° 25

Si la proposición $(p \vee \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera y $(\sim w) \rightarrow (\sim s)$ es falsa, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$
II. $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \wedge \sim p)$
III. $[t \rightarrow (w \vee \sim p)] \wedge \sim (p \rightarrow r)$

A) VVV
B) VVF
C) FFF
D) VFF
E) FFV

Resolución

Piden hallar el valor de verdad de las tres proposiciones:
Se sabe que

$$(\sim w) \rightarrow (\sim s) \equiv \text{F}$$
$$\underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{s}} \rightarrow \underset{\textcircled{F}}{\underset{\downarrow}{w}} \quad \equiv \text{F}$$

Además

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{\textcircled{F}}{\underset{\downarrow}{p}} \vee \underbrace{\sim \underset{\textcircled{V}}{\underset{\downarrow}{r}}}_{\text{F}})}_{\text{F}} \leftrightarrow \underbrace{(\underset{\text{V}}{\underset{\downarrow}{s}} \rightarrow \underset{\text{F}}{\underset{\downarrow}{w}})}_{\text{F}}}_{\text{V}} \equiv \text{V}$$

Se deduce que: $p \equiv$ F; $r \equiv$ V; $s \equiv$ V y $w \equiv$ F.

En las proposiciones:

I. $$\underbrace{\underbrace{(\underset{\text{F}}{\underset{\downarrow}{p}} \wedge \underset{?}{\underset{\downarrow}{q}})}_{\text{F}} \vee \underbrace{(\underset{\text{V}}{\underset{\downarrow}{r}} \vee \underset{\text{V}}{\underset{\downarrow}{s}})}_{\text{V}}}_{\text{V}}$$

II. $$\underbrace{\underbrace{(\underset{\text{V}}{\underset{\downarrow}{s}} \leftrightarrow \underbrace{\sim w}_{\text{V}})}_{\text{V}} \rightarrow \underbrace{(\underset{\text{V}}{\underset{\downarrow}{r}} \wedge \underbrace{\sim p}_{\text{V}})}_{\text{V}}}_{\text{V}}$$

III. $$\underbrace{\underbrace{[\underset{?}{\underset{\downarrow}{t}} \rightarrow \underbrace{(\underset{\text{F}}{\underset{\downarrow}{w}} \vee \underbrace{\sim p}_{\text{V}})}_{\text{V}}]}_{\text{V}} \wedge \underbrace{\sim \underbrace{(\underset{\text{F}}{\underset{\downarrow}{p}} \rightarrow \underset{\text{V}}{\underset{\downarrow}{r}})}_{\text{V}}}_{\text{F}}}_{\text{F}}$$

Por lo tanto, el valor de verdad de las tres proposiciones es VVF.

Clave B

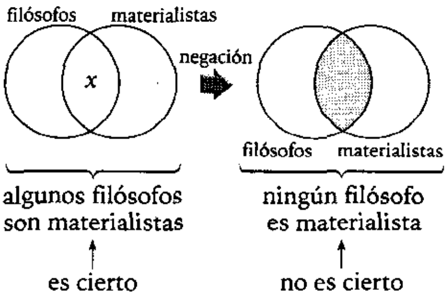
PROBLEMA N.° 26

Si: *Algunos filósofos son materialistas* entonces podemos concluir que

A) No ocurre que ningún filósofo sea materialista.
B) Ningún filósofo es materialista.
C) Ningún materialista es filósofo.
D) Todo filósofo es materialista.
E) Algunos filósofos no son materialistas.

Resolución

Piden la conclusión de: *Algunos filósofos son materialistas*.
Haciendo uso de su forma negativa tendríamos



Luego, se concluye
No es cierto que ningún filósofo sea materialista.
Por lo tanto, *No ocurre que ningún filósofo sea materialista.*

Clave **A**

PROBLEMA N.° 27

Si: *No todo profesional es amoral,*
entonces

A) Es falso que algunos profesionales no sean morales.
B) Algunos profesionales son morales.
C) Algunos profesionales no son morales.
D) Todo profesional es no moral.
E) Algunos morales no son profesionales.

Resolución

Piden la conclusión de *No todo profesional es amoral.*

Recordando las formas atípicas de proposiciones categóricas, tenemos

$$\underbrace{\text{No todo}}_{\text{particular}}\ \text{profesional es}\ \underbrace{\text{amoral}}_{\text{negativa}}$$

Por lo tanto, reemplazando por su forma típica:

Algunos profesionales no son morales.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 28

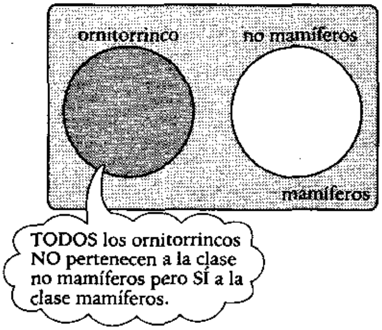
Si es cierto que:
Ningún ornitorrinco es no mamífero,
entonces

A) Algún ornitorrinco es mamífero.
B) No todo ornitorrinco es mamífero.
C) Todo ornitorrinco es mamífero.
D) Ningún mamífero es ornitorrinco.
E) Algún ornitorrinco es no mamífero.

Resolución

Piden la conclusión de *Ningún ornitorrinco es no mamífero.*

Analizamos gráficamente



TODOS los ornitorrincos NO pertenecen a la clase no mamíferos pero SÍ a la clase mamíferos.

Por lo tanto
Todo ornitorrinco es mamífero.

Clave **C**

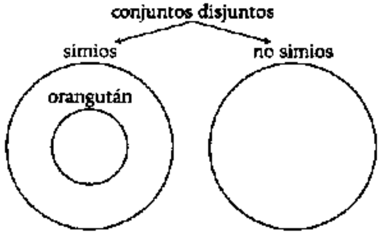
PROBLEMA N.° 29

Si: *Todo orangután es simio,*
entonces

A) Algún orangután no es simio.
B) Algún simio no es orangután.
C) Ningún orangután es simio.
D) Ningún no orangután es no simio.
E) Ningún no simio es orangután.

Resolución

Piden la conclusión de *Todo orangután es simio.*
Analizando gráficamente



Por lo tanto
Ningún no simio es orangután

Clave E

PROBLEMA N.° 30

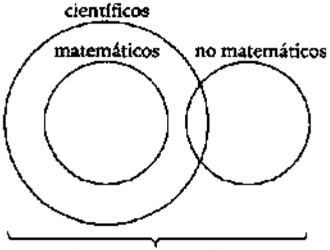
Si: *Todo matemático es científico,* concluimos que

A) Ningún matemático es científico.
B) No todo matemático es científico.
C) Algunos matemáticos no son científicos.
D) Todo científico es matemático.
E) No es cierto que todo científico sea no matemático.

Resolución

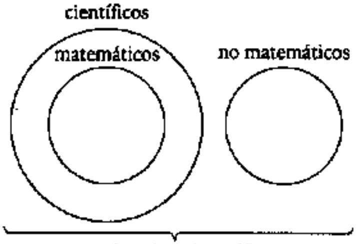
Piden la conclusión de *Todo matemático es científico.*
Gráficamente hay dos posibilidades

Primera posibilidad



se observa: algunos científicos son no matemáticos

Segunda posibilidad



se observa: ningún científico es no matemático

De ambas se extrae una conclusión común: *No es cierto que todo científico sea no matemático.*

Clave E

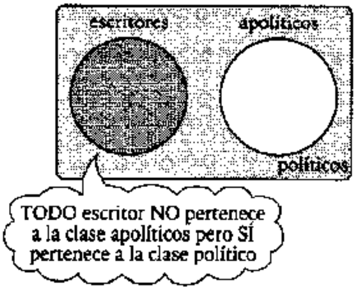
PROBLEMA N.° 31

Si: *Ningún escritor es considerado apolítico,* entonces

A) Todo político es escritor.
B) Ningún político es escritor.
C) Todo apolítico es escritor.
D) Todo escritor es político.
E) Ningún no político es escritor.

Resolución

Piden la conclusión de *Ningún escritor es considerado apolítico.*
Analizamos gráficamente



Por lo tanto, *Todo escritor es político.*

Clave D

PROBLEMA N.° 32

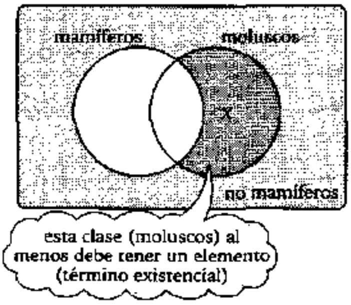
Si afirmamos que:
Ningún molusco es mamífero,
entonces

A) Todo mamífero es molusco.
B) Algún no mamífero es molusco.
C) Ningún molusco es no mamífero.
D) Algún mamífero es no molusco.
E) Todo molusco es mamífero.

Resolución

Piden la conclusión de *Ningún molusco es mamífero.*

Analizamos gráficamente



Entonces, algunos moluscos son no mamíferos.

Por lo tanto, *Algún no mamífero es molusco.*

Clave **B**

PROBLEMA N.° 33

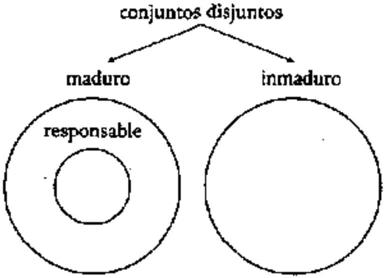
Sabiendo que:
Todo responsable es maduro,
entonces

A) Ningún responsable es maduro.
B) Algún inmaduro es responsable.
C) Todo maduro es responsable.
D) Algún responsable no es maduro.
E) Ningún inmaduro es responsable.

Resolución

Piden la conclusión de *Todo responsable es maduro.*

Analizamos gráficamente



Por lo tanto, *Ningún inmaduro es responsable.*

Clave **E**

PROBLEMA N.° 34

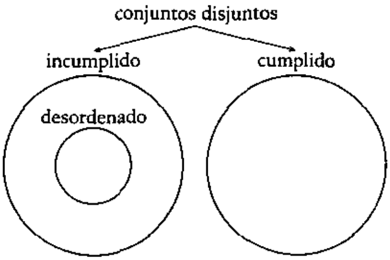
Si: *Todo desordenado es incumplido,*
entonces

A) Todo incumplido es desordenado.
B) Algún desordenado es cumplido.
C) Ningún cumplido es ordenado.
D) Algún ordenado es cumplido.
E) Ningún cumplido es desordenado.

Resolución

Piden la conclusión de *Todo desordenado es incumplido.*

Analizamos gráficamente



Por lo tanto, *Ningún cumplido es desordenado.*

Clave **E**

PROBLEMA N.° 35

Si: *Es falso que algunos políticos sean honestos,* entonces

A) Algún político es deshonesto.
B) Ciertos honestos no son no políticos.
C) Ningún deshonesto es político.
D) No es el caso que los políticos son honestos.
E) Los deshonestos son políticos.

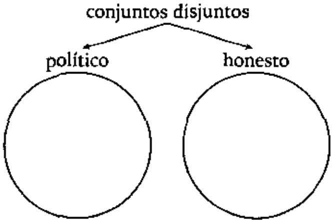
Resolución

Piden la conclusión de
Es falso que algunos políticos sean honestos.

Traducimos a la forma afirmativa:

Es falso que algunos políticos son honestos = *Ningún político es honesto*

Gráficamente



Por lo tanto,
No es el caso que los políticos son honestos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 36

Si:
- *Todos los insectos son invertebrados.*
- *Algunos insectos son coleópteros.*

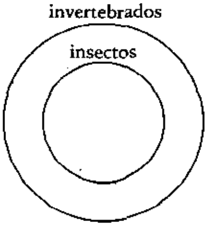
Entonces

A) Todo coleóptero es invertebrado.
B) Algún coleóptero es invertebrado.
C) Ningún coleóptero es insecto.
D) Todo insecto es coleóptero.
E) Algún coleóptero es vertebrado.

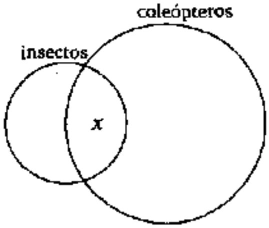
Resolución

Piden la conclusión de las 2 premisas.

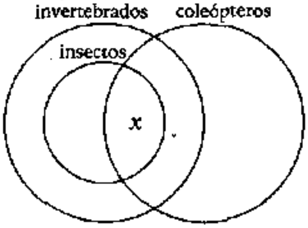
Premisa 1:
Todos los insectos son invertebrados.



Premisa 2:
Algunos insectos son coleópteros.



De ambos gráficos se deduce



Por lo tanto, *Algún coleóptero es invertebrado.*

Clave B

PROBLEMA N.° 37

Si:

- *Una persona que estudia con esfuerzo, logrará sus objetivos.*
- *Todo joven estudia con esfuerzo.*

Entonces

A) Ningún joven logra sus objetivos.
B) Todo joven logra sus objetivos.
C) Toda persona es joven.
D) Ninguna persona es joven.
E) Todo el que no logra sus objetivos no es joven.

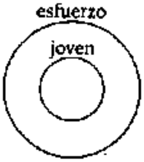
Resolución

Piden la conclusión de las 2 premisas.

Premisa 1:
Una persona que estudia con esfuerzo logrará sus objetivos.

Premisa 2:

Todo joven estudia con esfuerzo.



Luego, se concluye

Por lo tanto, *Todo joven logra sus objetivos.*

Clave B

PROBLEMA N.° 38

Si afirmamos que:

- *Algunos reptiles son de sangre caliente.*
- *Todo animal de sangre caliente es ovíparo.*

Entonces

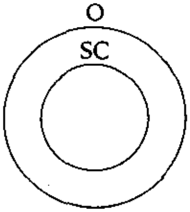
A) Todo reptil es ovíparo.
B) Ningún reptil es ovíparo.
C) Algunos reptiles son ovíparos.
D) Todo reptil no es de sangre caliente.
E) No es cierto que algunos reptiles son ovíparos.

Resolución

Piden la conclusión de las 2 premisas.
Iniciamos graficando la proposición universal.

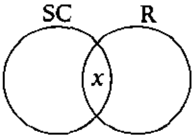
Premisa 2:

$\textit{Todo}\ \underbrace{\textit{animal de sangre caliente}}_{\text{SC}}\ \textit{es}\ \underbrace{\textit{ovíparo}}_{\text{O}}.$

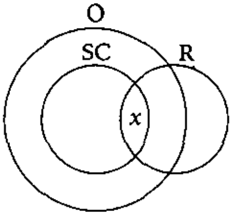


Premisa 1:

$\textit{Algunos}\ \underbrace{\textit{reptiles}}_{\text{R}}\ \textit{son}\ \underbrace{\textit{de sangre caliente}}_{\text{SC}}.$



Luego, se concluye:



Por lo tanto, *Algunos reptiles son ovíparos.*

Clave **C**

PROBLEMA N.° 39

Si:

- *Algunos poetas son fantasiosos.*
- *Todo fantasioso es no realista.*

Entonces

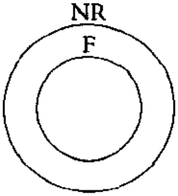
A) Todos los poetas son realistas.
B) No es cierto que muchos poetas no sean realistas.
C) Muchos poetas no son escritores.
D) Muchos poetas no son realistas.
E) Ningún poeta es realista.

Resolución

Piden la conclusión de las 2 premisas.
Analizamos la proposición universal.

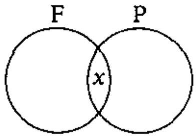
Premisa 2:

$\textit{Todo}\ \underbrace{\textit{fantasioso}}_{\text{F}}\ \textit{es}\ \underbrace{\textit{no realista}}_{\text{NR}}.$

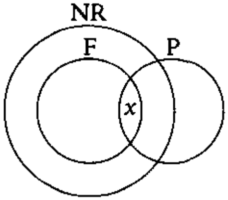


Premisa 1:

Algunos $\underbrace{\textit{poetas}}_{\text{P}}$ *son* $\underbrace{\textit{fantasiosos}}_{\text{F}}$.



Luego se concluye:



Entonces, algunos poetas son no realistas.

Por lo tanto, *Muchos poetas no son realistas*.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 40

Si:

- *Muchos de los que ofrendan la vida son valientes.*
- *Todos los valientes van a la gloria.*

Entonces:

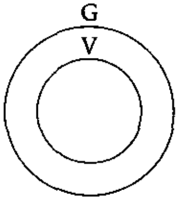
A) Nadie que ofrenda la vida va a la gloria.
B) Todos los valientes van a la gloria.
C) Muchos de los que ofrendan la vida van a la gloria.
D) Todo aquel que ofrenda la vida va a la gloria.
E) Algunas personas van a la gloria.

Resolución

Piden conclusión de las 2 premisas.

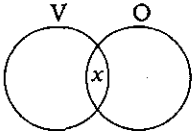
Iniciamos con la proposición universal.
Premisa 2:

Todos los $\underbrace{\textit{valientes}}_{\text{V}}$ *van a la* $\underbrace{\textit{gloria}}_{\text{G}}$.

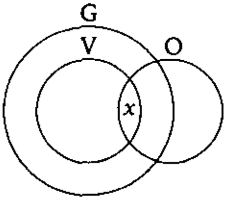


Premisa 1:

$\underbrace{\textit{Muchos de}}_{\text{particular}}$ $\underbrace{\textit{los que ofrendan}}_{\text{O}}$ *la vida son* $\underbrace{\textit{valientes}}_{\text{V}}$.



Luego, se concluye



Entonces, algunos que ofrendan la vida van a la gloria.

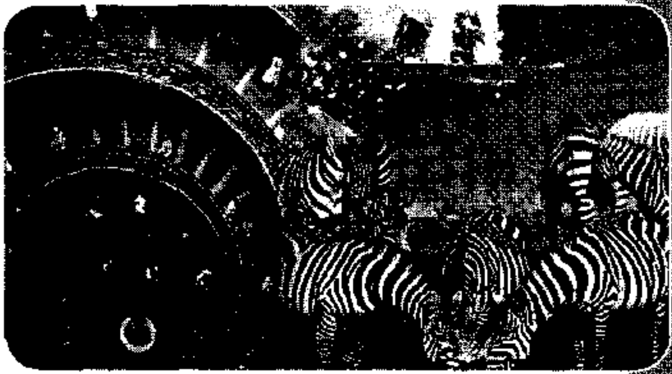
Por lo tanto, *Muchos de los que ofrendan la vida van a la gloria.*

Clave **C**

Capítulo

23

Temas complementarios



La gran diversidad de ejercicios y problemas matemáticos, dada la extensión de temas básicos de la matemática, ha llevado, en esta parte final, a optar por dos temas importantes y que contribuyen, además, uno a nuestro desarrollo del razonamiento y el otro a la parte del análisis que se debe tener en consideración al resolver un problema matemático. Los problemas de certezas son aquellos en los cuales la consideración de lo que conoceremos como caso extremo permitirá en nuestro quehacer diario tomar en cuenta el factor riesgo de alguna actividad que realicemos. Por otro lado, así como cuando nos referimos a una palabra en plural (estudiantes, exámenes) deducimos que la última letra será s , o cuando hablamos de una palabra que es verbo (estudiar, operar), deducimos que terminará en r, de la misma forma cuando se trata de números podemos deducir de forma sencilla la cifra en que termina una expresión a través del uso de ciertos métodos y técnicas basados en criterios como paridad, el gaussiano, etc.

Capítulo 23

Temas complementarios

CERTEZAS

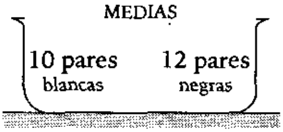
PROBLEMA N.° 1

En una caja hay 10 pares de medias blancas y 12 pares de medias negras. ¿Cuál es el menor número de medias que se deben extraer al azar de manera que se obtengan con seguridad un par de medias utilizables?

A) 2 B) 3 C) 10
D) 5 E) 4

Resolución

Piden extraer con seguridad un par de medias utilizables.
En una caja se tiene



Se quiere obtener un par de medias utilizables, es decir, del mismo color. Para tener la certeza de conseguirlo, planteamos el peor de los casos.

$$\text{N.° de extracciones}: \underbrace{\boxed{\begin{matrix}\text{una}\\ \text{media}\\ \text{blanca}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{una}\\ \text{media}\\ \text{negra}\end{matrix}}}_{\text{peor de los casos} \rightarrow \text{distinto color}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{cualquier}\\ \text{color}}}{1} = 3$$

Por lo tanto, como mínimo se debe extraer 3 medias.

Observación

Considere medias utilizables como medias de igual color.

Clave B

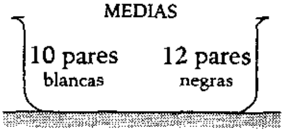
PROBLEMA N.° 2

De la pregunta anterior, ¿cuántas medias debemos extraer al azar, como mínimo, para obtener 5 pares de medias negras?

A) 30 B) 25 C) 28
D) 31 E) 32

Resolución

Piden obtener con seguridad 5 pares de medias negras.
En una caja se tiene



Analizamos el peor de los casos: obteniendo medias de colores distintos al negro, en este caso, medias de color blanco.

Número de extracciones:

$$\underbrace{10\text{ pares}}_{\substack{\text{medias}\\ \text{blancas}}} + \underbrace{5\text{ pares}}_{\substack{\text{medias}\\ \text{negras}}} = 15\text{ pares}$$

peor de los casos

Por lo tanto, como mínimo se debe extraer

15 pares < > 30 medias

Clave **A**

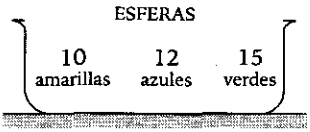
PROBLEMA N.° 3

En una caja hay 10 esferas amarillas, 12 azules y 15 verdes. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se debe extraer al azar de manera que se obtengan 10 de un mismo color?

A) 30 B) 29 C) 27
D) 26 E) 28

Resolución

Piden obtener con seguridad 10 esferas de un mismo color.
En una caja se tiene



Se busca extraer 10 esferas del mismo color, el peor de los casos sería extraer la mayor cantidad de esferas en colores diferentes.

Número de extracciones:

$$\underbrace{\underbrace{9}_{\text{amarillas}} + \underbrace{9}_{\text{azules}} + \underbrace{9}_{\text{verdes}}}_{\text{peor de los casos}} + \underset{\text{cualquier color}}{1} = 28$$

Por lo tanto, como mínimo se debe extraer 28 esferas.

Clave **E**

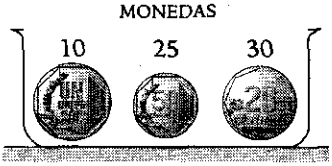
PROBLEMA N.° 4

En un monedero se tiene 10 monedas de S/.1; 25 monedas de S/.0,50 y 30 monedas de S/.0,20. ¿Cuántas se deben extraer al azar y como mínimo para obtener al menos 10 del mismo valor en 2 de los 3 valores?

A) 39 B) 48 C) 52
D) 49 E) 65

Resolución

Piden obtener al menos 10 del mismo valor en 2 de los 3 valores.
En un monedero se tiene



Analizamos el peor de los casos: como solo se quiere 10 monedas de dos de los valores, sería un caso extremo extraer la totalidad de monedas (en el peor de los casos la monedas de mayor cantidad); además solo se desea monedas de 2 valores, un caso extremo sería extraer monedas de todos los valores.

Número de extracciones:

$$\underbrace{\overset{\text{mayor cantidad}}{\underbrace{30}_{\substack{\text{de}\\ \text{S/.0,20}}}} + \underbrace{9}_{\substack{\text{de}\\ \text{S/.1}}} + \underbrace{9}_{\substack{\text{de}\\ \text{S/.0,50}}}}_{\text{peor de los casos}} + \underset{\text{de S/.1 ó S/.0,50}}{1} = 49$$

Por lo tanto, como mínimo se debe extraer 49 monedas.

Clave **D**

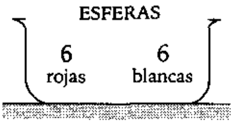
PROBLEMA N.° 5

En un cajón hay 6 esferas rojas y 6 esferas blancas. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se han de sacar al azar para tener la seguridad de haber extraído 3 del mismo color?

A) 4 B) 5 C) 7
D) 8 E) 6

Resolución

Piden obtener con seguridad 3 esferas del mismo color.
En un cajón se tiene



Analizamos el peor de los casos: obtener esferas de colores diferentes.

Número de extracciones:

$$\underbrace{\underbrace{2}_{\text{rojas}} + \underbrace{2}_{\text{blancas}}}_{\substack{\text{colores diferentes}\\ \uparrow\ \text{peor de los casos}}} + \underset{\uparrow\ \text{cualquier color}}{1} = 5$$

Por lo tanto, como mínimo se debe extraer 5 esferas.

Clave B

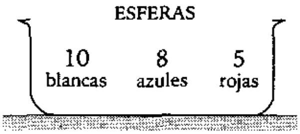
PROBLEMA N.° 6

En una caja hay 10 esferas blancas, 8 azules y 5 rojas. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se han de extraer al azar para tener la seguridad de haber extraído, por lo menos, una de cada color?

A) 16 B) 19 C) 21
D) 20 E) 18

Resolución

Piden obtener con seguridad una esfera de cada color.
En una caja se tiene



Se quiere obtener esferas de colores diferentes, entonces el peor de los casos sería extraer esferas (en su totalidad) de un mismo color.

Número de extracciones:

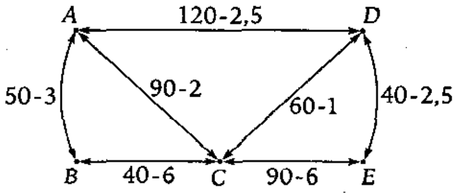
$$\underbrace{\underbrace{10}_{\text{blancas}} + \underbrace{8}_{\text{azules}}}_{\text{peor de los casos}} + \underset{\substack{\text{rojo}\\ \uparrow\ \text{único color que queda}}}{\underbrace{1}} = 19$$

Por lo tanto, como mínimo se deben extraer 19 esferas.

Clave B

PROBLEMA N.° 7

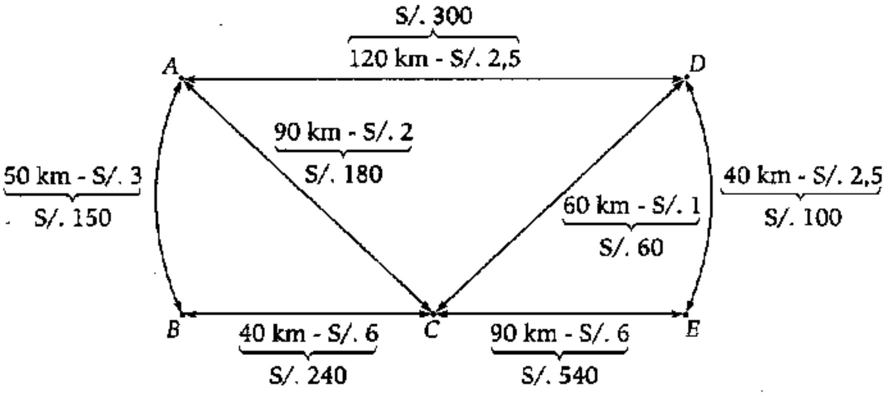
Según el diagrama, siendo el primer número la longitud en km y el segundo el costo en soles por cada km recorrido; ¿cuál es el menor costo del recorrido desde *A* hasta *E*?



A) S/.320 B) S/.350 C) S/.340
D) S/.280 E) S/.345

Resolución

Piden, ¿cuál es el menor costo del recorrido desde *A* hasta *E*?
Analizamos el esquema, obteniendo



Observamos los caminos de *A* hasta *E*

- $A \xrightarrow{S/.300} D \xrightarrow{S/.100} E \rightarrow$ S/.400
- $A \xrightarrow{S/.180} C \xrightarrow{S/.540} E \rightarrow$ S/.720
- $A \xrightarrow{S/.180} C \xrightarrow{S/.60} D \xrightarrow{S/.100} E \rightarrow$ S/.340

⋮

Se deduce que en los recorridos *ABCDE* y *ABCE* el costo es mayor al recorrido *ACDE*.

Por lo tanto, el menor costo del recorrido desde *A* hasta *E* es S/.340.

Clave **C**

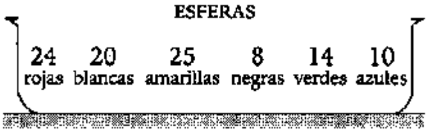
PROBLEMA N.° 8

En un cajón hay 24 esferas rojas, 20 blancas, 25 amarillas, 8 negras, 14 verdes y 10 azules. ¿Cuál es el menor número de esferas que se han se sacar al azar para tener la seguridad de haber extraído, por lo menos, 12 esferas de 3 colores?

A) 90 B) 98 C) 76
C) 82 E) 96

Resolución

Piden obtener con seguridad 12 esferas de 3 colores.
En un cajón se tiene



Analizamos el peor de los casos: como solo se quiere 12 esferas de 3 colores, sería un caso extremo extraer la totalidad de esferas (en el peor de los casos de aquellas de mayor cantidad), además en todos los casos extraer la máxima cantidad posible.

Tener en cuenta que solo hay 8 esferas negras y 10 esferas azules, entonces con estos colores no se puede obtener las 12 esferas requeridas.

Número de extracciones:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{8}_{\text{negras}}+\underbrace{10}_{\text{azules}}}_{\text{colores no útiles}}+\overbrace{\underbrace{25}_{\text{amarillas}}+\underbrace{24}_{\text{rojas}}}^{\text{mayores cantidades}}+\underbrace{11}_{\text{blancas}}+\underbrace{11}_{\text{verdes}}}_{\text{peor de los casos}}+\underset{\text{blanca o verde}}{\underset{\uparrow}{1}}=90$$

Por lo tanto, como mínimo se deben extraer 90 esferas.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 9

Del problema anterior, ¿cuál es el mínimo número de esferas que hay que sacar al azar para tener la seguridad de haber extraído un color por completo?

A) 93 B) 94 C) 102
D) 96 E) 95

Resolución

Piden obtener con seguridad un color completo.
En un cajón se tiene

ESFERAS

24 rojas	20 blancas	25 amarillas	8 negras	14 verdes	10 azules

Analizamos el peor de los casos: extraer esferas de diversos colores, en gran cantidad pero sin llegar a completar un color.

Número de extracciones:

$$\underbrace{\underbrace{23}_{\text{rojas}}+\underbrace{19}_{\text{blancas}}+\underbrace{24}_{\text{amarillas}}+\underbrace{7}_{\text{negras}}+\underbrace{13}_{\text{verdes}}+\underbrace{9}_{\text{azules}}}_{\text{peor de los casos}}+\underset{\text{cualquier color}}{\underset{\uparrow}{1}}=96$$

Por lo tanto, como mínimo se deben extraer 96 esferas.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 10

En una caja hay 5 pares de medias azules y 8 pares de medias negras. ¿Cuántas medias como mínimo se deberán extraer al azar para que, entre las medias extraídas, se encuentren:

I. Un par de medias del mismo color.
II. Un par de medias utilizable.

A) 4; 3
B) 3; 4
C) 3; 3
D) 5; 3
E) 3; 5

Resolución

Piden: ¿cuántas medias como mínimo se debe extraer para obtener los enunciados I y II?
En una caja se tiene

MEDIAS

5 pares azules	8 pares negras

I. Se quiere obtener un par de medias del mismo color.

Número de extracciones:

$$\text{peor de los casos} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{1}_{\text{azul}} + \underbrace{1}_{\text{negro}}}_{\text{colores diferentes}} + \underbrace{1}_{\text{cualquier color}} = 3$$

II. Se quiere obtener un par de medias utilizables.

Número de extracciones:

$$\text{peor de los casos} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{1}_{\text{azul}} + \underbrace{1}_{\text{negro}}}_{\text{colores diferentes}} + \underbrace{1}_{\text{cualquier color}} = 3$$

Por lo tanto, como mínimo se deben extraer 3 y 3 medias en cada caso.

Observación

Considere medias utilizables como medias de igual color.

Clave C

PROBLEMA N.° 11

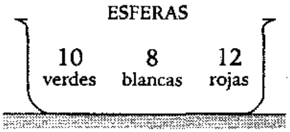
En una urna se tiene 10 esferas verdes, 8 blancas y 12 rojas. Se extraen al azar una por una. ¿Cuántas se deben extraer al azar, como mínimo, para estar seguro de tener 6 esferas de un mismo color?

A) 13 B) 16 C) 12
D) 11 E) 10

Resolución

Piden obtener con seguridad 6 esferas de un mismo color.

En una urna se tiene



Analizamos el peor de los casos: extraer la mayor cantidad de esferas de colores diferentes (menor a 6).

Número de extracciones:

$$\underbrace{\underbrace{5}_{\text{verdes}} + \underbrace{5}_{\text{blancas}} + \underbrace{5}_{\text{rojas}}}_{\text{peor de los casos}} + \underbrace{1}_{\text{cualquier color}} = 16$$

Por lo tanto, como mínimo se deben extraer 16 esferas.

Clave B

PROBLEMA N.° 12

Si m peras pesan entre n y s gramos inclusive ($n < s$); ¿cuál es el máximo número de peras que pueden haber en t kilogramos?

A) $\dfrac{1000tm}{n}$

B) $\dfrac{1000tm}{m+n}$

C) $\dfrac{1000mt}{t+m}$

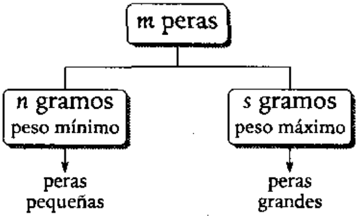
D) $\dfrac{1000m}{t+n}$

E) $\dfrac{1000mn}{t}$

Resolución

Piden: ¿cuál es el máximo número de peras que pueden haber en t kilogramos?

Se sabe que



Luego, se concluye que

$$\text{Peso unitario}\begin{cases} \rightarrow \text{peras pequeñas: } \dfrac{n}{m} \\ \rightarrow \text{peras grandes: } \dfrac{s}{m} \end{cases}$$

Nos piden, el máximo número de peras que hay en t kilogramos. Para maximizar la cantidad se debe considerar a las peras más pequeñas, así:

cantidad		**peso (g)**
1	$\longrightarrow$	$\frac{n}{m}$
x	$\longrightarrow$	$1000t$

Resolviendo

$$x=\frac{1000tm}{n}$$

Por lo tanto, el máximo número de peras en t kilogramos es $\frac{1000tm}{n}$.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 13

Un grupo de 183 personas va a elegir un presidente. Si se presentan 2 candidatos para el puesto, ¿cuál es el menor número de votos que puede obtener uno de ellos y lograr así más que el otro?

A) 78
B) 90
C) 91
D) 92
E) 89

Resolución

Piden el menor número de votos que puede obtener uno de ellos y lograr así más que el otro.

En total son 183 votantes, para garantizar el triunfo mínimamente se debe obtener un voto más que el otro. Así:

candidatos:

votos: $\underbrace{x+1}_{\text{presidente}}$ $\quad x$

Total de votos

$$(x+1)+x=183$$

$$2x+1=183$$

$$2x=183-1$$

$$\rightarrow\ x=91$$

Por lo tanto, es necesario al menos obtener 92 votos.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 14

A la orilla de un río se encuentra un campesino con una canoa, una cabra, un lobo hambriento y un paquete de alfalfa. ¿Cuántas veces, como mínimo, debe cruzar el río, si en la canoa solo entran 2 elementos?

A) 7 B) 12 C) 8
D) 6 E) 5

Resolución

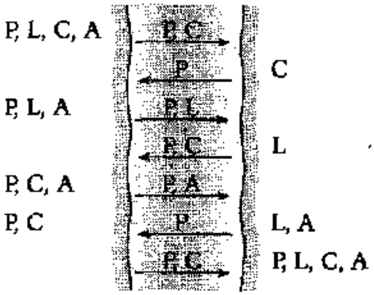
Piden: ¿cuántas veces, como mínimo, deben cruzar el río, el campesino, la cabra, el lobo y la alfalfa?

Se sabe que: en cada viaje solo pueden ir 2 elementos. Además, obviamente, el lobo no puede quedar a solas con la cabra (se la devora) y menos la cabra sola con el paquete de alfalfa.

Consideramos:

Campesino → P
Lobo → L
Cabra → C
Alfalfa → A

Tenemos los siguientes traslados:



Por lo tanto, se debe cruzar, como mínimo, 7 veces el río.

Clave **A**

CIFRAS TERMINALES

PROBLEMA N.° 15

Halle la cifra terminal de

$A=(9971+2345)^{9999^8}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

Resolución

Piden hallar la cifra terminal de

$$A=(9971+2345)^{9999^8}$$

Analizamos únicamente las cifras terminales de los sumandos

$$A=(\ldots1+\ldots5)^{9999^8}$$

$$A=(\ldots6)^{9999^8}$$

Recuerda

Números circulares ($n \in \mathbb{N}$)			
$(\ldots0)^n=\ldots0$	$(\ldots1)^n=\ldots1$	$(\ldots5)^n=\ldots5$	$(\ldots6)^n=\ldots6$

$$A=(\ldots6)^{9999^8}=\ldots6$$

Por lo tanto, la cifra terminal de A es 6.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 16

Halle la cifra terminal de

$M=(2777^2+1993^3+1435^6)\times92^5$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6

Resolución

Piden hallar la cifra terminal de

$$M=(2777^2+1993^3+1435^6)\times 92^5$$

Analizamos únicamente las cifras terminales

$$M=(...7^2+...3^3+...5^6)\times ...2^{\overset{\circ}{4}+1}$$

$$M=\underbrace{(...9+...7+...5)}\times(...2)^1$$

$$M=\quad (...1)\quad \times(...2)$$

$$M=...2$$

Por lo tanto, la cifra terminal de *M* es 2.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 17

En qué cifra termina

$$A=(88888)^{77777}+(99999)^{22222}+5^{2^{3^{4^7}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

Resolución

Piden: ¿en qué cifra termina *A*?

$$A=(88888)^{77777}+(99999)^{22222}+5^{2^{3^{4^7}}}$$

Analizamos las cifras terminales

$$A=(...8)^{\overset{\overset{\circ}{4}+1}{\boxed{77777}}}+(...9)^{\overset{\text{exponente par}}{\boxed{22222}}}+\underset{\text{número circular}}{5}^{\boxed{2^{3^{4^7}}}}$$

$$A=\underbrace{(...8)^{\overset{\circ}{4}+1}}+\underbrace{(...9)^{\text{par}}}+\underbrace{5^n}$$

$$A=\quad(...8)^1\quad+\quad(...1)\quad+(...5)$$

$$A=...4$$

Por lo tanto, la cifra terminal de *A* es 4.

Clave **D**

PROBLEMA N.° 18

Halle la cifra terminal de

$$A=\overline{\text{PERU99}}^{\overline{\text{ADUNI95}}^{\overline{\text{CV99}}}}$$

A) 1

B) 3

C) 6

D) 5

E) 9

Resolución

Piden hallar la cifra terminal de

$$A=\overline{\text{PERU99}}^{\overline{\text{ADUNI95}}^{\overline{\text{CV99}}}}$$

Analizamos las cifras terminales de los numerales.

$$A=(...9)^{\boxed{(...5)^{(...9)}}\longrightarrow ...5}$$

$$A=(...9)^{\overset{\text{exponente impar}}{\boxed{(...5)}}}$$

$$A=(...9)^{\text{impar}}=...9$$

Por lo tanto, la cifra terminal de *A* es 9.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 19

Halle la cifra terminal en el desarrollo total de $A=999\times 888\times 777\times 666\times 222$

A) 1

B) 2

C) 4

D) 6

E) 8

Resolución

Piden hallar la cifra terminal en el desarollo total de

$$A=999\times 888\times 777\times 666\times 222$$

Analizamos las cifras terminales de los factores

$$A=\underbrace{(...9)\times(...8)}\times\underbrace{(...7)\times(...6)}\times\underbrace{(...2)}$$

$$A=\quad(...2)\quad\times\quad(...2)\quad\times(...2)$$

$$A=...8$$

Por lo tanto, la cifra terminal de A es 8.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 20

¿En qué cifra termina el desarrollo de $3237^{91246}-428792^{266643}$?

A) 6 B) 1 C) 4
D) 2 E) 7

Resolución

Piden: ¿en qué cifra termina el desarrollo de la expresión?

$$3237^{91246}-428792^{266643}$$

Analizamos las cifras terminales

$$\rightarrow\quad(...7)^{91246}-(...2)^{266643}$$

Relacionando los exponentes con la multiplicidad del 4

$$\rightarrow\quad(...7)^{\overset{\circ}{4}+2}-(...2)^{\overset{\circ}{4}+3}$$

$$\rightarrow\quad(...7)^{2}-(...2)^{3}$$

$$\rightarrow\quad(...9)-(...8)=...1$$

Por lo tanto, el desarrollo de la expresión termina en 1.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 21

Halle la última cifra significativa al resolver

$(8700070)^{92745}+(81200000)^{266643}$

A) 6 B) 8 C) 4
D) 9 E) 7

Resolución

Piden hallar la última cifra significativa al resolver

$$(8700070)^{92745}+(81200000)^{266643}$$

Analizamos los sumandos, la última cifra significativa dependerá del primero ya que las últimas cifras del segundo sumando son 0.

Del primer sumando, la última cifra significativa depende del 7 que es la última cifra significativa de la base.

Luego

$$(870007\underline{0})^{92745}$$

$$=...\underline{7}^{92745}=...7^{\overset{\circ}{4}+1}$$

$$=\underset{\uparrow}{...7}\ \text{última cifra significativa}$$

Por lo tanto, la última cifra significativa es 7.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 22

¿En cuántos ceros termina el desarrollo de:

$(\overline{\text{ADUNI99}\underbrace{000...0}_{x\text{ veces}}})^{y}$?

A) $x+y$ B) xy C) y
D) $x-y$ E) $y-x$

Resolución

Piden la cantidad de ceros en que termina el desarrollo

$$(\overline{\text{ADUNI99}\underbrace{000...0}_{x\text{ veces}}})^y$$

Desdoblando adecuadamente

$$[(\overline{\text{ADUNI99}})\times(1\underbrace{000...0}_{x\text{ veces}})]^y$$

$$=(\overline{\text{ADUNI99}})^y\times(10^x)^y$$

$$=(\overline{\text{ADUNI99}})^y\times\boxed{10^{xy}}\;1\underbrace{000...0}_{xy\text{ veces}}$$

Se observa que la cantidad de ceros en los que termina el producto depende del segundo factor.

Por lo tanto, el desarrollo termina en *xy* ceros.

Clave B

PROBLEMA N.° 23

¿En qué cifra termina la parte periódica del desarrollo decimal $\frac{1}{83}$?

A) 3 B) 7 C) 9

D) 1 E) 2

Resolución

Piden: ¿en qué cifra termina la parte periódica del desarrollo decimal $\frac{1}{83}$?

Ya que el donominador de la fracción generatriz $\frac{1}{83}$, no contiene factores múltiplos de 2 ni de 5 entonces el decimal es periódico puro.

Así:

$$\frac{1}{83}=0,\widehat{abc...x}$$

$$\frac{1}{83}=\frac{\overline{abc...x}}{999...9}$$

$$(999...9)=(\overline{abc...x})\times(83)$$

$$\rightarrow\ x=3$$

Por lo tanto, la cifra terminal de la parte periódica del decimal es 3.

Clave A

PROBLEMA N.° 24

En qué cifra termina el producto de

$A=63_{(7)}\times63_{(8)}\times63_{(9)}\times...\times63_{(64)}$

A) 1 B) 3 C) 5

D) 7 E) 6

Resolución

Piden en qué cifra termina el producto de

$$A=63_{(7)}\times63_{(8)}\times63_{(9)}\times...\times63_{(64)}$$

Desarrollamos polinómicamente (*A* base 10)

$A=(6\times7+3)\times(6\times8+3)\times(6\times9+3)\times...\times(6\times64+3)$

$A=45\times51\times57\times...\times387$

Se concluye que todos los factores son impares, además el primero de ellos termina en cifra 5.

Recuerda

(...5)×(N.° par) =...0	(...5)×(N.° par) =...5

Luego

$A=(...5)\times(\text{n.° impar})\times(\text{n.° impar})\times...\times(\text{n.° impar})$

$\rightarrow\ A=...5$

Por lo tanto, la cifra terminal del producto es 5.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 25

Si: $4N=...548$; $3N=...661$,
halle la suma de las 3 últimas cifras de $4111N$.

A) 10 B) 12 C) 9
D) 13 E) 16

Resolución

Piden hallar la suma de las 3 últimas cifras de $4111N$.

Se sabe que

$4N=...548$ y $3N=...661$

Al desarrollar la diferencia se obtiene

$$-\begin{pmatrix}4N=...548\\ 3N=...661\end{pmatrix}-$$
$$\overline{\quad N=...887\quad}$$

Luego

$4111N=4111\times(...887)$

Analizamos las últimas 3 cifras

$$\begin{array}{r} 4\,1\,1\,1\,\times \\ \underline{...\,8\,8\,7} \\ \hline ...\,7\,7\,7 \\ ...\,8\,8 \\ \underline{...\,8} \\ \hline ...\,4\,5\,7 \end{array}$$

$\rightarrow\ 4111N=...457$

Por lo tanto, la suma de las 3 últimas cifras $(4+5+7)$ es 16.

Clave **E**

PROBLEMA N.° 26

Halle el valor de x

$$3^{47}+62^{97}+35^{\overline{ab2}^{3}}=\overline{...x}$$

A) 1 B) 4 C) 5
D) 3 E) 6

Resolución

Piden hallar el valor de x

$$3^{47}+62^{97}+3\underset{\uparrow\text{número circular}}{\underline{5}}^{\overline{ab2}^{3}}=\overline{...x}$$

Relacionamos los exponentes con la multiplicidad del 4.

$$\underbrace{3^{\left(\overset{\circ}{4}+3\right)}}+\underbrace{...2^{\left(\overset{\circ}{4}+1\right)}}+\underbrace{...5^{n}}=\overline{...x}$$

$$...3^{3}+\ ...2^{1}\ +\ ...5\ =\overline{...x}$$

$$\underbrace{...7\ +\ ...2\ +\ ...5}=\overline{...x}$$

$$...4\qquad\qquad=\overline{...x}$$

$\rightarrow\ x=4$

Por lo tanto, el valor de x es 4.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 27

Halle

$A=0{,}982081+0{,}017838+0{,}000081$

A) 1 B) 2 C) 0,81
D) 0,7 E) 0,83

Resolución

Piden hallar el valor de

$A=0{,}982081+0{,}017838+0{,}000081$

Desarrollamos la adición por columnas, obtenemos:

$$\begin{array}{l} \;\;\;\,1\;1\;1\;2\;1 \\ 0,982081\;+ \\ 0,017838 \\ \underline{0,000081} \\ 1,000000 < > 1 \end{array}$$

Por lo tanto, el valor de *A* es 1.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 28

Halle el valor de *x*

$$\overline{ab4}^{\overline{ab5}}+\overline{mn9}^{\overline{mn0}}+\overline{ab1}^{\overline{ab2}}+\overline{ab6}^{\overline{ab7}}=\overline{...x}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución

Piden hallar el valor de *x*

$$\overline{ab4}^{\overline{ab5}}+\overline{mn9}^{\overline{mn0}}+\overline{ab1}^{\overline{ab2}}+\overline{ab6}^{\overline{ab7}}=\overline{...x}$$

Analizamos las cifras terminales de los sumandos:

$$...4^{\overline{ab5}}+...9^{\overline{mn0}}+\underbrace{...1^{\overline{ab2}}+...6^{\overline{ab7}}}_{\text{números circulares}}=...x$$

$$\underbrace{\underbrace{(...4)^{\text{IMPAR}}}_{...4}+\underbrace{(...9)^{\text{PAR}}}_{...1}+\underbrace{(...1)^{n}}_{...1}+\underbrace{(...6)^{m}}_{...6}}_{...2}=\overline{...x}$$

$$\rightarrow\; x=2$$

Por lo tanto, el valor de *x* es 2.

Clave **B**

PROBLEMA N.° 29

Halle las dos últimas cifras del desarrollo de

$A=1!+2!+3!+4!+...+999!$

A) 43 B) 37 C) 13
D) 34 E) 00

Resolución

Piden las dos últimas cifras del desarrollo de

$$A=1!+2!+3!+4!+...+999!$$

Calculando los factoriales tenemos

$$\begin{array}{rr} 1!= & 1\;+ \\ 2!= & 2 \\ 3!= & 6 \\ 4!= & 24 \\ 5!= & 120 \\ 6!= & 720 \\ 7!= & 5040 \\ 8!= & 40320 \\ 9!= & 362880 \\ 10!= & 3628800 \\ 11!= & 39916800 \\ 12!= & ......00 \\ \vdots & \\ \underline{999!=} & \underline{.......00} \\ A= & ......13 \end{array}$$

Por lo tanto, las dos últimas cifras del desarrollo de *A* son 13.

Clave **C**

PROBLEMA N.° 30

Halle la suma de las tres últimas cifras de:

$$1376^{2376^{3376}}+2376^{3376^{4376}}+3376^{4376^{5376}}$$

A) 11 B) 12 C) 8
D) 9 E) 16

Resolución

Piden hallar la suma de las 3 últimas cifras de

$$1376^{\overbrace{2376^{3376}}^{m}}+2376^{\overbrace{3376^{4376}}^{n}}+3376^{\overbrace{4376^{5376}}^{p}}$$

Recuerda

Número circular de 3 cifras

$\forall n\in\mathbb{N}$: $(\ldots376)^n=\ldots376$

Luego

$$1\underline{376}^m+2\underline{376}^n+3\underline{376}^p;\ m,n,p\in\mathbb{N}$$

$$\ldots376+\ldots376+\ldots376$$

$$(\ldots376)\times3=\ldots128$$

Por lo tanto, la suma de las 3 últimas cifras (1+2+8) es 11.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 31

Halle la última cifra del desarrollo de:

$99999^{888^{77^{66}}}$

A) 1 B) 2 C) 0
D) 6 E) 5

Resolución

Piden hallar la última cifra del desarrollo

$$99999^{888^{77^{66}}}$$

Ya que la última cifra de la base es 9, será suficiente conocer si su exponente es par o impar.

Analizamos el exponente

$$888^{77^{66}}=(\text{n.° par})^{77^{66}}=\text{n.° par}$$

Entonces

$$(\ldots9)^{(\text{n.° par})}=\ldots1$$

Por lo tanto, la última cifra del desarrollo es 1.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 32

Halle la cifra terminal de:

$77^{96^{44^{33^{22}}}}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 7 E) 9

Resolución

Piden hallar la cifra terminal de

$$77^{96^{44^{33^{22}}}}$$

Ya que la última cifra de la base es 7, será suficiente conocer la multiplicidad del exponente respecto al 4.

Analizamos el exponente

$$96^{44^{33^{22}}}=\overset{\circ}{4}^{\boxed{44^{33^{22}}}}=\overset{\circ}{4}$$

Entonces

$$(\ldots7)^{\overset{\circ}{4}}=\ldots1$$

Por lo tanto, la última cifra del desarrollo es 1.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 33

Halle $a+b$

$2\times4\times6\times8\times\ldots\times98=\sqrt[8]{\ldots ab00}$

A) 0 B) 2 C) 7
D) 10 E) 6

Resolución

Piden hallar $a+b$

$$2\times4\times6\times8\times\ldots\times98=\sqrt[8]{\overline{\ldots ab00}}$$

El producto de números pares termina en cero, ya que mínimamente contiene un factor 10. En este caso, contiene 9 factores 10 (10; 20; 30; ...; 80 y 90), por lo tanto el resultado terminará en 9 cifras 0.

$$\overline{N\underbrace{0000\ldots0}_{9\text{ cifras}}}=\sqrt[8]{\overline{\ldots ab00}}\ \rightarrow\ (\overline{N\underbrace{0000\ldots0}_{9\text{ cifras}}})^8=\overline{\ldots ab00}\ \rightarrow\ \overline{N\underbrace{0000\ldots0}_{72\text{ cifras}}}=\overline{\ldots ab00}$$

Luego $a=0$ y $b=0$

Por lo tanto, el valor de $a+b$ es 0.

Clave **A**

PROBLEMA N.° 34

Halle la cifra terminal del desarrollo de:

$A=1!\times2!\times3!\times4!\times5!\times\ldots\times99!+44444^{9!\times8!\times7!\times\ldots\times1!}+777799!$

A) 6 B) 4 C) 7 D) 8 E) 3

Resolución

Piden hallar la cifra terminal del desarrollo

$$A=1!\times2!\times3!\times4!\times5!\times\ldots\times99!+44444^{9!\times8!\times7!\times\ldots\times1!}+777799!$$

Recuerda

$$1!\times2!\times3!\times4!\times\underbrace{5!}_{120}\times N=\ldots0$$

Luego

$$A=\ldots0+44444^{\overset{\text{exponente par}}{(\ldots0)}}+\ldots0\qquad\rightarrow\ A=\ldots0+\ldots6+\ldots0\ \rightarrow\ A=\ldots6$$

Por lo tanto, la cifra terminal del desarrollo es 6.

Clave **A**